

## Allgemeines. Didaktik. Bibliographisches.

● Littlewood, J. E.: *A mathematician's miscellany*. London: Methuen and Co. 1953. VII, 136 p. 18 diagrams. 15 s.

This admirable book defies summarising, being, as the author says „a collection without a natural ordering relation“. The book overflows with what G. B. Shaw calls „the gaiety of genius“. Some topics are included simply as jokes — very good jokes. Questions of immense variety are submitted to logical analysis — ranging from Celestial Mechanics to General Elections, and from simple puzzles to profound pieces of mathematics. (Starred sections indicate the parts which can only be appreciated by professional mathematicians.) The conclusions reached are often surprising and always interesting. — Part of the book is autobiographical — for example Littlewood's account of his own mathematical education, or his description of how he came to discover that the solar system cannot make permanent captures. Throughout there are sidelights on his method of thinking. Very encouraging is his frankness about his own mistakes and the mistakes of other great mathematicians, his references to the things he should have known or seen and did not. (A section opens with the sentence, „It is always pleasant to find others doing the silly things one does oneself.“) The fact that no mind, however brilliant, is free from blind spots is too often overlooked — some professors, for instance, will condemn utterly a student who has made one ridiculous statement. Many remarks in the book are valuable for their psychological realism — some dicta on the principles of examining, for instance; the defence and advocacy of pictorial thinking as rigorous; again on rigour the sentence „rigour . . . is not of first-rate importance in analysis beyond the undergraduate stage, and can be supplied, given a real idea, by any competent professional.“ — I hope a later edition of the book will supply the paragraph suppressed by Littlewood for being „too blasphemous, seditious and libellous“ — though, admittedly, its suppression leaves wonderful scope for the horrible imagination of the reader.

W. W. Sawyer.

Waerden, B. L. van der: *Einfall und Überlegung in der Mathematik*. Elementar Math. 8, 121—129 (1953).

Behnke, Heinrich: *Wandel im Aufbau der Mathematik*. Math.-phys. Semesterber. 3, 139—164 (1953).

● Dini, Ulisse: *Opere*. A cura dell'Unione Matematica Italiana. Vol. I. Roma: Edizioni Cremonese della Casa Editrice Perrella 1953.

Die Unione Matematica Italiana bringt damit den ersten Band der auf drei Bände berechneten Werke von Ulisse Dini. Er enthält ein Bildnis von Dini, ein Vorwort von G. Sansone, den Nachruf L. Bianchis auf Dini, ein vollständiges Schriftenverzeichnis und ein Verzeichnis der Nachrufe und Gedenkfeiern für Dini. Es folgen die beiden Hauptteile: I. *Lavori algebrici* (S. 18—192), II. *Produzione del Dini nei campi della geometria differenziale* (S. 193—694). Die „algebraischen“ Arbeiten, worunter sich die fundamentalen Abhandlungen über Reihen mit positiven Gliedern und über die Abschätzung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung sowie seine Vorlesungen über allgemeine Reihenlehre befinden, sind von Michele Cipolla herausgegeben und eingeleitet. Die differentialgeometrischen Arbeiten, die die erste Periode der wissenschaftlichen Tätigkeit Dinis kennzeichnen und bedeutende Beiträge zur klassischen Differentialgeometrie der Flächen und der auf ihnen gezogenen Kurven gebracht haben, sind von Enea Bortolotti herausgegeben und mit einer umfassenden, mit historischen Hinweisen und Literaturverweisen versehenen Einführung in die geometrischen Arbeiten von Dini ausgestattet worden. Eine schöne, in jeder Beziehung vorbildliche Ausgabe; Herausgeberin und Verlag verdienen in gleicher Weise hohe Anerkennung.

O. Volk.



## Geschichte.

● **Sercescu, Pierre:** Histoire du nombre. Conférence faite au Palais de la Découverte, le 15 janvier 1949. Paris: Conférences du Palais de la Découverte, Série D, Nr. 23. Université de Paris. 44 p.

P. Sercescu und R. Tatton haben in der „Galerie d'Histoire des Sciences“ in Paris eine Abteilung für Geschichte der Mathematik eingerichtet. Die vier Sektionen dieser Sammlung: „Histoire du nombre“, über die Verf. einen Überblick gibt [1. die ganze Zahl, 2. Entwicklung des Rechnens, 3. Erweiterung des Zahlbegriffs, 4. die mathematische Durchdringung der Wissenschaft] sind im Museumsraum um einen Gobelin aus Cluny gruppiert, der die Rechenmethoden des 16. Jhdts. darstellt.

K. Vogel.

**Schaumberger, J.:** Zippu-Gestirne nach neuen Keilschrifttexten. Z. Assyriologie, n. F. 16 (50), 224—229 (1953).

Bei der Behandlung zweier neuer Listen von „Kulminations“-Gestirnen untersucht der Verf. die zur Bestimmung von Sternabständen (Differenz ihrer Rektascensionen) verwendeten astronomischen Maße sowie deren Beziehung zu den „irdischen“ Maßen.

K. Vogel.

**Falkenstein, Adam:** Die babylonische Schule. Saeculum 4, Heft 2, 125—137 (1953).

In einem sumerischen Lehrgedicht, das einzigartige Aufschlüsse über den babylonischen Schulbetrieb um 2000 v. Chr. gibt, wird von der Mathematik folgendes gesagt: „du lehrst ihn (den Schüler) die Feinheiten der Rechentafeln, des Rechnens und Abrechnens. Lösungen erklärst du ihm, der Divisionen (?) verschleierte Fragen läßt du ihm aufgehen“. Von den Schwierigkeiten in der Mathematik spricht auch eine Inschrift, die von der Schulausbildung des Assyrikerkönigs Assurbanipal (668—626) Nachricht gibt: „ich löse komplizierteste Multiplikations- und Divisionsaufgaben, die sich nicht durchschauen lassen“.

K. Vogel.

**Waerden, Bartel L. van der:** Die Bewegung der Sonne nach griechischen und indischen Tafeln. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1952, 219—232 (1953).

Zwei von O. Neugebauer ans Licht gezogene Sonnentafeln [Centaurus 1, 266—270 (1951); dies. Zbl. 47, 3] erweisen sich als nach trigonometrischen Methoden berechnet. Die griechische Tafel (aus einem astrologischen Text) beruht auf dem Hipparchischen Exzentermodell mit dessen Zahlenwerten [Exzentrizität  $1/24$ ; Länge des Apogäums  $65^\circ 30'$  (Text versehentlich  $65^\circ 38'$ )]. — Der indischen (mündlich bei den Tamils überlieferten) Tafel liegt, wie der Verf. durch harmonische Analyse ermittelt, höchstwahrscheinlich das Modell eines Konzenters mit Ausgleichspunkt zugrunde. Der Ausgleichspunkt hat die Länge  $78^\circ$ ; sein Abstand von der Erde besitzt den Wert 0,037588, wenn der Radius des Konzenters gleich eins gesetzt wird. Die Tafelwerte sind durchschnittlich bis auf eine Bogensekunde genau gerechnet. — Man erhält so einen neuen Einblick in die Methoden der sonst nur aus wenigen Papyri bekannten vorptolemäischen hellenistischen Astronomie.

H. I. Hermelink.

**Rodríguez S. J., Alberto:** Das Problem der Verdopplung des Würfels. Revista Mat. element. 2, 8—12 (1953) [Spanisch].

Verf. erwähnt den Ansatz des Hippokrates von Chios ( $a:x = x:y = y:b$ ) und behandelt ausführlich die räumliche Lösung des Archytas von Tarent (nicht 440/380, sondern 428/365 und auch nicht „Schüler von Platon“).

J. E. Hofmann.

**Walcher Casotti, Maria:** Iacopo Barozzi da Vignola nella storia della prospettiva. Periodico Mat., IV. Ser. 31, 73—103 (1953).

Sorgfältige Darstellung von Vorgeschichte und Inhalt der „Praktischen Per-



spektive“ (Hauptteil verf. um 1530, Druck ed. E. Danti, 1583) mit wertvollen Literaturangaben.

*J. E. Hofmann.*

**Prociissi, Angiolo:** Su l'inviluppo delle parabole in Torricelli e sulla nozione di inviluppo di una famiglia di curve piane. *Periodico Mat.*, IV. Ser. 31, 34—43 (1953).

Verf. gibt einen ideentreuen Bericht über das wesentliche der „De motu gravium naturaliter descentium et projectorum“ (1641), worin die Einhüllende der durch feste Anfangsgeschwindigkeit gekennzeichnete Wurfparabeln aus einem festen Punkt elegant bestimmt wird. Die vom Verf. erwähnte Behauptung von E. Bortolotti [Gli inviluppi di linee curve ed i primordi del metodo inverso delle tangenti, *Periodico Mat.*, IV. Ser. 1, 263—276 (1921), insbes. S. 266], Leibniz sei beim Aufbau der allgemeinen Lehre von den Einhüllenden (1692) durch Torricelli beeinflusst, ist aus den erhaltenen Aufzeichnungen von Leibniz nicht zu erhärten.

*J. E. Hofmann.*

**Natucci, Alpinolo:** La teoria delle proporzioni nel rinascimento italiano. *Atti IV. Congr. Un. mat. Ital.* 2, 646—662 (1953).

Verf. analysiert einschlägige Abhandlungen von Galilei (ed. Viviani 1674), Torricelli (Opere I, 1919), Viviani (1674, 2. ed. 1690) und Borelli (1658). Sie zeigen, daß diese Autoren trotz intensiven Ringens um den Sachverhalt des Wesen der Verhältnislehre von Eudoxos-Euklid (Elem. V) doch nicht ganz erfaßt haben und insbesondere beim Versuch vereinfachter Darstellung scheiterten.

*J. E. Hofmann.*

**Conte, Luigi:** Huygens e l'invenzione di due medie proporzionali. *Periodico Mat.*, IV. Ser. 31, 145—157 (1953).

Verf. führt die von Huygens im Anhang zu den „De circuli magnitudine inventa“ (1654) gegebenen bewegungsgeometrischen Einschaltungen von zwei geometrischen Mitteln vor. Er berichtet über die Beziehung zu den Vorlagen bei Archimedes und Pappos und gibt eine plausible Erklärung für Huygens' Entdeckung. Ref. verweist zusätzlich auf Viètes „Supplementum geometricum“ (1593), das Huygens aus der Ausgabe seines Lehrers Schooten (1646) gekannt haben dürfte.

*J. E. Hofmann.*

**Schneider, Heinrich:** An unpublished letter concerning Leibniz. *Isis* 44, 266—272 (1953).

Es handelt sich um einen in Kopenhagen aufgefundenen Brief (in Deutsch) des Winsener Rektors J. Hodann (1674/1745?) vom 18. 12. 1734, vermutlich an J. N. Froese (1701/56) gerichtet, der damals eine Leibniz-Ausgabe plante. Hodann beantwortet Fragen über Leibniz-Korrespondenzen, berichtet über seine von Leibniz veranlaßten, jedoch seiner Meinung nach unfruchtbaren Vorarbeiten für die „characteristica universalis“ und über Leibniz' Stellung zur evangelischen Kirche. Er verneint ausdrücklich, daß Leibniz einen natürlichen Sohn gehabt habe. Voraus geht eine treffliche literarische Einführung.

*J. E. Hofmann.*

**Tenca, Luigi:** Particolari campi a tre dimensioni cubalisi esattamente limitati da superfici curve. *Boll. Un. mat. Ital.*, III. Ser. 8, 337—342 (1953).

Verf. behandelt die wichtigsten Integraleigenschaften der nach Pappos (Collectiones IV, 30) benannten Kugelspirale, deren senkrechte Projektion auf die Äquatorebene eine Archimedische Spirale ist. Er verweist auf die Behandlung und Weiterführung bei Viviani (1692) und Grandi (1728) und gibt hübsche moderne Zusätze.

*J. E. Hofmann.*

**Dugas, René:** Huygens devant le système du monde, entre Descartes et Newton. *C. r. Acad. Sci.*, Paris 237, 1477—1478 (1953).

Gestützt auf die Œuvres XXI, den Haag 1944 berichtet Verf. über Huygens' schwankende Ansichten hinsichtlich der elliptischen Planetenbahnen, herrührend von seiner Hinneigung zu den Descartesschen Wirbeln, und über den Einfluß Newtons,



der im „Discours de la cause de la pesanteur“ (1690) seinen interessanten Niederschlag findet.

*J. E. Hofmann.*

**Svešnikov, A. G.:** Über eine Arbeit M. V. Ostrogradskijs. *Uspechi mat. Nauk* 8, Nr. 1 (53), 101—102 (1953) [Russisch].

**Steklov, V. A.:** Aus einer Rede zu der Feier des hundertsten Geburtstages M. V. Ostrogradskijs, die von dem Poltavaer Kreis der Liebhaber der Mathematik veranstaltet worden ist. *Uspechi mat. Nauk* 8, Nr. 1 (53), 102—103 (1953) [Russisch].

**Ostrogradskij, M. V.:** Eine Bemerkung zur Wärmelehre. (Vorgelegt in der Sitzung der Akademie vom 5. November 1828.) *Uspechi mat. Nauk* 8, Nr. 1 (53), 103—110 (1953) [Russisch].

Russische Übersetzung einer Note von M. V. Ostrogradskij aus dem Jahre 1828, in welcher gelegentlich der Untersuchung des Problems der Abkühlung eines festen Körpers von willkürlicher Gestalt die Wege zur Lösung einer Reihe allgemeiner Probleme der Analysis umrissen werden. — Dies — zusammen mit historischen Bemerkungen — wird in der Note von A. G. Svešnikov und der Rede von V. A. Steklov näher ausgeführt.

*Otto Haupt.*

**Lorey, Wilhelm:** Karl Friedrich Gauß. Zur 175. Wiederkehr seines Geburtstages. *Math.-phys. Semesterber.* 3, 179—192 (1953).

**Blenk, Hermann:** Ludwig Prandtl †. *Z. Flugwiss.* 1, 49—51 (1953).

## Grundlagenfragen. Philosophie. Logik.

● **Reidemeister, Kurt:** Geist und Wirklichkeit. — Kritische Essays. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1953. III, 92 S. DM 8,60.

Das Philosophieren im Sinne des Verf. ist „nicht die Aufgabe eines Faches; denn der Appell zur Besinnung, den die Philosophie erhebt, richtet sich an jedermann“. Also Verzicht auf eine Fachsprache für die Meditationen, die hier zusammengedrückt sind. Sie sind aufgegliedert in zwei Hauptgruppen: eine freie (wenn die Bezeichnung erlaubt ist) mit der Aufschrift „Essays“ und eine durch eine Zielsetzung gesteuerte, mit der Aufschrift „Prolegomena einer kritischen Philosophie“. In der freien Gruppe ist abgrenzbar eine Folge von metamathematischen Meditationen (metamathematisch im weitesten Sinne: Die Unverständlichkeit der Mathematik, Vom Sinn der Zeichen, Anschauung als Erkenntnisquelle, Raum und Erfahrung), sodann eine Mannigfaltigkeit von monadologischen Einzelstudien (Mensch und Wirklichkeit, Appell im Elend, Die gnostische Umwälzung, Der Narr als Karikatur der Vernunft, Über Formenschönheit). Zur Begründung der Geometrie wird die kombinatorische Topologie als das geeignetste Mittel empfohlen. Zur Kritik der Anschauung als Erkenntnisquelle werden Dürers tiefliegende Einsichten herangezogen. An einer späteren Stelle werden zu demselben Thema Novalis und Hamann als zwei denkwürdige Formalisten hervorgehoben. Das Thema der zweiten Hauptgruppe ist eine Überprüfung der intuitiven Methode einer Philosophie, die sich ihrem tieferen Ziel zu Liebe aus der Enge der Wissenschaftlichkeit glaubt befreien zu dürfen. Aber der Verf. spricht seine eigene Sprache, und mit einer ihm eigenen Idee eines planmäßig vorschreitenden Gedankenganges. Er möge daher sich selbst interpretieren, damit ihm nichts Falsches angehängt wird. Vorangestellt wird eine einfache strenge Form des intuitiven Denkens und Erkennens, das aufweisende Denken und Erkennen. Mit Hilfe der Metamathematik werden die exakten Aussagen über Naturgesetze in aufweisbare Aussagen über die Struktur vorfindlicher Vorgänge in der Welt verwandelt. „Dadurch entfällt die Berechtigung, sich der Verbindlichkeit dieser so abgeklärten Aussagen im Bereich eines intuitiven Erkennens zu entziehen. Dann wenden wir uns der Ergänzung des aufweisbar Wirklichen durch Wahrnehmung und Anschauung zu und retten das erscheinende Schöne und die vernünftige schlichte Erfahrung von Menschen unter Menschen aus dem Zugriff des Tief- und Starrsinns in die Schutzmauer des von uns begründeten Nichtwissens. Wir verstehen dabei, wieso spekulative Behauptungen Gewalttätigkeit sein können und finden unsere wissenschaftliche Kritik an der Spekulation durch das Gefühl bestätigt, daß sich uns dabei ein reineres Verständnis für die Freiheit des Geistes eröffnet hat.“ — Zusammenfassend möchte ich sagen: Was dem Verf. vorschwebt, ist ein Philosophieren, das weder gewillt ist, sich in Ansehung seiner Fragestellungen von den Dogmen des logischen Positivismus einschüchtern zu lassen, noch gewillt, sich von den Existenzphilosophen sagen zu lassen, daß es letzte Fragen gibt, die nur dann diskutiert werden können, wenn man den Mut hat, der Logik den Laufpaß zu geben.

*H. Scholz.*

**Rabbeno, Giorgio:** Elementi di epistemologia matematica e fisica. *Ann. Triestini*, Sez. II. 22-23, 5—41 (1953).



• **Langer, Susanne K.:** An introduction to symbolic logic. 2. revised ed. New York: Dover Publications, Inc. 1953. 367 p. Cloth \$ 3,50; paper \$ 1,60.

**Wang, Shih-Chiang:** An axiom system for the propositional calculus. J. Chinese math. Soc. 2, 267—272 u. engl. Zusammenfassg. 273—274 (1953) [Chinesisch].

The present note gives a reduction to E. Götlind's axiom system for the propositional calculus: (1)  $p \vee p \supset p$ , (2)  $p \supset p \vee q$ , (3)  $p \supset p$ , (4)  $(p \supset r) \supset (q \vee p \supset r \vee q)$ , which he showed (this Zbl. 30, 193) to be sufficient but with the independence problem left open. In I. it is shown that (3) is a consequence of (1), (2), and (4) (using  $\sim$  and  $\vee$  as primitive junction symbols) and hence is superfluous. In II. a proof of the mutual independence of (1), (2), and (4) is appended; the proof of their sufficiency is easy; hence (1), (2), and (4) constitute a new axiom system for the propositional calculus. Finally, comparison of the new system with Hilbert's axiom system suggests a frequently occurring phenomenon, namely, the omission of the commutative laws (or symmetric laws) contained in an axiom system can frequently be effected as a result of suitably permuting the variables contained in other axioms of the system. As another (new) example of this phenomenon is given (without proof) the following result, which is a solution to Problem 64 in G. Birkhoff's Lattice Theory (rev. ed. New York 1949, p. 138; this Zbl. 33, 101): Birkhoff's axioms on the ternary operation  $(a b c)$  for defining a distributive lattice with  $O, I$ : (14)  $(O a I) = a$ , (15)  $(a b a) = a$ , (16)  $(a b c) = (b a c) = (b c a)$ , and (17)  $((a b c) d e) = ((a d e) b (c d e))$  [see p. 137 of his book], in which (16) is a commutative law, are equivalent to the following (mutually independent) ones: (14), (15), and (17')  $(d(a b c) e) = ((e b d)(d a e) c)$ . Autoreferat.

**Hasenjaeger, G.:** Eine Bemerkung zu Henkin's Beweis für die Vollständigkeit des Prädikatenkalküls der ersten Stufe. J. symbolic Logic 18, 42—48 (1953).

Eine widerspruchsfreie Menge  $A$  von geschlossenen Formeln wird unter Verwendung neuer Konstanten  $u_1, u_2, \dots$  ergänzt durch Formeln  $(\exists x) A_i(x) \supset A_i(u_i)$ , so daß zu jeder Existenzaussage  $(\exists x) A(x)$  eine Beispielaussage  $A(u)$  vorhanden ist. Eine maximale widerspruchsfreie Erweiterung  $\Gamma^*$  dieser Formelmenge liefert ein Modell, mit dem sich der Vollständigkeitsbeweis nach Henkin führen läßt (vgl. dies. Zbl. 34, 6). Für dieses Modell, das wesentlich einfacher als das von Henkin ist, wird gezeigt: Ist die Zugehörigkeit einer Formel zu  $A$  entscheidbar, so werden bei einer Arithmetisierung des Kalküls die Nummern der Formeln aus  $\Gamma^*$  zugleich durch Formeln  $(\exists x) (y) \mathfrak{A}(a, x, y)$  und  $(x) (\exists y) \mathfrak{B}(a, x, y)$  mit rekursiven  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  bestimmt. D. h. in der Terminologie von Mostowski (dies. Zbl. 31, 194), daß  $\Gamma^*$  zur projektiven Klasse  $P_2 \cap Q_2$  gehört, falls  $A$  zu  $P_0$  gehört. Auch die Belegungsrelationen des Modells gehören zu  $P_2 \cap Q_2$ . Dasselbe ergibt sich durch eine zusätzliche Betrachtung für den Kalkül mit Identität. Ersetzt man die Entscheidbarkeit von  $A$  durch die allgemeinere Forderung, daß  $A$  zu  $P_{k+1}$  oder zu  $Q_k$  gehört, so erhält man für das Modell die projektive Klasse  $P_{k+2} \cap Q_{k+2}$ . Kurt Schütte.

**Wang, Hao:** Certain predicates defined by induction schemata. J. symbolic Logic 18, 49—59 (1953).

In einem formalen System der Zahlentheorie lassen sich bekanntlich gewisse explizit undefinierbare Prädikate induktiv definieren, z. B. das Prädikat  $M(n, k)$  von Hilbert und Bernays [Grundlagen der Mathematik II, Berlin 1939 (dies. Zbl. 20, 193), S. 337], das eine Wahrheitsdefinition für das System  $Z$  liefert. Verf. gibt umfassendere Systeme  $L_1, L_2$  an, in denen sich jedes induktiv definierte zahlentheoretische Prädikat  $P(n, m)$  durch ein explizit definiertes Prädikat  $Q_m(n)$  ersetzen läßt.  $L_1, L_2$  entstehen aus dem zahlentheoretischen System durch Hinzufügung von Klassenvariablen mit der zugehörigen Quantentheorie, einem Induktionsaxiom, einem Gleichheitsaxiom und dem Existenzaxiom  $(\exists Y) (m) (m \eta Y \equiv p)$ , das in  $L_1$  für alle Aussagen  $p$  von  $L_1$ , in  $L_2$  aber nur für alle Aussagen  $p$ , die keine Klassenvariablen enthalten, gefordert wird. Demgemäß treten in  $L_1$  imprädikative Klassen auf, aber nicht notwendig in  $L_2$ . Die Äquivalenz  $P(n, m) \equiv Q_m(n)$  ist in  $L_1$  allgemein beweisbar, in  $L_2$  nur für feste Zahlenargumente. Entsprechendes wie für  $L_1$  bzw.  $L_2$  gilt für gewisse mengentheoretische Systeme  $L_3$  (nach Quine) bzw.  $L_4, L_5$  (nach Bernays). In  $L_1, L_3$  lassen sich Widerspruchsfreiheitsbeweise der Zahlentheorie darstellen. In den schwächeren Systemen  $L_2, L_4, L_5$  gibt es noch eine adäquate Wahrheitsdefinition der Zahlentheorie. Um hiermit einen Widerspruchsfreiheitsbeweis der Zahlentheorie zu formalisieren, braucht man nur einige Spezialfälle der Axiome von  $L_1$  zu  $L_2, L_4$  bzw.  $L_5$  hinzuzunehmen. Ähnliches ergibt sich, wenn man statt von der formalisierten Zahlentheorie von einem anderen System ausgeht, z. B. von einem Teil des Zermelo-Systems der Mengenlehre. Kurt Schütte.



Beth, E. W.: Some consequences of the theorem of Löwenheim-Skolem-Gödel-Malev. *Indagationes math.* 15, 66—71 (1953) = *Nederl. Akad. Wet., Proc. Ser. A* 56, 66—71 (1953).

Verf. zieht Folgerungen aus der von ihm in einer vorangehenden Arbeit (dies. Zbl. 44, 2) (mit Hilfe des Auswahlaxioms) verallgemeinerten Formulierung des Theorems von Löwenheim und Skolem, und gibt eine Korrektur zur genannten Arbeit. (1)  $\alpha$  sei ein vollständiges und widerspruchsfreies System des Prädikatenkalküls der ersten Stufe mit Identität (IK). Ist  $M$  ein Modell von  $\alpha$ , und  $b$  eine Menge von Ausdrücken des IK, die neben den in  $\alpha$  vorkommenden freien Variablen als zusätzliche freie Variable höchstens eine Individuenvariable  $x$  enthalten, so sei  $M(b)$  die Menge der Elemente von  $M$ , die  $b$  erfüllen. Es gibt ein Modell  $M_0$  von  $\alpha$ , so daß für jedes  $b$  gilt: Wenn  $M_0(b)$  leer ist, so ist auch  $M(b)$  leer für jedes Modell  $M$  von  $\alpha$ . (2)  $R$  sei eine zweistellige Relation in einer Menge  $M$ , und  $p$  eine feste natürliche Zahl. Jede endliche Teilmenge  $M'$  von  $M$  besitze eine Zerlegung in Mengen  $M'_1, \dots, M'_p$ , so daß für jedes  $k = 1, \dots, p$  je zwei Elemente von  $M'_k$  in der  $R$ -Beziehung stehen. Dann gibt es eine entsprechende Zerlegung  $M_1, \dots, M_p$  von  $M$ . (3)  $R$  sei eine zweistellige Relation in der Menge  $M$  und  $\alpha$  eine Menge von abgeschlossenen Ausdrücken des IK, die als einzige Prädikatenvariable eine zweistellige Prädikatenvariable enthalten, und als einzige Quantoren All-Operatoren, die zudem pränex auftreten. Eine Teilmenge  $C$  von  $M$  heiße eine  $(R, \alpha)$ -Kette in  $M$ , wenn unter Zugrundelegung des Individuenbereiches  $C$  die auf  $C$  beschränkte Relation  $R$  ein Modell von  $\alpha$  ist. Dann ist jede  $(R, \alpha)$ -Kette in eine maximale  $(R, \alpha)$ -Kette einbettbar. Als Anwendungen ergeben sich verschiedene Lemmata, die zum Auswahlaxiom äquivalent sind. H. Hermes.

Cohen, Kalman Joseph: A remark on Łukasiewicz's „On the intuitionistic theory of deduction“. *Indagationes math.* 16, 111—112 = *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* 56, 111—112 (1953).

Łukasiewicz, Jan: Comment on K. J. Cohen's remark. *Indagationes math.* 15, 113 = *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* 56, 113 (1953).

$C, K, A$  seien Symbole für „wenn-so“, „und“, „oder“ im Sinn des klassischen Aussagenkalküls,  $F, T, O$  Symbole für die intuitionistischen Verschärfungen dieser drei Verknüpfungen im Sinn von J. Łukasiewicz, dies. Zbl. 48, 4. Ł. hat als ein Hauptresultat das Theorem formuliert, das besagt, daß alle Thesen in  $F, T, O$  erhalten bleiben, wenn diese Symbole ersetzt werden durch  $C, K, A$ ; aber nicht umgekehrt. Cohen zeigt, daß das Erhaltungstheorem für eine partielle Ersetzung nicht mehr gilt. Dies ist ein Beitrag zur Nicht-Umkehrbarkeit, für welchen Ł. mit Recht bemerkt, daß er selbst schon ein wesentlich einfacheres Beispiel hierfür geliefert hat. H. Scholz.

Kreisel, G.: The diagonal method in formalized arithmetic. *British J. philos. Sci.* 3, 364—374 (1952/3).

## Algebra und Zahlentheorie.

● Klein, Felix: *Elementary mathematics from an advanced standpoint. Vol. I: Arithmetic, Algebra, Analysis.* (Translated from the 3rd German ed. by E. R. Hedrick and C. A. Noble.) New York: Dover Publications, Inc., 1953. IX, 274 p. and 125 figs. \$ 1,50, cloth \$ 3,25.

● Kraitichik, Maurice: *La mathématique des jeux ou récréations mathématiques.* 2. éd. entièrement remaniée. Bruxelles: Éditions techniques et scientifiques; Paris: Gauthier-Villars 1953. 333 p., 181 fig. frs belges 225.

Vgl. die Besprech. der Übersetzung dies. Zbl. 50, 9.

Kraitichik, M.: *Récréations mathématiques.* *Mathesis* 62, 130—133 (1953).

Thébault, Victor: *Curiosités arithmétiques.* *Mathesis* 62, 120—129 (1953).

● Schubert, H.: *Mathematische Mußstunden.* 11. Aufl.; durchgesehen von F. Fitting. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1953. 271 S. DM. 7.20.

● Lietzmann, W.: *Wo steckt der Fehler?* 3. Aufl. Stuttgart: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1953. 185 S. DM 5,80.

Ricci, Gilberto: *Nuovo metodo per le ricerche cronologiche dei calendari.* *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser.* 14, 50—56 (1953).



Costa Aliaga, C. A.: The cyclic number 142857. Scripta math. 19, 181—184 (1953).

Uhler, Horace S.: Exact location of the 10<sup>m</sup>th digit in the consecutively written sequence of the natural numbers 1, 2, 3, 4, . . . Scripta math. 19, 201—204 (1953).

Whitlock jr., W. P.: Nests of Pythagorean triangles. Scripta math. 19, 66—68 (1953).

Freedman, Benedict: On a symmetric homogeneous sum. Scripta math. 19, 185—188 (1953).

Carlitz, L.: Some sums containing Bernoulli functions. Amer. math. Monthly 60, 475—476 (1953).

Carlitz, L.: Note on some formulas of Rodeja F. Proc. Amer. math. Soc. 4, 528—529 (1953).

Bemerkung, daß eine Formel von Rodeja F. (dies. Zbl. 42, 248) nach leichter Umformung als Spezialfall in der Newtonschen Interpolationsformel enthalten ist.  
G. af Hällström.

Paasche, Ivan: Ein neuer Beweis des Moessnerschen Satzes. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1952, 1—5 (1953).

Il s'agit du récent théorème de Moessner (ce Zbl. 47, 16). Par l'emploi de fonctions génératrices l'A. donne une nouvelle preuve du théorème, qui s'adapte d'ailleurs presque mot à mot à certaines généralisations du même théorème.

S. Bays.

Salié, Hans: Bemerkung zu einem Satz von A. Moessner. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1952, 7—11 (1953).

L'A. donne d'abord l'énoncé général suivant du théorème de Moessner (ce Zbl. 47, 16). Dans la suite indéfinie de nombres quelconques  $(a)$ :  $a_1, a_2, a_3, \dots$  on supprime chaque  $k^{\text{ième}}$  terme,  $k \geq 2$ ; on forme la suite des sommes partielles de la série restante. Dans cette suite on supprime chaque  $(k-1)^{\text{ième}}$  terme; on forme à nouveau la suite des sommes partielles de la série restante, et ainsi de suite. Soit la  $k^{\text{ième}}$  suite obtenue de cette manière  $(a^{(k)})$ :  $a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, a_3^{(k)}, \dots$ . Lorsque la suite  $(a)$  est celle des entiers naturels 1, 2, 3, . . . ,  $(a^{(k)})$  est la suite  $1^k, 2^k, 3^k, \dots$ ; c'est le théorème de Moessner. Si les  $a_i$  sont des variables, les  $a_n^{(k)}$  sont évidemment des polynomes linéaires de ces variables. L'A. établit le résultat:

$$a_n^{(k)} = \sum_{q=0}^{n-1} \sum_{v=1}^{k-1} a_{qk+v} (n-q)^{k-v-1} (n-q-1)^{v-1}, \quad k \geq 2, \quad n = 1, 2, \dots$$

d'où la preuve du théorème de Moessner découle sans autre par la spécialisation:  $a_n = 1$  ou 0 selon que  $n = 1$  ou  $> 1$ .

S. Bays.

Mahler, K. und J. Popken: Über ein Maximumproblem aus der Arithmetik. Nieuw Arch. Wiskunde, III. R. 1, 1—15 (1953) [Holländisch].

Es sei  $x$  eine positive und  $n$  eine natürliche Zahl. Wenden wir nun auf die  $n$  Buchstaben  $x$  die Operation der Addition und Multiplikation auf alle möglichen Arten  $n-1$  mal an, so sei die so entstehende Menge von Zahlen  $V_n(x)$ ; also  $V_1$  besteht aus  $x$ ,  $V_2$  aus  $x+x$ ,  $x \cdot x$  usw. Allgemein besteht  $V_n$  für  $n \geq 2$  aus allen Zahlen der Gestalt  $X_v + X_{n-v}$  und  $X_v X_{n-v}$ , wo  $X_v$  alle Elemente von  $V_v$ ,  $X_{n-v}$  alle Elemente aus  $V_{n-v}$  und  $v$  die Zahlen 1, 2, . . . ,  $n-1$  durchläuft. Es wird nun das größte Element  $M_n(x)$  aus  $V_n$  untersucht. Klar ist, daß die Rekursionsformel (1)  $M_n = \max_{1 \leq v \leq n-1} (M_v + M_{n-v}, M_v M_{n-v})$  besteht ( $M_1 = x$ ). Durch voll-

ständige Induktion wird gezeigt, daß  $M_{n+1} - 2 M_n + M_{n-1} \geq 0$  ist. Daraus folgt, daß die Folge  $M_n - M_{n-1}$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) monoton wachsend ist. Es wird folgende explizite Darstellung für  $M_n(x)$  gegeben:  $M_n(x) = \max_{1 \leq v \leq n} p_{nv} x^v$ , wo  $p_{nv} = h^{v-r}$

$\cdot (h+1)^r$ ,  $h = \left[ \frac{n}{v} \right]$ ,  $r = n - v \left[ \frac{n}{v} \right]$ . Es wird gezeigt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M_n(x)} = \theta(x) =$



$\max (k x)^{1/k}$  (über alle natürlichen Zahlen  $k$ ), also ist  $\theta(x) = (k x)^{1/k}$ , wenn  $x_k \leq x \leq x_{k-1}$  ( $x_k = k^{-1} (1 + 1/k)^k$ ). Den Abschluß der Arbeit bildet eine interessante Untersuchung der Kurve  $y = M_n(x)$  und eine weitere Darstellung für  $M_n(x)$ .  
E. Hlawka.

### Lineare Algebra. Polynome:

Stojaković, Mirko: Quelques applications des déterminants rectangulaires aux produits intérieurs et extérieurs des matrices. C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 688—690 (1953).

Verf. definiert das (kommutative aber im allgemeinen nicht distributive) „innere“ Produkt der  $(l_1 \times k)$ -Matrix  $A$  mit der  $(l_2 \times k)$ -Matrix  $B$  durch  $\langle A, B \rangle = \det(A B')$ , worin  $B'$  die Transponierte von  $B$  bedeutet, und die „Norm“ von  $A$  durch  $N(A) = \langle A, A \rangle$ . Als Anwendung ergibt sich für den Winkel zweier Geraden und den Winkel zweier Ebenen dieselbe Formel  $N^{1/2}(A) N^{1/2}(B) \cos \varphi = \langle A, B \rangle$ , wobei die Zeilen der Matrizen  $A, B$  aus den Komponenten der beiden Vektoren bzw. Vektorenpaare gebildet sind, welche die Richtungen der Geraden bzw. die Stellungen der Ebenen im Raum bestimmen. — Unter Verwendung der früher (dies. Zbl. **47**, 20; **50**, 10) von ihm eingeführten „Determinante“ einer rechteckigen Matrix definiert Verf. ferner als „äußeres“ Produkt von  $l \leq k-1$  Vektoren  $a_v = \sum_i a_{vi} e_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ;

$v = 1, \dots, l$ ) den Vektor  $b_0 = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_l = \sum_i e_i \det A_i$ ; die Matrix  $A_i$  entsteht dabei

aus der Komponentenmatrix der Vektoren  $a_v$  dadurch, daß man die vor der  $i$ -ten Spalte stehenden Elemente mit Minuszeichen versieht und die  $i$ -te Spalte löscht. Dieses Produkt ist distributiv und wechselt bei Vertauschung von zwei Faktoren das Vorzeichen. In Verallgemeinerung bekannter Formeln ( $k = 3, l = 2$ ) kann man dann auch schreiben:

$$b_0 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_k \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{lk} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \langle a_0, b_0 \rangle = \begin{vmatrix} a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0k} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{lk} \end{vmatrix}.$$

E. Schönhardt.

Collatz, Lothar: Einschließungssätze für Produkte von Eigenwerten. Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden **2**, 343—346 (1953).

Verf. beweist zwei beim Iterationsverfahren verwendbare Einschließungsaussagen für  $\lambda_i \lambda_j$ , worin  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  die Eigenwerte einer hermiteschen Eigenwertaufgabe bedeuten. Formal entstehen diese Aussagen aus bekannten Einschließungen der  $\lambda_i$  durch die Momente  $m_k = (f, A^k f)$ , indem man  $\lambda_i$  durch  $\lambda_i \lambda_j$  und  $m_k$  durch die mit Hilfe von zwei linear unabhängigen Ausgangsfunktionen  $f, g$  zu bildende Determinante

$$d_k = \begin{vmatrix} (f, A^k f) & (f, A^k g) \\ (g, A^k f) & (g, A^k g) \end{vmatrix}$$

ersetzt. Die Beweise verlaufen parallel zu den alten. (Bem. des Ref.: Die neuen Sätze können auch als Spezialfälle der alten angesehen werden, nämlich vermöge der bekannten Tensortransformation, die eine Matrix  $A$  in die Matrix der zweireihigen Unterdeterminanten von  $A$  überführt.) Die Darstellung des Verf. umgeht den Begriff des Operators, indem sie zwei Skalarprodukte als gegeben annimmt (eins davon definit); die Eigenwertaufgabe wird in der Form  $\langle u, f \rangle = \lambda (u, f)$ , für alle  $f$ , angeschrieben; die Gültigkeit eines Entwicklungssatzes wird vorausgesetzt.

H. Wielandt.

Motzkin, T. S. and Olga Taussky: Pairs of matrices with property L. Proc. nat. Acad. Sci. USA **39**, 961—963 (1953).

Die Verff. betrachten ein Büschel  $\lambda A + \mu B$  von komplexen  $n \times n$ -Matrizen. Sie sprechen bemerkenswerte Sätze aus, welche aus Voraussetzungen über die im Büschel vorhandenen Matrizen mit mehrfachen Eigenwerten auf einen Zerfall der „charakteristischen Kurve“  $|\lambda A + \mu B - \nu I| = 0$  in Geraden oder sogar auf Vertauschbarkeit von  $A$  und  $B$  schließen. Sind z. B. alle Matrizen des Büschels ähnlich zu Diagonalmatrizen, so ist  $AB = BA$ . Die (algebraisch-geometrische) Beweismethode wird angedeutet.

H. Wielandt.



**Debreu, Gerard and I. N. Herstein:** Nonnegative square matrices. *Econometrica* **21**, 597—607 (1953).

Übersichtliche Herleitung der wichtigsten Eigenschaften der quadratischen Matrizen  $A$  mit nicht negativen Elementen [Eigenwerte, Eigenvektoren, Vorzeichen der Elemente von  $(\lambda I - A)^{-1}$ , Existenz von  $\lim A^n$ ]. Zerlegbare  $A$  werden auf unzerlegbare zurückgeführt; im Fall der Unzerlegbarkeit werden die vom Ref. gegebenen Beweise (dies. Zbl. **35**, 291) z. T. noch verkürzt.

*H. Wielandt.*

**Carlitz, L.:** A note on orthogonal matrices. *Amer. math. Monthly* **60**, 253—255 (1953).

Man findet einige orthogonale  $p \times p$  Matrizen  $A$  ( $AA' = E$ ), deren Elemente Polynome aus  $GF[p, x]$  sind. Hier bedeutet  $x$  eine oder mehrere Unbestimmte. Inzwischen hat der Ref. solche orthogonalen Matrizen gefunden, deren Grad nur 3 beträgt (erscheint demnächst im *Duke math. J.*).

*J. L. Brenner.*

**Hoffman, A. J. and H. W. Wielandt:** The variation of the spectrum of a normal matrix. *Duke math. J.* **20**, 37—39 (1953).

In dieser Note wird der folgende Satz bewiesen: Es seien  $A, B$  normale Matrizen mit den Eigenwerten  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  und  $\beta_1, \dots, \beta_n$ . Man kann die Eigenwerte so anordnen, daß  $\sum |\alpha_i - \beta_i|^2 \leq \|A - B\|^2$  ist. Dabei bedeutet  $\| \cdot \|$  die bekannte Frobeniussche Norm.

*K. Shoda.*

**Leavitt, W. G.:** Canonical forms for mappings of vector spaces. *Amer. math. Monthly* **60**, 75—79 (1953).

Betrachtet man eine Matrix als eine Abbildung eines Vektorraumes, so entspricht der ähnlichen Transformation der Matrix bekanntlich die Basistransformation des Raumes. In dieser Note sind die bekannten Normalformen der Matrizen nach dem eben erwähnten Prinzip wirklich konstruiert.

*K. Shoda.*

**Vajda, S.:** Theorems relating to quadratic forms and their discriminant matrices. *Proc. Edinburgh math. Soc., Ser. II* **10**, 13—15 (1953).

Im Hinblick auf Anwendungen in der Statistik wird gezeigt: Sei  $y$  eine Matrix vom Typus  $n \cdot 1$  (Spalte),  $c$  vom Typus  $m \cdot 1$ ,  $A$  vom Typus  $n \cdot m$  und vom Rang  $m$ ,  $B$  vom Typus  $m \cdot n$ , und es bezeichne  $I_n$  die  $n$ -reihige Einheitsmatrix. Setzt man  $c = By$  in  $(y - Ac)'(y - Ac)$  ein, so entsteht die quadratische Form  $y' M' M y$  mit  $M = I_n - AB$ . Dann gilt: Der Rang von  $M$  und damit auch von  $M' M$  kann nicht kleiner als  $n - m$  sein. Damit  $M$  genau den Rang  $n - m$  hat, ist notwendig und hinreichend  $I_m - BA = O$ . Notwendig und hinreichend dafür, daß  $M' M$  als charakteristische Wurzeln  $m$ -mal die Null und  $(n - m)$ -mal die Eins hat, ist:  $\text{Spur}(AB)'(BA) = m$  und  $I_m - BA = O$ . Für die Statistik folgt: Entstammen die  $y_i$  einer Gesamtheit mit Normalverteilung (Streuung gleich 1), dann gibt es nur eine Wahl von  $B$ , die auf eine quadratische Form führt, die eine Chi-Quadrat-Verteilung mit  $n - m$  Freiheitsgraden besitzt. Dies ist eine Verallgemeinerung früherer Ergebnisse des Verf. [*Suppl. J. roy. statist. Soc.* **9**, 141 (1947)].

*G. Schulz.*

**Gagliardo, Emilio:** Le funzioni simmetriche semplici delle radici  $n$ -esime primitive dell'unità. *Boll. Un. mat. Ital., III. Ser.* **8**, 269—273 (1953).

Es sei  $(n, k)$  der größte gemeinsame Teiler von  $n$  und  $k$  und  $n = n'(n, k)$ . Für die Summe  $S_k(n)$  der  $k$ -ten Potenzen der primitiven  $n$ -ten Einheitswurzeln erhält dann Verf., ausgehend von der Dedekindschen Darstellung von  $S_1(n)$ , die Formel:  $S_k(n) = \mu(n') \varphi(n) / \varphi(n')$ , worin  $\mu(x)$  die Möbiussche,  $\varphi(x)$  die Eulersche Funktion von  $x$  bedeutet. Speziell wird  $S_1(n) = \mu(n)$ , in Übereinstimmung mit einem Ergebnis von Kluver [*Verslag. Akad. Wet., Amsterdam* **15**, 423—429 (1906)].

*E. Schönhardt.*

**Sharma, Ambikeshwar:** The complex zeros of a polynomial. *Math. Student* **21**, 52—54 (1953).



**Mohr, Ernst:** Ein elementarer Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra im Reellen. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 34, 407—410 (1953).

This note contains an elementary proof of the fundamental theorem of algebra.

*E. Frank.*

**Parodi, Maurice:** Sur une propriété des polynomes récurrents. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 1304—1305 (1953).

Let  $P_n(x)$  be polynomials defined by the recurrence relation  $f_1(n+1)P_n(x) + [\Phi(n) - x]P_{n-1}(x) + f_2(n)P_{n-2}(x) = 0$ ,  $n \geq 1$ ,  $P_0 = 1$ ,  $P_{-1} = 0$ ,  $\Phi(k) \geq 0$  for every integer  $k$ . If  $f_1(k)$  and  $f_2(k)$  have the same signs for every integer  $k$ , the polynomials  $P_n(x)$  will have the same zeros as the polynomials  $Q_n(x)$  defined by the recurrence relation

$$|f_1(n+1)|Q_n(x) + [\Phi(n) - x]Q_{n-1}(x) + |f_2(n)|Q_{n-2}(x) = 0,$$

$n \geq 1$ ,  $Q_0 = 1$ ,  $Q_{-1} = 0$ . In particular, if  $\Phi(k) = 0$  for every  $k$ , this result reduces to the known property of the  $P_n(x)$  that all their non-zero zeros are symmetric with respect to the origin.

*E. Frank.*

**Colucci, Antonio:** Generale maggiorazione dei polinomi e delle derivate e una sua conseguenza. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 8, 258—260 (1953).

Einfacher Beweis der Abschätzung:  $|P_n^{(k)}(z)| \leq k! \binom{n}{k} |p_{n,n}| (|z| + \varrho)^{n-k}$ , wo  $P_n(z) = p_{n,n}z^n + \dots + p_{n,1}z + p_{n,0}$  ein Polynom ist, dessen Nullstellen absolut nicht größer sind als  $\varrho$  und  $k = 0, 1, \dots, n$  ist. Damit wird weiter gezeigt, daß die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(z)$  im Innern des Kreises vom Radius  $R - \varrho$  analytisch ist, wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n p_{n,n}|^{1/n} = R^{-1} < \varrho^{-1}$  ist.

*O. Volk.*

**Novoselov, V. S.:** Notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß die Wurzeln eines Polynoms nicht-positive Realteile haben und die Vielfachheit der verschwindenden und imaginären Wurzeln eine gegebene Zahl nicht übersteigt. Mat. Sbornik, n. Ser. 33 (75), 215—218 (1953) [Russisch].

Sei  $f(x)$  das vorgelegte Polynom vom Grade  $n$ . Die Bedingungen des Titels der Arbeit mit  $\nu$  als größter Vielfachheit sind dann und nur dann erfüllt, wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  das Polynom

$$F_\nu(y) = f(y) + \varepsilon f'(y) + \dots + (\varepsilon^\nu/\nu!) f^{(\nu)}(y)$$

nur Wurzeln mit negativem Realteil hat. Auf dieses Polynom können demgemäß die Hurwitzschen Determinantenkriterien angewandt werden. Für den Fall komplexer Koeffizienten wird von einer von Čebotarev und Mejman (Das Routh-Hurwitzsche Problem für Polynome und ganze Funktionen, Moskau 1949, dies. Zbl. 41, 198) angegebenen reellen Form der Hurwitzschen Matrix Gebrauch gemacht.

*H. Schwerdtfeger.*

**Cremer, L.:** Die Verringerung der Zahl der Stabilitätskriterien bei Voraussetzung positiver Koeffizienten der charakteristischen Gleichung. Z. angew. Math. Mech. 33, 221—227 (1953).

Damit eine reelle algebraische Gleichung  $\sum_{\nu=0}^n a_\nu x^{n-\nu} = 0$  mit  $a_0 > 0$  nur Wurzeln mit negativen Realteilen habe, ist nach Hurwitz [Math. Ann. 46, 273—284 (1895)] notwendig und hinreichend, daß alle Hauptunterdeterminanten  $H_\mu$  ( $\mu = 1, 2, \dots, n$ ) der  $(n, n)$ -Matrix  $(c_{ij})$  mit  $c_{ij} = a_{2i-j}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ;  $a_\nu = 0$  für  $\nu > n$  und  $\nu < 0$ ) positiv sind. Unter Verwendung der notwendigen Voraussetzung, daß mit  $a_0 > 0$  auch alle übrigen Koeffizienten positiv sein müssen, zeigt Verf. mit Hilfe eines Satzes von Orlando [Math. Ann. 71, 233—245 (1912)] und den Kriterien von Routh, daß es hinreicht, nachzuweisen, daß entweder nur die  $H_\mu$  mit geradem  $\mu$  oder nur diejenigen mit ungeradem  $\mu$  positiv sind. Wird noch  $H_0 = a_0$  gesetzt und in die Folge der  $H_\mu$  mit geradem  $\mu$  mit aufgenommen, dann gilt folgende Zeichenregel: Die Anzahl der konjugiert komplexen Wurzelpaare mit



positivem Realteil ist gleich der Anzahl der Vorzeichenwechsel in einer (also in jeder) dieser beiden  $H$ -Determinantenfolgen. — Wie der Verf. selbst bemerkt, ergeben sich aus seinem Resultat im Vergleich mit der ursprünglichen Hurwitzschen Formulierung allerdings keine Vereinfachungen für die numerische Berechnung der  $H_\mu$ .

H. Bilharz.

Wall, G. E.: The Galois group of a binomial polynomial. Proc. London math. Soc., III. Ser. 3, 195—210 (1953).

Die explizite Bestimmung der Galoisschen Gruppe eines gegebenen Polynoms ist im allgemeinen ein schwer angreifbares Problem. Es wird hier behandelt für das binomische (reine) Polynom  $x^m - a$  über einem Grundkörper  $R$ , dessen Charakteristik nicht Teiler von  $m$  ist. Bekanntlich kommen nur Untergruppen  $L$  der vollen linearen Permutationsgruppe  $L_m$  in Frage (vgl. Tschebotarow-Schwerdtfeger, Grundzüge der Galoisschen Theorie, Groningen 1950, Kap. IV, § 2; dies. Zbl. 37, 146), deren Elemente  $x \rightarrow s x + t \pmod{m}$ ,  $(s, m) = 1$ , symbolisch durch das Zahlenpaar  $(s:t)$  bezeichnet werden. Damit ist der Anlaß zu einer teilweise recht subtilen arithmetischen Strukturuntersuchung der Gruppe  $L_m$  gegeben, die den größten Teil dieser Arbeit ausmacht. Der Wurzelkörper  $R(x, \varepsilon)$  des reinen Polynoms ist durch eine Wurzel  $\alpha$  des Polynoms und eine primitive  $m$ -te Einheitswurzel  $\varepsilon$  bestimmt; damit ist auch die Gruppe  $L$  gegeben. Sei  $T$  ihre Translationsgruppe, d. i. der aus den Elementen  $(1:t)$  bestehende Normalteiler.  $L$  heißt eine  $\mathfrak{R}$ -Untergruppe von  $L_m$ , wenn die Faktorgruppe  $L/T$  einer Untergruppe  $\mathfrak{R}$  der Gruppe  $\mathfrak{R}_m$  der mit  $m$  teilerfremden Restklassen  $\pmod{m}$  isomorph ist. Jede Galoissche Gruppe eines reinen Polynoms ist  $\mathfrak{R}$ -Untergruppe von  $L_m$ . Sei  $(1:d)$  mit  $d|m$  das erzeugende Element von  $T$ . In den Elementen  $(s:t)$  von  $L$  ist die Translationskomponente dann modulo  $d$  durch  $s$  allein bestimmt und wird daher durch  $\lambda_s$  bezeichnet. Gemäß der Zusammensetzungsregel der Symbole  $(s:t)$  gilt

$$(1) \quad \lambda_{ss_1} \equiv s_1' \lambda_s + \lambda_{s_1} \pmod{d}.$$

Umgekehrt bestimmen ein Teiler  $d$  von  $m$ , eine Untergruppe  $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}_m$  und eine den Kongruenzen (1) genügende in  $\mathfrak{R}$  definierte Funktion  $\lambda_s$  (mit Werten  $0, 1, \dots, d-1$ ) eine  $\mathfrak{R}$ -Untergruppe von  $L_m$ , die mit  $[d; \mathfrak{R}; \lambda_s]$  bezeichnet wird. Die Konjugierten dieser Untergruppe lassen sich in der Form  $[d; \mathfrak{R}; \mu_s]$  darstellen, wobei  $\mu_s \equiv u \lambda_s - (s-1)v \pmod{d}$ ,  $(u:v) \in L_m$ . Das System der Konjugierten dieser Gruppe wird mit  $\langle d; \mathfrak{R}; \lambda_s \rangle$  bezeichnet und das „Galois-System“ von  $x^m - a$  genannt. Sind  $X$  und  $Y$  zwei solche Systeme, so ist definitionsgemäß  $X < Y$ , wenn eine der Gruppen von  $X$  Untergruppe einer der Gruppen von  $Y$  ist, wodurch eine partielle Ordnung in der Menge dieser Galois-Systeme eingeführt ist. Es wird nun gezeigt, daß alle Binome  $x^m - a$  mit vorgegebenem Galois-System auf die folgende Weise bestimmt werden können: I. Man ermittle alle  $\mathfrak{R}$ -Untergruppen von  $L_m$ . — II. Man suche ein Element  $\gamma \in R(\varepsilon)$ , welches zu  $\langle d; \mathfrak{R}; \mu_s \rangle$  derart „gehört“, daß für eine  $d$ -te primitive Einheitswurzel  $\omega$  gilt (2)  $\gamma^s = \gamma \omega^{\mu_s}$  für alle  $s$ , falls  $[d; \mathfrak{R}; \mu_s]$  ein Vertreter des vorgegebenen Galois-Systems ist. Dabei ist  $\gamma \rightarrow \gamma^s$  der durch  $s$  bestimmte, exponentiell geschriebene Automorphismus von  $R(\varepsilon)$ . — Das erste Hauptproblem ist demnach die Bestimmung aller  $\mathfrak{R}$ -Untergruppen von  $L_m$ , das sind die möglichen Galoisschen Gruppen eines Binoms  $x^m - a$ . Zu diesem Zweck hat man für jeden Teiler  $d$  von  $m$  die den Kongruenzen (1) genügenden Funktionen  $\lambda_s$  zu finden. Diejenigen  $s_0 \in \mathfrak{R}$ , für die  $\lambda_{s_0}$  durch  $d$  teilbar ausfällt, bilden eine Untergruppe  $\mathfrak{S}$  von  $\mathfrak{R}$ , die der „Kern“ der Funktion  $\lambda_s$  genannt wird; wenn  $s_0 \in \mathfrak{S}$ , so gilt  $s_0 \equiv 1 \pmod{d}$ . Zwei Funktionen  $\lambda_s, \lambda_{s'}$  heißen zueinander konjugiert, wenn die entsprechenden Untergruppen  $[d; \mathfrak{R}; \lambda_s], [d'; \mathfrak{R}; \lambda_{s'}]$  zueinander konjugiert sind (was notwendig  $d = d'$  involviert). Es genügt aus jedem System konjugierter Funktionen eine einzige zu bestimmen; überdies kann man sich auf die „semitransitiven“ Funktionen  $\lambda_s$  beschränken, das sind diejenigen, die nicht konjugiert sind zu einer Funktion, deren Werte  $\lambda_s$  zu  $d$  nicht relativ prim sind. Diese Funktionen entsprechen den transitiven  $\mathfrak{R}$ -Untergruppen und somit den über  $R$  irreduziblen Binomen. Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen für Semitransitivität aufgestellt und Normalformen semitransitiver Funktionen mit gegebenem Kern hergeleitet (Theorem 5.3). Dabei spielt die folgende Fallunterscheidung eine wichtige Rolle: Sei  $\mathfrak{R}^+$  die Untergruppe aller  $s$  in  $\mathfrak{R}$ , für die  $4|(s-1)$ . A. (i)  $4 \nmid d$ ; (ii)  $4|d$  und  $\mathfrak{R}^+ = \mathfrak{R}$ . In diesen beiden Fällen ist die Faktorgruppe  $\mathfrak{R}/\mathfrak{S}$  zyklisch; (iii)  $4|d$ ,  $\mathfrak{R}^+ \neq \mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{R}/\mathfrak{S}$  zyklisch. — B.  $4|d$  und  $\mathfrak{R}^+ \neq \mathfrak{R}$ , aber  $\mathfrak{R}/\mathfrak{S}$  nicht zyklisch. Im Falle B. ist  $\mathfrak{R}/\mathfrak{S}$  direktes Produkt aus einer zyklischen Gruppe und einer Gruppe der Ordnung 2. — Der letzte Abschnitt der Arbeit behandelt das zweite Hauptproblem: Nachweis der Existenz und Konstruktion einer von Null verschiedenen Lösung  $\gamma$  der Gleichung (2).

H. Schwerdtfeger.

## Gruppentheorie:

Evans, Trevor: On multiplicative systems defined by generators and relations. II. Monogenic loops. Proc. Cambridge philos. Soc. 49, 579—589 (1953).

(Teil I, dies. Zbl. 43, 20.) Die vorliegende Arbeit ist dem Studium der zyklischen



nicht-assoziativen Gruppen [= monogenic loops] gewidmet. Es wird gezeigt, daß es ein Kontinuum wesentlich verschiedener zyklischer nicht-assoziativer Gruppen gibt, daß die freie zyklische nicht-assoziative Gruppe, die bekanntlich jede abzählbare freie nicht-assoziative Gruppe als Untergruppe enthält, isotop zu nicht-isomorphen Gruppen ist, daß ihre Automorphismengruppe die unendliche zyklische Gruppe ist. Ist eine zyklische nicht-assoziative Gruppe durch eine positive endliche Zahl von Relationen definiert, so besitzt sie nur endlich viele Endomorphismen. Schließlich wird eine zyklische nicht-assoziative Gruppe konstruiert, die einer echten Faktorgruppe isomorph ist.

R. Baer.

**Thierrin, Gabriel: Quelques propriétés des équivalences réversibles généralisées dans un demi-groupe** *D. C. r. Acad. Sci., Paris* **236**, 1399—1401 (1953).

P. Dubreil a défini les équivalences réversibles  $\Sigma_H$  généralisées et il les a étudiées lorsque le complexe  $H$  est un sous-demi-groupe du demi-groupe  $D$  (ce Zbl. **45**, 8). Ici, l'A. étend certaines de leurs propriétés au cas où  $H$  est quelconque. Pour cela, il généralise la notion de complexe unitaire par celle de complexe intègre  $K$  ( $kx \in K$  et  $k \in K$  entraînent  $x \in K$ ). Il introduit aussi la notion de complexe réversé à droite  $H$  pour un complexe  $K$ , c. à d.:  $KH \subseteq H$  et, si  $h_1$  et  $h_2 \in H$ , il existe  $k_1$  et  $k_2 \in K$  tels que  $k_1 h_1 = k_2 h_2$ . Pour le reste, le style d'une note aux Comptes rendus rend un peu décousu l'ensemble des propriétés données.

L. Lesieur.

**Thierrin, Gabriel: Sur une équivalence en relation avec l'équivalence réversible généralisée.** *C. r. Acad. Sci., Paris* **236**, 1723—1725 (1953).

A partir d'un complexe quelconque  $H$ , l'A. définit une nouvelle équivalence  $\Omega_H$  dans un demi-groupe  $D$  et il en donne certaines propriétés. Soit  $F_a$  l'ensemble des éléments  $x$  tels que  $a \in Hx$ . La relation  $a \omega_H a'$  définie par:  $F_a = F_{a'} = 0$  ou  $F_a \cap F_{a'} \neq 0$ , est réflexive et symétrique. Sa fermeture transitive est la relation d'équivalence  $\Omega_H$ . Dans le cas où  $H$  est astreint à droite, c. à d. dans le cas où  $F_a \cap F_{a'} \neq 0$  entraîne  $F_a = F_{a'}$ , les classes de  $\Omega_H$  sont formées des complexes  $Ha$  et du complexe  $V_H = D \setminus HD$ ; les classes de l'équivalence réversible généralisée  $\Sigma_H$  (définition donnée par P. Dubreil, ce Zbl. **45**, 8) sont formées des complexes  $F_a \neq 0$ .

L. Lesieur.

**Thierrin, Gabriel: Quelques propriétés des sous-groupoïdes consistants d'un demi-groupe abélien** *D. C. r. Acad. Sci., Paris* **236**, 1837—1839 (1953).

L'A. étudie les sous-demi-groupes consistants d'un demi-groupe abélien  $D$ , c. à d. les sous-demi-groupes  $C$  qui vérifient la relation:  $ab \in C$  entraîne  $a \in C$  et  $b \in C$ . En particulier, le sous-demi-groupe minimum consistant qui contient  $a$  est le sous-demi-groupe consistant principal  $\gamma(a)$ ; il est formé des diviseurs de  $a$  et de ses puissances. Etant donnés deux sous-demi-groupes consistants  $A$  et  $B$ , l'opération  $A \cdot B$  consiste à prendre le plus petit sous-demi-groupe consistant qui contient  $A$  et  $B$ . On a toujours  $A \cdot B = A \cup B \subseteq A \cdot B$  et le cas simple correspond à l'égalité. Cette opération est commutative, associative et idempotente, d'où un demi-treillis et un treillis. Celui-ci permet de définir un sous-demi-groupe consistant irréductible et un sous-demi-groupe consistant primitif dans  $A$ . L'A. donne ensuite deux théorèmes de décomposition. (Ce travail gagnerait à être présenté de façon différente en remarquant qu'un sous-demi-groupe consistant n'est autre que le complémentaire d'un idéal premier dans  $D$ . Si l'on observe que la réunion d'idéaux premiers est un idéal premier et qu'il existe toujours un idéal premier maximum  $P_1 \supset P_2$  contenu dans deux idéaux premiers  $P_1$  et  $P_2$ , l'ensemble des idéaux premiers (auquel on adjoint 0) constitue pour la relation d'inclusion un treillis complet  $T$ . L'opération  $P_1 \cup P_2$  est la réunion, et l'opération  $P_1 \cdot P_2$  correspond à l'opération  $A \cdot B$  de l'A. Les sous-demi-groupes consistants irréductibles sont les complémentaires d'idéaux premiers  $\mathfrak{p}_i$  irréductibles et les autres résultats fournissent des théorèmes de décomposition dans ce treillis d'idéaux premiers.)

L. Lesieur.

**Trevisan, Giorgio: Costruzione di quasigruppi con relazioni di congruenza non permutabili.** *Rend. Sem. mat. Univ. Padova* **22**, 11—22 (1953).

Dans un travail antérieur (ce Zbl. **39**, 15), l'A. a résolu une partie du problème 31 posé par G. Birkhoff [Lattice theory, rev. ed., New York 1948 (ce Zbl. **33**, 101), p. 86] en montrant que les congruences d'un quasi-groupe fini sont toujours permutables. Dans cette nouvelle publication, il résout l'autre question de ce même problème en



construisant un quasi-groupe, nécessairement infini, ayant deux congruences  $\theta$  et  $\theta_1$  non permutables. Pour cela, il part d'un ensemble fini  $(a, b, c)$  avec les partitions  $\theta = (a, \{b, c\})$  et  $\theta_1 = (\{a, b\}, c)$ , puis il construit un ensemble infini analogue à un quasi-groupe libre  $Q$  engendré par les générateurs  $a, b, c$ , et il étend de façon simple les partitions  $\theta$  et  $\theta_1$  en congruences relatives à  $Q$ . Alors on a:  $a \equiv b(\theta_1)$  et  $b \equiv c(\theta)$ , mais il n'existe aucun élément  $p$  tel que  $a \equiv p(\theta)$ ,  $p \equiv c(\theta_1)$ . Dans le quasi-groupe  $Q$ , les congruences  $\theta$  et  $\theta_1$  ne sont donc pas permutables. (Quelques erreurs typographiques, en particulier dans les numéros de théorèmes.)

L. Lesieur.

**Trevisan, Giorgio: Classificazione dei semplici ordinamenti di un gruppo libero commutativo con  $n$  generatori.** Rend. Sem. mat. Univ. Padova **22**, 143—156 (1953).

L'une des questions posées dans le problème 102 de G. Birkhoff [Lattice Theory, rev. ed., New York 1948 (ce Zbl. **33**, 101), p. 227] se trouve résolue ici: étudier toutes les relations d'ordre simple d'un groupe libre commutatif  $G$  à  $n$  générateurs, une relation d'ordre simple étant une relation d'ordre total isotone par rapport à l'opération du groupe. Celle-ci est notée additivement et l'élément unité est noté 0. Si  $G$  est archimédien, on sait que  $G$  est isomorphe à un sous-groupe  $I_n$  des réels de base  $g'_1, g'_2, \dots, g'_n$ . L'A. précise que  $I'_n$  et  $I''_n = (g'_1, g'_2, \dots, g'_n)$  sont isomorphes si et seulement si  $g'_i = k g'_i$ . Si  $G$  n'est pas archimédien, il existe parmi les éléments positifs de  $G$  des éléments  $a$  et  $b$  vérifiant  $a < b$ , c. à d. tels que  $na < b$  pour tout nombre naturel  $n$ . La relation  $a \leq b$  et  $b \leq a$  est une relation d'équivalence dans l'ensemble des éléments positifs de  $G$ . Elle définit donc une partition en classes  $A_1, A_2, \dots, A_k$  et l'A. démontre que  $k \leq n$ . On en déduit entre les éléments  $a_i \in A_i$  la relation de chaîne  $a_1 < a_2 < \dots < a_k$  qui ordonne l'ensemble des classes suivant  $A_1 < A_2 < \dots < A_k$ . La classe  $A_1$ , dite minimale, est archimédienne et l'A. montre que l'ensemble  $A_1^*$  formé par les éléments de  $A_1$ , leurs opposés et 0, est un sous-groupe libre de  $G$ , archimédien, à  $r$  générateurs. Le groupe  $G_1 = G/A_1^*$  est alors un groupe libre à  $n - r$  générateurs auquel on peut appliquer les mêmes résultats. On définit ainsi par induction la structure d'un ordre simple quelconque de  $G$ . Inversement, une structure de cette nature détermine un ordre simple de  $G$ . L'A. applique ces résultats aux groupes à 1, 2, et 3 générateurs.

L. Lesieur.

**Clifford, A. H.: A class of  $d$ -simple semigroups.** Amer. J. Math. **75**, 547—556 (1953).

Dans ce travail, l'A. donne la structure des demi-groupes  $S$  avec élément unité  $e$ , tels que:  $A_1$ :  $S$  est  $d$ -simple;  $A_2$ : Deux éléments idempotents quelconques sont permutables. [Rappelons qu'un demi-groupe est  $d$ -simple, suivant J. A. Green, ce Zbl. **43**, 256, s'il ne comprend qu'une classe dans l'équivalence  $d$  définie par:  $x = y(d)$  s'il existe  $z$  tel que  $x$  et  $z$  engendrent le même idéal principal à droite tandis que  $z$  et  $y$  engendrent le même idéal principal à gauche. En prenant  $a \equiv e(d)$ , on voit que pour  $a \in S$ , il existe  $b$  tel que  $aS = bS$  et  $Sb = S$ ; donc  $SaS = S$  et  $S$  est simple.] L'A. montre que  $S$ , supposé simple, est de plus régulier au sens de J. Neumann (ou encore inversif suivant G. Thierrin, ce Zbl. **42**, 253 et **46**, 16). Son étude porte donc sur une classe de demi-groupes réguliers  $d$ -simples. Il établit d'abord que le sous-demi-groupe  $P$  des éléments inversibles à droite est un demi-groupe avec élément unité qui possède les propriétés suivantes:  $B_1$ : La règle de simplification est valable dans  $P$ .  $B_2$ : L'intersection de deux idéaux principaux à gauche est un idéal principal à gauche. — Il résout ensuite un problème d'immersion intéressant qui consiste à reconstituer  $S$  à partir de  $P$ . Sa construction opère au moyen des fractions  $a/b$  dans lesquelles on définit une équivalence:  $a/b \equiv a'/b' \rightarrow$  il existe  $u$  inversible tel que  $a' = ua$ ,  $b' = ub$ . Les multiples à gauche communs à  $b$  et  $c$  sont tous de la forme  $hb = kc$ , avec  $h = mp$ ,  $k = mq$ ; on prend pour produit des classes de  $a/b$  et  $c/d$  la classe de  $huk/d$ . Le résultat fondamental s'énonce alors: l'ensemble de ces classes forme vis-à-vis du produit précédent un demi-groupe avec élément unité vérifiant les propriétés  $A_1$  et  $A_2$  et admettant pour sous-demi-groupe d'éléments inversibles à droite un demi-groupe isomorphe à  $P$ . Comme on le voit, cette construction s'apparente, sans s'y rattacher complètement, à l'immersion d'un demi-groupe régulier dans un groupe. (P. Dubreil, Algèbre, Paris 1946, p. 136).

L. Lesieur.

**Jaffard, Paul: Contribution à l'étude des groupes ordonnés.** J. Math. pur. appl., IX. Sér. **32**, 203—280 (1953).

Cette thèse constitue le développement de plusieurs notes du même A. (ce Zbl. **37**, 10, 11, 150; **39**, 11, 29). Le travail final est divisé en 3 chapitres. Dans le Chap. I, l'A. rappelle d'abord les propriétés générales des groupes ordonnés et réticulés; il s'agit toujours de groupes abéliens notés additivement, avec élément neutre 0; la relation d'ordre est isotone par rapport à l'addition, soit  $a \leq b \Rightarrow a + x \leq b + x$ . Puis il considère les homomorphismes du groupe ordonné ou réticulé  $G$ , croissants (ou isotones) dans le premier cas et propres (c. à d.  $\cup$  et  $\cap$ -homomorphismes) dans le 2me cas; ces homomorphismes propres jouent un rôle essentiel dans la démonstration d'un théorème dû à P. Lorenzen, exprimant que tout groupe réticulé est isomorphe à un sous-groupe d'un produit direct de groupes totalement ordonnés  $G_i$ ; on les obtient alors par projection



de  $G$  sur une composante  $G_i$ . Plus généralement, un groupe ordonné est réalisable comme sous-groupe d'un produit direct de groupes totalement ordonnés si et seulement s'il est semi-clos, c. à d.  $nx > 0 \Leftrightarrow x \geq 0$  quand  $n$  est un entier positif; ce résultat, dû également à P. Lorenzen a été aussi établi par J. Dieudonné par une méthode d'affinement de structure d'ordre qui est ici étudiée systématiquement. — Dans le Chap. II, l'A. présente la théorie des filets et ses applications. La notion de filet est surtout intéressante dans un groupe réticulé, mais on peut la définir dans un groupe ordonné quelconque: c'est une classe  $a$  de l'équivalence suivante dans l'ensemble des éléments positifs de  $G$ :  $a = b$  si et seulement si  $a + x = 0 \Leftrightarrow b + x = 0$ . L'ensemble des filets est ordonné par:  $a \leq b$  si et seulement si  $a + x = 0 \Leftrightarrow b + x = 0$ . Quand  $G$  est réticulé, cet ensemble  $F$  forme un treillis distributif avec élément nul, et les propriétés de ce treillis renseignent sur la structure de  $G$ . L'A. obtient en particulier le théorème suivant: les éléments d'un filet minimal (ou point de  $F$ ) engendrent un sous-groupe de  $G$  qui est totalement ordonné. Il donne aussi des conditions nécessaires et suffisantes pour que  $G$  soit somme directe de groupes totalement ordonnés. [Ces résultats sont exposés avec d'autres méthodes par M. L. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur, R. Croisot, dans *Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques*, Paris 1953, p. 237 et 240.] La théorie des filets permet aussi à l'A. de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un groupe réticulé admette une réalisation irréductible comme sous-groupe d'un produit direct de groupes totalement ordonnés. La fin de ce chap. est consacrée aux groupes archimédiens parmi lesquels l'A. distingue 3 types: les groupes faiblement archimédiens ( $x > 0$ ,  $y \in G$ , il existe  $n$  tel que  $nx < y$ ), les groupes archimédiens ( $x > 0$ ,  $y \in G$ , il existe  $n$  tel que  $nx \geq y$ ), les groupes para-archimédiens ( $x \leq 0$ ,  $y \in G$ , il existe  $n$  tel que  $nx < y$ ). Ces notions lui permettent de vérifier dans deux cas particuliers une conjecture de Krull et Clifford (qui n'est pas vraie en général); un groupe est représentable comme groupe de fonctions à valeurs dans le groupe additif des réels dans les deux cas suivants:  $G$  est demi-clos, archimédien et para-archimédien, ou  $G$  est réticulé, para-archimédien, et il admet une réalisation irréductible comme sous-groupe de produit direct de groupes totalement ordonnés. — Dans le Chap. III, l'A. étudie les corps demi-valués. De même que les corps valués ont pour domaine de valuation un groupe totalement ordonné, les corps demi-valués  $K$  ont pour domaine de valuation un groupe abélien  $G$  réticulé. La demi-valuation est alors une application  $w$  de  $K - \{0\}$  dans  $G$  vérifiant;

$$w(xy) = w(x) + w(y); \quad w(x + y) \geq w(x) \cap w(y).$$

L'A. montre que tout groupe réticulé  $G$  peut être considéré comme le groupe de demi-valuation d'un certain corps  $K$  qu'il détermine par la méthode due à Krull dans le cas des groupes totalement ordonnés. L'anneau  $A$  de demi-valuation est l'ensemble des éléments de  $K$  qui ont pour image un élément positif de  $G$ , auquel on ajoute  $\{0\}$ ; il peut être caractérisé par exemple par le fait que l'intersection de deux idéaux principaux de  $A$  est toujours un idéal principal,  $A$  étant un anneau d'intégrité. L'A. détermine toutes les demi-valuations d'une extension transcendante simple d'un corps algébriquement clos qui s'annulent sur le corps de base. Il étudie ensuite la topologie naturelle d'un corps demi-valué, dans laquelle on prend comme base du filtre des voisinages de 0 l'ensemble des  $V_\alpha$  définis par

$$x \in V_\alpha \Leftrightarrow w(x) \geq \alpha \text{ ou } x = 0; \quad \alpha \in G.$$

Cette topologie, qui est compatible avec la structure d'anneau de  $K$ , est également compatible avec sa structure de corps dans le cas où  $G$  possède un filet maximal. L. Lesieur.

Scott, W. R.: Transitive sets of homomorphisms. *Proc. Amer. math. Soc.* 4, 175—177 (1953).

$G$  und  $H$  seien Gruppen mit den neutralen Elementen  $e_G$  bzw.  $e_H$  und den Ordnungen  $g$  und  $h$ . Mit  $(A_n)$  sei für jede natürliche Zahl  $n$  die Aussage bezeichnet:  $g, h \leq n + 1$  und zu  $n$  verschiedenen Elementen  $a_i \in e_G$  von  $G$  sowie ebensolchen  $b_i \in e_H$  von  $H$  gibt es immer einen Homomorphismus von  $G$  in  $H$ , der  $a_i$  in  $b_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) überführt. Ist  $G$  nicht torsionsfrei, so folgt aus  $(A_1)$ , daß alle Elemente von  $G$  und  $H$  mit Ausnahme von  $e_G, e_H$  dieselbe Primzahl  $p$  als Ordnung haben und daß — falls  $H$  endlich ist —  $G$  direktes Produkt von Gruppen der Ordnung  $p$  ist. Ist  $G$  direktes Produkt von Gruppen der Primzahlordnung  $p$ , haben alle Elemente  $\neq e_H$  von  $H$  die Ordnung  $p$  und ist  $g, h \leq 1$ , so gilt  $(A_1)$ . Genau dann gilt  $(A_2)$ , wenn entweder  $G$  und  $H$  beide direkte Produkte von Gruppen der Ordnung 2 sind oder  $h = 3$  und  $G$  direktes Produkt von Gruppen der Ordnung 3 ist. Die folgenden beiden Sätze gelten auch noch für Loops  $G, H$ .  $(A_3)$  gilt genau dann, wenn  $H$  das direkte Produkt von zwei Gruppen der Ordnung 2 und  $G$  direktes Produkt von mindestens zwei Gruppen der Ordnung 2 ist. Im Falle  $n \geq 3$  gilt  $(A_n)$  niemals. G. Pickert.



Neumann, B. H.: A note on means in groups. J. London math. Soc. 28, 472—476 (1953).

Verf. beweist, daß in einer Gruppe  $G$  ein Mittelwert (W. R. Scott, dies. Zbl. 46, 247) dann und nur dann existiert, wenn für jedes  $a \in G$  und jede natürliche Zahl  $n$  die Gleichung  $nx = a$  eine Lösung  $x$  [bezeichnet mit  $(1/n)a$ ] in  $G$  hat und jedes Element in  $G$  mit allen seinen Konjugierten kommutiert. Anschließend wird an einem Beispiel die Frage von Scott bejahend beantwortet, ob nichtabelsche Gruppen einen Mittelwert besitzen können: Es sei  $G$  die Menge aller geordneten Tripel rationaler Zahlen mit der Gruppenoperation

$$(r, s, t) + (r', s', t') = (r + r', s + s', t + t' - r' s).$$

Dann definieren die Funktionen

$$f_n((r_1, s_1, t_1), \dots, (r_n, s_n, t_n)) = \left( \frac{1}{n} \sum r_i, \frac{1}{n} \sum s_i, \frac{1}{n} \sum t_i + \frac{1}{2n} \sum r_i s_i - \frac{1}{2n^2} \sum r_i \sum s_i \right)$$

den (nach Scott eindeutigen) Mittelwert.

A. Jaeger.

Michiura, Tadashi: On partially ordered groups without proper convex subgroups. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 56, 231—232 (1953).

Hauptresultat: Es sei  $G$  eine (additive) Gruppe, in der eine nichttriviale (teilweise) Ordnungsrelation  $\geq$  definiert ist mit der Eigenschaft, daß aus  $nx \geq 0$  (für irgendeine natürliche Zahl  $n$ )  $x \geq 0$  folgt. Besitzt  $G$  keine nichttriviale konvexe Untergruppe, so ist  $G$  einer Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen isomorph und somit kommutativ.

L. Fuchs.

Lazard, Michel: Problèmes d'extension concernant les  $N$ -groupes; inversion de la formule de Hausdorff. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 1377—1379 (1953).

If  $G$  is a group possessing a series of subgroups  $G = H_1 \supset H_2 \supset \dots$  such that  $\bigcap_i H_i = \{1\}$

and  $[H_i, H_j] \subseteq H_{i+j}$  for all  $i, j$ , then  $G$  is called an  $N$ -group,  $H_1, H_2, \dots$  an  $N$ -series of  $G$ . The  $N$ -series is a special case of a (descending) central series. Four theorems are stated, the proofs being reserved for a forthcoming publication. Theorem I deals with the extension to a total homomorphism of a partial homomorphism of a group  $G$  into a group  $H$ , when both have central series.  $H$  is complete in the subgroup topology defined by its central series, and the factors of the series are subject to certain restrictions in terms of sets  $P_i$  of primes and the solubility of equations  $x^n = y$  where  $n$  is divisible only by primes in  $P_i$ . Theorem II [in the first line of which  $(H_i)$  should read  $(K_i)$ ] deals with embeddings of groups with central series or  $N$ -series, subject to similar restrictions as in Theorem I, in groups in which certain equations  $x^n = y$  have unique solutions in every factor of a central series or  $N$ -series. Theorem III gives conditions for finitely nilpotent groups to possess a central series in whose factors no element has order divisible only by primes in a given set  $P$ . Theorem IV deals with a group  $G$  with a central series  $H_1 \supset H_2 \supset \dots$  contracting to the trivial group;  $G$  is assumed complete in the subgroup topology of the central series, and the central factors are again subject to conditions as before. Then to every pair  $x, y$  of elements of  $G$  there exists a unique sequence  $a_1, a_2, \dots$  such that  $a_i \in H_i$  and  $x^t y^t = a_1^t a_2^t \dots a_i^t \bmod H_{i+1}$ , for every integer  $t$  and every  $i$ . Here  $a_1$  and  $a_2$  can be obtained by the inversion of the Campbell-Baker-Hausdorff formula studied by the author in a previous note (this Zbl. 50, 20).

B. H. Neumann.

Haimo, Franklin: The  $FC$ -chain of a group. Canadian J. Math. 5, 498—511 (1953).

Let  $H_1 = H(G)$  be the set of those elements of a group  $G$  which have only finitely many conjugates in  $G$ . Then  $H_1$  is clearly a characteristic subgroup of  $G$ . Define  $H_{i+1} = H_{i+1}(G)$  inductively as the complete inverse map of  $H(G/H_i)$  under the canonic homomorphism of  $G$  onto  $G/H_i$ . Then  $H_1 \subseteq H_2 \subseteq \dots$  is called the „ $FC$ -chain“ of  $G$ , because each  $H_{i+1}/H_i$  is an  $FC$ -group in the terminology of R. Baer (this Zbl. 31, 197). Each  $H_i$  is not only characteristic but strictly characteristic in  $G$ , that is to say, mapped into itself by every endomorphism of  $G$  onto  $G$  [for this terminology cf. R. Baer, Bull. Amer. math. Soc. 50, 143—160 (1944)]. The main aim of the paper is to study the interrelations between the upper central chain  $Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq \dots$  of a group  $G$  and its  $FC$ -chain, and also certain other chains defined from the  $FC$ -chain. Thus e.g.  $Z_i \subseteq H_i$  for all  $i$ , and if  $Z_{i+1} \not\subseteq H_i$  for some  $i$ , then  $Z_{i+1} \cap H_{j+1} \neq Z_{i+1} \cap H_j$  for all  $j < i$ . Another typical theorem is that if  $H_n$  is a direct factor of  $G$ , then  $H_{n+1} = H_n$ . If  $G = H_n$  for some  $n$ , then  $G$  is called  $FC$ -nilpotent, and the  $FC$ -class is defined, and shown to behave in many ways, analogously to the (nilpotent) class. The last section gives examples of  $FC$ -nilpotent groups of every finite  $FC$ -class. It is stated that the notions and many of the results of the paper can be extended to transfinite  $FC$ -chains.

B. H. Neumann.



**Baer, Reinhold:** Nilpotent characteristic subgroups of finite groups. Amer. J. Math. **75**, 633—664 (1953).

Die Arbeit stellt Beziehungen zwischen nilpotenten charakteristischen Untergruppen einer endlichen Gruppe  $G$  her. Besonders geeignet erweist sich hierbei ein neuer Begriff: Ein Normalteiler  $N$  von  $G$  heißt schwach hyperzentral (weak hypercentral; Abkürzung „s. h.“), wenn in jedem Normalteiler  $M$  von  $G$ ,  $N \subseteq M$  für  $x \in N$ ,  $y \in M$ , (Ordnung  $x$ ,  $M:N$ ) = 1 (Ordnung  $x$ , Ordnung  $y$ ) = 1 gilt:  $xy = yx$ . Ein s. h. Normalteiler ist nilpotent. Mit  $N$  ist auch jeder Normalteiler von  $G$  in  $N$  s. h. Die Stärke dieses Begriffs liegt wohl in der Tatsache, daß aus  $N$  s. h.,  $M$  Normalteiler von  $G$  und  $M/N$  nilpotent das Nilpotents von  $M$  folgt und daß unter den gleichen Voraussetzungen aus  $M/N$  s. h. (in  $G/N$ ) die schwache Hyperzentralität (s. H.) von  $M$  folgt. Zwei s. h. Normalteiler mit zueinander teilerfremden Ordnungen erzeugen einen s. h. Normalteiler. Leider ist jedoch, wie das Abelschsein, die s. H. im allgemeinen keine produkttreue Eigenschaft. Es gibt also nicht immer nur einen maximalen s. h. Normalteiler in einer Gruppe. Stattdessen bildet der Durchschnitt aller maximalen s. h. Normalteiler eine charakteristische Untergruppe, das sogenannte schwache Hyperzentrum  $H_w(G)$  (weak H.). Das Produkt eines Normalteilers aus  $H_w(G)$  mit einem s. h. Normalteiler liefert dann einen s. h. Normalteiler.  $H_w(G)$  enthält das Hyperzentrum  $H(G)$  und die Frattini  $(\Phi)$ -Untergruppe  $\Phi(G)$  und ist natürlich in der Fitting-Untergruppe  $F(G)$  (maximaler nilpotenter Normalteiler) enthalten. Es gibt Gruppen, in denen  $H_w(G) = F(G)$  bzw.  $\Phi(G)H(G) = H(G)$  ist, so daß also  $H_w(G)$  eine echte Bereicherung der gruppentheoretischen Begriffsbildungen ist. Da  $\Phi(G)$  in  $H_w(G)$  liegt, lassen sich Sätze der Dissertation des Ref. (dies. Zbl. **50**, 22) über  $\Phi(G)$  neu herleiten und verallgemeinern. — Mit den vorstehenden Resultaten folgert Verf. einen wichtigen Satz über den Zentralisator  $Z(M < G)$  eines kleinsten Normalteilers  $M$  von  $G$ : Enthält  $G/Z(M < G)$  einen Normalteiler mit zu  $M:1$  teilerfremder Ordnung, so ist  $M$  abelsch und es existiert eine Gruppe  $S$  mit  $SZ(M < G) = G$ ,  $M \cap S = 1$ . Ist  $G$  auflösbar, so enthält  $G/Z(M < G)$  stets einen Normalteiler der geforderten Art. — Die hier angegebenen Resultate stellen nur einen Ausschnitt aus der inhaltsreichen Arbeit dar. Für weitere Ergebnisse, z. B. Charakterisierungen der auflösbaren Gruppen und der vom Verf. (dies. Zbl. **50**, 22 und Trans. Amer. math. Soc., im Erscheinen) eingeführten  $n$ -auflösbaren und  $n$ -nilpotenten Gruppen durch Eigenschaften ihrer charakteristischen nilpotenten Untergruppen, muß auf die Arbeit verwiesen werden.

W. Gaschütz.

**Čarin, V. S.:** Über die Minimalbedingung für Normalteiler der lokal auflösbaren Gruppen. Mat. Sbornik, n. Ser. **33** (75), 27—36 (1953) [Russisch].

The main result of the paper is the following theorem: Let  $G$  be a locally soluble group with minimal condition for normal subgroups. Then  $G$  also satisfies the minimal condition for all subgroups if, and only if, all factors of any principal series of  $G$  have finite rank. — We recall the relevant definitions: A group is locally soluble if every finite set of elements generates a soluble subgroup, i. e. one with a derived series of finite length. A principal series of a group  $G$  is a transfinite ascending series  $\{1\} \subset G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_\alpha \subset \dots \subset G_\gamma = G$  in which every term is normal in  $G$  and for a limit number  $\beta$ ,  $G_\beta = \bigcup_{\gamma < \beta} G_\gamma$ , and which cannot be refined by inserting

a normal subgroup of  $G$  between any two consecutive terms. A group  $G$  has finite (special) rank if every finite set of elements generates a subgroup with a boundedly finite number of generators. The significance of the author's result lies in the fact that for various classes of groups the minimal condition for subgroups can be deduced from the minimal condition for normal subgroups. This is so, for example, in nilpotent groups [S. A. Jennings, Bull. Amer. math. Soc. **50**, 759—763 (1944)]; and in locally finite  $p$ -groups [I. D. Ado, Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **51**, 475—477 (1946); S. N. Černikov, this Zbl. **38**, 14]. Kuroš and Černikov had raised the problem whether this was perhaps always true in soluble groups, but the present author has constructed an example to the contrary (this Zbl. **33**, 149). It was, therefore, natural to ask which additional conditions a group with minimal condition for normal subgroups must satisfy in order to deduce the minimal condition for all subgroups, and the paper gives a set of necessary and sufficient conditions.

K. A. Hirsch.

**Huppert, Bertram:** Über die Auflösbarkeit faktorisierbarer Gruppen. Math. Z. **59**, 1—7 (1953).

Die endliche Gruppe  $\mathfrak{G}$  sei darstellbar als Produkt ihrer Untergruppen  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{K}$ . In der letzten Zeit ist wiederholt die Frage behandelt worden, unter welchen Voraussetzungen über  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{K}$  das Produkt  $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}\mathfrak{K}$  auflösbar ist. Die Auflösbarkeit von  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{K}$  reicht nicht hin (Wieferich, dies. Zbl. **43**, 258). N. Itô hat bewiesen, daß das Produkt einer nilpotenten Gruppe mit einer abelschen Gruppe oder mit einer  $p$ -Gruppe auflösbar ist (dies. Zbl. **44**, 15). In der vorliegenden Arbeit wird bewiesen:  $\mathfrak{G}$  ist auflösbar, wenn  $\mathfrak{H}$  eine Diedergruppe und  $\mathfrak{K}$  eine abelsche Gruppe, eine  $p$ -Gruppe oder eine Diedergruppe ist.

R. Kochendörffer.



**Knoche, Hans-Georg:** Über den Frobeniusschen Klassenbegriff in nilpotenten Gruppen. II. Math. Z. **59**, 8—16 (1953).

For the first part of this paper, cf. this Zbl. **43**, 258. The present second part investigates finite  $p$ -groups with a bound on the number of conjugates of an element. If  $p^\beta$  is the maximum number of elements in a class of conjugates in the group, then the author calls  $\beta$  the „breadth“ of the group. It is shown that the class  $c$  satisfies  $c \leq \beta + 1$  when  $\beta \leq 3$ . The groups of breadth  $\beta = 2$  are studied in greater detail (those of breadth 1 were considered in the first part); their Frattini subgroup is abelian, and their derived group has order  $\leq p^3$ . Four types of groups with  $\beta = 2$  are distinguished, according as  $c = 2$  and the Frattini subgroup is, or is not, contained in the centre, or  $c = 3$  and the derived group has order  $p^2$  or  $p^3$ . Examples show that all these types do in fact arise. *B. H. Neumann.*

**Osima, Masaru:** On the induced characters of groups of finite order. Math. J. Okayama Univ. **3**, 47—64 (1953).

Wie in einer vorangegangenen Note angekündigt (dies. Zbl. **47**, 258), gibt Verf. hier eine ausführliche Darstellung seines Beweises des Brauerschen „Satzes über induzierte Charaktere“: Jeder absolut irreduzible Charakter  $\gamma$  einer endlichen Gruppe  $\mathfrak{G}$  besitzt eine Darstellung  $\gamma = \sum_{\theta} c_{\theta} \omega_{\theta}^*$  als ganzrationale Linearkombination solcher Charaktere  $\omega_{\theta}^*$ , die aus zyklischen Charakteren gewisser Untergruppen von  $\mathfrak{G}$  durch den gruppentheoretischen Induktionsprozeß hervorgehen (vgl. dies. Zbl. **50**, 24, sowie die dort angegebene Literatur). Der Beweis des Verf. kann als eine Vereinfachung des ursprünglichen Beweises von R. Brauer angesehen werden (dies. Zbl. **29**, 15). Und zwar besteht die Vereinfachung darin, daß hier der Zusammenhang zwischen den irreduziblen Charakteren einer endlichen Gruppe und denen ihrer Sylowgruppen systematisch untersucht wird (§ 1). (Vgl. dazu die diesbezüglichen Untersuchungen des Ref., dies. Zbl. **48**, 19, insbes. § 3, 8 der Arbeit.) Die Ergebnisse des Verf. gestatten jedoch nicht nur einen Beweis des Satzes über induzierte Charaktere, sondern sie lassen sich auch in der Theorie der modularen Charaktere modulo einer Primzahl  $p$  anwenden. Verf. beweist so u. a. einen zum Satz über induzierte Charaktere analogen Satz für modulare Charaktere (s. R. Brauer, dies. Zbl. **34**, 161, Theorem 5). Ferner berechnet er die Cartansche Determinante mod  $p$  einer endlichen Gruppe (vgl. R. Brauer, dies. Zbl. **26**, 56). *P. Roquette.*

**Nagai, O.:** Supplement to „Note on Brauer's theorem of simple groups“. Osaka math. J. **5**, 227—232 (1953).

In Ergänzung zu seiner im Titel genannten vorangegangenen Arbeit (vgl. dies. Zbl. **48**, 15) beweist Verf. hier folgendes: Es sei  $\mathfrak{G}$  eine endliche vollkommene Gruppe, deren  $p$ -Sylowgruppen für eine gewisse Primzahl  $p$  zyklisch von der Ordnung  $p$  sind und mit ihren Zentralisatoren übereinstimmen. Die Gruppenordnung  $g$  besitze die Zerlegung  $g = (p-1)t^1 \cdot p(1+n)p$  mit einem ungeraden Teiler  $t$  von  $p-1$ . Ist dann  $n = p+2$ , so besitzt  $p$  die Form  $p = 2^u - 1$ , und es ist  $\mathfrak{G} = L F(2, 2^u)$ . In der vorangegangenen Arbeit hatte Verf. dasselbe für  $n < p+2$  gezeigt. Der Beweis benutzt die Brauersche Theorie der modularen Darstellungen modulo  $p$  von  $\mathfrak{G}$ . *P. Roquette.*

**Scott, Leland L.:** Finite metabelian groups and planes of  $\Sigma_{14}$ . Duke math. J. **20**, 405—415 (1953).

Für die Diskussion von Gruppen, die von  $k$  Elementen erzeugt werden, in denen die  $p$ -te Potenz ( $p$  Primzahl) jedes Elements gleich 1 und die Kommutatorgruppe zugleich Zentrum ist, hat H. R. Brahana (dies. Zbl. **43**, 28) eine Methode der endlichen Geometrie ausgearbeitet und für  $k = 3$  und 5 durchgeführt. Mit wachsendem  $k$  wächst die Schwierigkeit erheblich. Ist  $k = 6$ , so ist die Ordnung der Kommutatorgruppe  $p^c$ ,  $5 \leq c \leq 15$  und jede Gruppe ist (nach Brahana) zu der mit  $c = 15$  homomorph. Die Fälle  $c = 14$  und 13 sind in der Diss. von W. A. Ferguson (Illinois 1946) behandelt worden. Die vorliegende Arbeit bezieht sich auf  $c = 12$ . Die Ergebnisse stützen sich auf 9 neue Hilfssätze und sind in einer 42 verschiedene Fälle berücksichtigenden Tabelle niedergelegt. *F. W. Levi.*

**Russo, Salvatore:** Sulla determinazione dei sottogruppi transitivi e transitivi normali del gruppo  $G_S$  con la  $S$  prodotto di due cicli dello stesso ordine. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 213—219 (1953).

Auf Grund einer vorangegangenen Arbeit (dies. Zbl. 33, 347) behandelt Verf. Permutationsgruppen  $G_S$ , entstanden durch die Potenzprodukte  $S_{hk} = C_1^h C_2^k$  der Zykeln  $(u_1 \cdots u_r) = C_1$ ,  $(u_{r+1} \cdots u_{2r}) = C_2$  sowie durch die Vertauschungen  $T_{hk}$  aller Elemente  $C_1^h$  und  $C_2^k$ . Neu beweist er folgende Sätze: (1) Ist  $k$  ein von  $r$  verschiedener Teiler von  $r$ ,  $m = rk$ , und sind  $N, N_1$  zwei nichtnegative ganze Zahlen  $< r$ , so bilden die  $2rk$  Substitutionen  $S_{r, N+r\mu}, T_{r, N+r\mu}, N_1$  ( $0 \leq \mu < r$ ,  $0 \leq \mu < k$ ) genau für  $N^2 - 1 \equiv (N - 1)N_1 \equiv 0 \pmod{m}$  eine transitive Untergruppe  $G$  von  $G_S$ . — (2) Genau dann, wenn unter sonst gleichen Bedingungen  $N + 1 \equiv (N - 1)N_1 \equiv 0 \pmod{m}$  ist, ist  $G$  transitiver Normalteiler von  $G_S$ . *L. Holzer.*

**Littlewood, D. E.:** On the Poincaré polynomials of the classical groups. J. London math. Soc. 28, 494—500 (1953).

The author directly obtains the Poincaré polynomial for the full linear group in  $n$  variables by showing that it is the generating function for self conjugate partitions into not more than  $n$  parts. This is a simplification of Murnaghan's proof [Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 606—611 (1952), 39, 48 (1953)]. The Poincaré polynomials for the symplectic, orthogonal and rotation groups are also obtained by methods based on, but simpler than, those of Murnaghan (loc. cit.).

*F. W. Pönting.*

**Dieudonné, Jean:** On the structure of unitary groups. II. Amer. J. Math. 75, 665—678 (1953).

Compléments à un article précédent (ce Zbl. 46, 253) au compte-rendu duquel nous renvoyons pour les définitions et notations. L'A. établit que le cas laissé de côté où  $K$  est de caractéristique 2 et où les valeurs de  $f$  ne sont pas de la forme  $\xi + \xi'$  se ramène à ce dernier cas, précisément:  $U_n(K, f)$  a une suite de composition  $U_n, I_0, I'$  telle que  $U_n(K, f) I_0 \cong U_m(K, f_1)$  avec  $m \leq n$ , et  $f_1$  hermitienne non dégénérée, à valeurs de la forme  $\xi + \xi'$ ,  $I_0 I'$  est abélien et isomorphe au groupe  $K^{m/2}$  et  $I'$  est abélien et isomorphe au groupe  $S^{q/2} K^{q(q-1)/2}$ ,  $2q \leq n - m$ . — Désignant par quasi-symétrie une transformation  $\sigma$  de  $U_n(K, f)$  laissant invariant l'hyperplan orthogonal à un vecteur non-isotrope l'A. établit que  $U_n(K, f)$  est engendré par des quasi-symétries sauf si  $n = 2$ ,  $K = \mathbb{R}_1$  et  $J = 1$ . Si en outre  $J = 1$  et si  $q$  est l'homomorphisme naturel de  $K^*$  sur  $K^*/C$  ( $C$  groupe des commutateurs de  $K^*$ ), on a le théorème: Pour tout  $u \in U_n(K, f)$ , le déterminant de  $u$  est de la forme  $\eta(\xi + \xi')^j$ . Enfin l'A. étend un théorème du mémoire précédent ( $T_n$  est le groupe des commutateurs de  $U_n$  même quand  $K$  est de caractéristique 2) et précise une démonstration d'un autre travail (J. Dieudonné, Sur les groupes classiques, Paris 1948, ce Zbl. 37, 13).

*A. Revuz.*

● **Maak, W.:** Darstellungstheorie unendlicher Gruppen und fastperiodische Funktionen. (Enzyklopädie Math. Wiss. Zweite, völlig neubearbeitete Auflage. Band I, 1. Teil, Heft 7, Art. 16.) Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1953. 26 S.

The main topics of this encyclopaedia article are: Almost periodic and generalized almost periodic functions on groups. Almost periodic functions on semi-groups. Bohr compactification of groups. Maximally and minimally almost periodic groups. Structure of compact groups and of maximally almost periodic groups. The duality theorems of Pontrjagin and Tannaka.

*E. Følner.*

**Hewitt, Edwin:** Representation of functions as absolutely convergent Fourier-Stieltjes transforms. Proc. Amer. math. Soc. 4, 663—670 (1953).

Es sei  $G$  eine lokalkompakte Abelsche Gruppe und  $G^*$  die entsprechende Gruppe stetiger Charaktere. Es bedeute  $(y, x)$  den Wert des Charakters  $y \in G^*$  an der Stelle  $x \in G$ . Mit  $\Phi$  werde ein beliebiges Borelmaß bezeichnet, das auf dem kleinsten  $\sigma$ -Mengenkörper, der alle abgeschlossenen Mengen  $G$  umfaßt, erklärt ist und noch einer Endlichkeitsbedingung genügt („beschränktes Radonmaß“). Dann heißt  $\Phi(y) = \int_G (y, x) d\Phi(x)$  Fourier-Stieltjes-Transformierte des Maßes  $\Phi$ . Im Anschluß an Segal (dies. Zbl. 36, 205) zeigt Verf.: Wenn jede beschränkte gleich-



mäßig stetige (oder allgemeiner jede fastperiodische) Funktion auf  $G^*$  eine Fourier-Stieltjes-Transformierte ist, so sind  $G$  und  $G^*$  endlich. Für den Fall unendlicher Gruppen werden am Ende der Arbeit drei einfache Beispiele stetiger beschränkter Funktionen angegeben, die nicht Fourier-Stieltjes-Transformierte sind. *W. Maak.*

**Mackey, George W.: Induced representations of locally compact groups. II. The Frobenius reciprocity theorem.** Ann. of Math., II. Ser. 58, 193—221 (1953).

Suite d'un article antérieur (ce Zbl. 46, 116). Le chap. I (resp. II) est principalement une reformulation, en termes de représentations des groupes, de résultats globaux (resp. locaux) relatifs aux anneaux d'opérateurs, avec quelques théorèmes nouveaux. [Par exemple: si  $V = \int V^\nu d\mu(y)$  et  $W = \int W^\nu d\mu(y)$  sont des sommes continues de représentations, le nombre d'entrelacement de  $V^\nu$  et  $W^\nu$  dépend mesurablement de  $y$ .] — L'essentiel de l'article est une généralisation du théorème de réciprocité de Frobenius (concernant un groupe localement compact  $\mathfrak{G}$ , un sous-groupe fermé  $G$ , une représentation unitaire irréductible  $L$  de  $G$  et une représentation unitaire irréductible  $M$  de  $\mathfrak{G}$ ), plus étendue que celle de l'article antérieur, où il s'agissait de réductions discrètes de représentations, et de composantes de dimensions finies, et que celle de Mautner [Amer. J. Math. 74, 737—758 (1952)] où  $G$  était compact. — Première étape: soient  $\mathfrak{G}$  la diagonale de  $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$ ,  $J$  la représentation identique de dimension 1 de  $\mathfrak{G}$ ,  $U^J$  la représentation induite de  $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$ ; alors, l'algèbre commutante de  $U^J$  est abélienne, car  $U^J$  s'identifie à  $(s, t) \rightarrow R_s^t R_t$ , où  $s \rightarrow R_s^0$  (resp.  $t \rightarrow R_t$ ) est la représentation régulière gauche (resp. droite) de  $\mathfrak{G}$ , et on applique alors le théorème de Godement-Segal, généralisé aux groupes non unimodulaires; on voit de même que la réduction continue de  $U^J$  en représentations irréductibles donne, par restriction à  $\mathfrak{G} \times \epsilon$  ou  $\epsilon \times \mathfrak{G}$ , la réduction en représentations factorielles des représentations régulières droite et gauche de  $\mathfrak{G}$ ; si ces représentations sont de type  $I$ , les résultats prennent une forme plus simple. — Deuxième étape: par un résultat de l'article antérieur, la restriction  $V$  de  $U^J$  à  $G \times \mathfrak{G}$  s'identifie à la représentation induite par la représentation identique  $I$  de la diagonale  $\tilde{G}$  de  $G \times G$ , donc à  $U^Z$  si  $Z$  est la représentation de  $G \times G$  induite par  $I$ . Or, on peut réduire  $Z$  en représentations irréductibles (comme plus haut  $U^J$ ), d'où résulte une réduction de  $U^Z = V$ . Comparant les deux décompositions de  $V$ , on obtient, quand les représentations régulières de  $G$  et  $\mathfrak{G}$  sont de type  $I$ , un résultat qui se réduit déjà au théorème de Frobenius pour  $\mathfrak{G}$  compact. — La forme forte du théorème de Frobenius, obtenue ensuite, ne peut être énoncée ici. Elle suppose les représentations régulières de  $G$  et  $\mathfrak{G}$  de type  $I$ , donc réductibles en représentations factorielles de type  $I$ ; à chacune de ces représentations factorielles est associée une représentation irréductible, et ce sont ces représentations qui sont étudiées dans le théorème. La réciprocité concerne, non seulement les multiplicités, mais aussi les mesures qui interviennent dans les réductions continues. Pour englober le théorème de Mautner déjà cité, l'A. étudie le cas où  $G$  a une représentation régulière réductible en somme discrète de représentations de type  $I$  (sans hypothèse sur  $\mathfrak{G}$ ) et obtient encore un théorème de Frobenius (moins satisfaisant). — Etude de la situation quand  $\mathfrak{G} = SL(2, C)$ ,  $G$  = le sous-groupe des matrices surdiagonales. Généralisations diverses.

*J. Dixmier.*

**Borel, A. et J.-P. Serre: Sur certains sous-groupes des groupes de Lie compacts.** Commentarii math. Helvet. 27, 128—139 (1953).

Die Eigenschaft (MP) einer topologischen Gruppe  $G$  lautet:  $G$  besitzt eine endliche Reihe abgeschlossener Normalteiler  $\{e\} = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_{k-1} \subset G_k = G$  derart, daß jede Faktorgruppe  $G_i/G_{i-1}$  einer zyklischen endlichen Gruppe oder der eindimensionalen Torusgruppe isomorph ist. Besitzt eine Gruppe die Eigenschaft (MP), so ist sie eine kompakte auflösbare Liesche Gruppe, deren Einselement-Komponente ein Torus ist. Satz 1: Ist  $G$  eine kompakte Liesche Gruppe, so ist jede die Eigenschaft (MP) besitzende Untergruppe in dem Normalisator eines maximalen Torus von  $G$  enthalten. Gleichwertig damit ist Satz 1': Es sei  $\mathfrak{G}$  die Liesche Algebra einer kompakten Gruppe und  $K$  eine Automorphismengruppe von  $\mathfrak{G}$ , die die Eigenschaft (MP) besitzt; es gibt dann eine abelsche maximale Unteralgebra von  $\mathfrak{G}$ , die in bezug auf die Operatoren von  $K$  zulässig ist. — Der  $p$ -Rang  $l_p(G)$  einer Lieschen kompakten Gruppe  $G$  soll als die größte derjenigen ganzen Zahlen  $h$  definiert werden, für welche  $G$  eine, der direkten Summe  $h$  zyklischer Gruppen der Ordnung  $p$  isomorphe Untergruppe enthält. Der übliche Rang  $l(G)$  von  $G$  ist der Dimension jedes maximalen Torus von  $G$  gleich. Satz 2: Es sei  $G$  eine kompakte, zusammenhängende Liesche Gruppe und  $p$  eine Primzahl; gilt  $l_p(G) > l(G)$ , so besitzt  $G$  eine  $p$ -Torsion, d. h. es ist ein Torsionskoeffizient einer ganzzahligen Homologiegruppe von  $G$  durch  $p$  teilbar. Die Arbeit wird mit Anwendungen auf die Untersuchung der 2-Torsion halbeinfacher kompakter Liescher Gruppen abgeschlossen; z. B. ergibt sich, daß die einfachen kompakten Gruppen  $G_2$ ,  $F_4$  und  $E_8$  2-Torsion besitzen.

*T. Ganea.*

**Goto, Morikuni: Dense imbedding of topological groups.** Proc. Amer. math. Soc. 4, 653—655 (1953).

Several authors treated the problem of finding the condition when a continuous

representation of a Lie group into another is open [M. Goto, this Zbl. **41**, 360, 43, 31; M. Goto and H. Yamabe, this Zbl. **38**, 20; A. Malcev, Mat. Sbornik, n. Ser. **16** (58), 163—190 (1945); W. T. van Est, this Zbl. **44**, 258]. The object of the present paper is to give an extension of Est's result in a simple way. Let  $G$  be a locally compact connected group and  $A(G)$  be the group of all continuous automorphisms of  $G$ , topologized by uniform convergency in the wider sense. We call  $G$  a (CA) group if the group  $I(G)$  of all inner automorphisms of  $G$  is closed in  $A(G)$ . Then he infers the following main theorem: Let  $G$  be a locally compact connected and locally connected (CA) group, and  $H$  a locally compact group. Suppose that the center  $Z$  of  $G$  is compact. If there exists a continuous isomorphism  $q$  mapping  $G$  into  $H$ , then the image  $q(G)$  is a closed subgroup of  $H$ . As an application the author derives the condition, under which a local Lie group always generates a closed subgroup whenever it is imbedded in a Lie group as a local subgroup. T. Tannaka.

**Newburgh, J. D.: Metrization of finite dimensional groups.** Duke math. J. **20**, 287—293 (1953).

The author presents a conjecture which states that any locally compact, connected, finite dimensional topological group is separable metric, and proves this assertion affirmatively under some additional hypotheses, that is compactness or locally connectedness or being ( $L$ )-group or 1-dimensional group. — For the case of compact groups, he proves first that the inverse limit  $\lim \{G_\alpha; f_{\alpha\beta}\}$  of compact, connected,  $n$ -dimensional Lie groups is isomorphic to  $(C \times S)/D$ , where  $C$  is the limit of  $r$  dimensional toruses,  $S$  is the limit of compact, connected, semi-simple  $(n-r)$ -dimensional Lie groups, and  $D$  is a totally disconnected, closed, central subgroup.  $S$  is a semi-simple Lie group and  $C$  is isomorphic to the limit of an  $\omega$  subsequence of  $\{C_\alpha; g_{\alpha\beta}\}$  ( $g_{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta} C_\beta$ ), and hence also separable metric. From this follows that  $\lim \{G_\alpha; f_{\alpha\beta}\}$  is separable metric. Our assertion concerning the compact group can be easily reduced to the above-mentioned result. Secondly if  $G$  is a locally compact, locally connected group, there is a compact, connected subgroup  $H$  such that  $G/H$  satisfies the first countability axiom. From this and the first assertion our result concerning the groups with locally connectedness as additional hypothesis reduced to the following lemma: if  $H$  and  $G/H$  both satisfy first countability axiom so does also  $G$ . Notice that the group with the first countability axiom is always metrizable. In his last paragraph he shows that, if  $G$  is a locally compact, connected, not compact, 1-dimensional group, it is isomorphic to the topological group  $R$  of the real numbers, from which follows immediately our assertion for the case of 1-dimensional groups. T. Tannaka.

## Verbände. Ringe. Körper:

**Zappa, Guido: La teoria dei reticoli e le sue applicazioni a vari rami della matematica.** Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. **1**, 167—185 (1953).

Verf. berichtet in diesem Vortrag über die Grundbegriffe und -tatsachen der Verbandstheorie (vgl. G. Birkhoff, Lattice theory, rev. ed., New York 1948, dies. Zbl. **33**, 101), unter besonderer Berücksichtigung der Beziehungen zur Logik, zur Mengenlehre und Topologie, zur affinen, projektiven und algebraischen Geometrie, und zur Algebra. P. Roquette.

**McLaughlin, J. E.: Structured theorems for relatively complemented lattices.** Pacific J. Math. **3**, 197—208 (1953).

Es sei  $L$  ein relativ-komplementärer Verband von endlicher Dimension  $n > 1$ . An frühere Resultate anschließend (dies. Zbl. **42**, 26), untersucht Verf. die Zerlegbarkeit von  $L$ , die Dimension von gewissen Unterverbänden, und beweist, daß die Struktur von  $L$  durch die der teilweise geordneten Untermenge  $\mathfrak{P}$  vollständig bestimmt ist, wobei  $\mathfrak{P}$  aus dem Eins- und Nullelement, den maximalen Elementen und Punkten von  $L$  besteht. Es wird ferner gezeigt, daß die Struktur der einfachen  $L$  von ungerader Dimension und mit maximaler Projektivität mit Hilfe von Unterverbänden bestimmt werden kann. L. Fuchs.

**Jordan, Pascual: Zur Theorie der nichtkommutativen Verbände.** Akad. Wiss. Lit. Mainz, Abh. math.-naturw. Kl. **1953**, 61—64 (1953).

Es werden zwei Konstruktionsverfahren für Schrägverbände angegeben, welche



in einer späteren Arbeit (s. folgend. Ref.) als Sonderfälle eines allgemeineren Verfahrens dargestellt sind.

*G. Pickert.*

**Jordan, Pascual und Ernst Witt:** Zur Theorie der Schrägverbände. Akad. Wiss. Lit. Mainz, Abh. math.-naturw. Kl. 1953, 225—232 (1953).

Ein Schrägverband ist eine algebraische Struktur mit zwei durch  $\wedge$  und  $\vee$  bezeichneten assoziativen Verknüpfungen, in welcher die Regeln  $(a \wedge b) \vee a = a \wedge (b \vee a) = a$  gelten. Sind  $f, F$  Abbildungen eines Verbandes  $A$  (Verknüpfungen  $\cap$  und  $\cup$ ) in sich mit  $f f a = f a \subseteq a \subseteq F a = F F a$ ,  $f(a \cup b) = f a \cup f b$ ,  $F(a \cap b) = F a \cap F b$  für alle  $a, b$ , so wird die Menge der Elemente von  $A$  durch die Festsetzungen  $a \vee b = f a \cup b$ ,  $b \wedge a = b \cap F a$  zu einem Schrägverband  $W$ , in dem die Regeln  $a \wedge b \wedge a = a \wedge b$ ,  $a \vee b \vee a = b \vee a$  gelten;  $W$  erfüllt genau dann die Regeln  $(b \wedge a) \vee a = a \wedge (a \vee b) = a$  (III), wenn  $f F a \subseteq a \subseteq F f a$  für alle  $a$  gilt, und  $W$  erfüllt die Regel  $((c \wedge b) \vee a) \wedge (b \vee c) = (c \wedge b) \vee (a \wedge (b \vee c))$  (II), wenn  $A$  modular ist. Es gibt Schrägverbände, in welchen II aber nicht III, und solche, in welchen III aber nicht II gilt. *G. Pickert.*

**Klein-Barmen, Fritz:** Pseudoverband und Flechtwerk. Math. Ann. 126, 138—143 (1953).

L'A. étudie, sous le nom de „Flechtwerk“ les pseudo-treillis (F. Klein-Barmen, ce Zbl. 46, 26) qui sont des groupes par rapport à l'une de leurs opérations, par exemple l'intersection,  $\cap$ . Il considère, en particulier, le cas des pseudo-treillis faiblement distributifs et il illustre son étude par la construction de quelques exemples.

*R. Croisot.*

**Petresco, Julian:** Théorie relative des chaînes. IV. Normalités de Schreier et de Zassenhaus. C. r. Acad. Sci., Paris 236, 2029—2031 (1953).

(Cf. Part III, ce Zbl. 50, 27). L'A. étudie le problème de la normalité (sans considérations d'isomorphisme) suivant les méthodes de A. Uzkow (ce Zbl. 20, 206) et V. Kořinek (ce Zbl. 26, 387). Il recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour que le théorème de Schreier-Zassenhaus soit valable par rapport à une relation  $N$  de normalité (réflexive et entraînant la relation d'ordre du treillis) convenablement choisie; il est guidé dans son travail par le souci d'éviter, à l'exemple de A. H. Li vsic (ce Zbl. 37, 306) l'introduction des conditions préliminaires de A. Uzkow et V. Kořinek. Il examine le cas où les chaînes normales sont remplacées par des chaînes principales.

*R. Croisot.*

**Sholander, Marlow:** Postulates for Boolean algebras. Canadian J. Math. 5, 460—464 (1953).

L'A. caractérise les treillis (ou algèbres) de Boole, d'une part, par un ensemble de deux postulats portant sur l'addition et la multiplication de l'anneau de Boole associé et, d'autre part, par un ensemble renfermant un seul postulat portant sur une opération auxiliaire. A cet effet, il établit les résultats suivants: a) Un ensemble muni d'une opération notée  $+$ , dans lequel on pose  $a + b = (a, b)$ ,  $a + (b, c) = (a, b, c)$ ,  $a + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a, b_1, b_2, \dots, b_n)$ , et qui vérifie le postulat (P)  $(a, b, c, b, c, b, a) = b$  est un groupe de Boole (groupe dans lequel tout élément est involutif). b) Un ensemble muni de deux opérations notées  $+$  et  $\cdot$ , et qui vérifie, outre le postulat (P) pour  $+$ , le postulat (Q)  $(a, (c c) a, a(b + c), b(c d)) = (b a, (I) a, d(b + b), c(b d))$  (où  $I$  est un élément convenablement choisi) est un anneau de Boole avec unité  $I$ , donc un treillis de Boole. c) Un ensemble muni d'une opération notée  $/$ , dans lequel on pose  $a' = a/a$ ,  $a'' = (a')'$ , et qui vérifie le postulat (R)  $(x/(y'/y))'' = (a/(b'/c))'''$  entraîne  $x = (b/a)/(c'/a)$  est un treillis de Boole dans lequel on a  $x + y = (x/y)'$  et  $xy = x'/y'$ .

*R. Croisot.*

**Copeland sr., A. H. and Frank Harary:** A characterization of implicative Boolean rings. Canadian J. Math. 5, 465—469 (1953).

Es wird ein Kriterium dafür angegeben, daß in einem Booleschen Ring  $B$  eine Implikation (vgl. A. H. Copeland, dies. Zbl. 37, 306) definiert werden kann. Die

genaue Bedingung ist, daß für jedes Element  $a \neq 0$  der Ring  $B(-a)$  isomorph zu  $B$  ist. Wegen  $\omega_1 = \omega_2 \bmod (-a) \Leftrightarrow a \cdot \omega_1 = a \cdot \omega_2$  gehört zu jeder Restklasse  $C$  von  $B(-a)$  eindeutig ein Element  $a \cdot C$ . Jeder Isomorphismus  $\tau_a$  von  $B$  auf  $B/(-a)$  liefert also eine Abbildung  $T_{\tau_a}$  von  $B$  mit  $T_{\tau_a}(x) = a \cdot \tau_a(x)$ . Durch Wohlordnung von  $B$  läßt sich jedem  $d \in B$  ein Isomorphismus  $\sigma_d$  von  $B$  auf  $B/(-d)$  zuordnen, so daß  $T_{\sigma_a} T_{\sigma_b} = T_{\sigma_c}$  für geeignetes  $c$ . Es wird dann  $a \times b = c$  gesetzt, und die Implikation ist auf dieses „Produkt“ zurückführbar. *P. Lorenzen.*

**Foster, Alfred L.:** Generalized „Boolean“ theory of universal algebras. I. Subdirect sums and normal representation theorem. *Math. Z.* **58**, 306–336 (1953).

The author studies what he calls „Boolean extensions“ of an abstract algebra  $U$ . These form a generalization of the direct  $n$ -th power  $U^n$ , which corresponds to the special case where  $U$  is extended by the Boolean algebra of all subsets of  $\{1, \dots, n\}$ . — Let  $U$  be an abstract algebra and  $J$  a Boolean algebra (assumed to be complete in the case where  $U$  is infinite). Then the  $J$ -extension of  $U$  is defined as the set  $E$  of mappings of  $U$  into  $J$ :  $\alpha = (a_\mu)$  ( $\mu \in U$ ,  $a_\mu \in J$ ) such that  $a_\mu a_\nu = 0$  ( $\mu \neq \nu$ ) and  $\sum_{\mu \in U} a_\mu = 1$ .  $U$  is called the „kernel“, and  $J$  the „core“, of  $E$ .

If  $q(\xi, \eta, \dots)$  is any operation of  $U$ , or more generally, any mapping of  $U^n$  into  $U$ , then its extension to  $E$  is defined by the rule: If  $\xi = (x_\mu)$ ,  $\eta = (y_\mu)$ , ... are any elements of  $E$ , then  $[q(\xi, \eta, \dots)]_\mu = \sum x_\nu y_\beta \dots$ , where the sum is taken over all sets  $\nu, \beta, \dots$  such that  $q(x_\nu, y_\beta, \dots) = \mu$ . In this way  $E$  is defined as an algebra of the same type as  $U$ . The kernel  $U$  can be embedded isomorphically in  $E$ . The core  $J$  can also be so embedded, provided that  $U$  (and hence  $E$ ) is a „frame-algebra“. This is a generalization of a Boolean algebra defined as follows: An abstract algebra  $A$  is called a „binary algebra“ if its operations include a binary operation  $\times$ , for which elements  $0, 1 \in A$  exist satisfying  $0 \times \xi = \xi \times 0 = 0$ ,  $1 \times \xi = \xi \times 1 = \xi$ , for all  $\xi \in A$ . Now a binary algebra  $A$  is a „frame-algebra“ if there is a permutation of the elements of  $A$  which interchanges  $0$  and  $1$ , which can be expressed in terms of the operations defined on  $A$ , and whose inverse can also be so expressed. — In a  $J$ -extension  $E$  of a frame-algebra  $U$  every operation on  $E$  can be expressed in terms of its effect on  $U$  and the components of the arguments in  $E$  („normal decomposition“). With a suitable definition of „normal subdirect sum“ (of which the direct  $n$ -th power is a special case) it is shown that a Boolean extension of a frame-algebra  $U$  is essentially a „normal subdirect sum“ of  $U$ . Further a notion of „functional completeness“ of a binary algebra is introduced (satisfied e.g. by finite fields) which provides a criterion for a binary algebra to be a Boolean extension. *P. M. Cohn.*

**Riguet, Jacques:** Sur les algèbres extérieures et les algèbres de Clifford en tant que produits croisés et sur la notion de complexe simplicial. *C. r. Acad. Sci., Paris* **237**, 638–639 (1953).

$K$  sei ein Körper der Charakteristik  $\neq 2$ ,  $E$  eine atomistische verallgemeinerte Boolesche Algebra,  $P(K)$  die Menge aller endlichen Folgen aus  $K^E$ . Eine Matrix  $\gamma \in K^{E \times E}$  heißt ein Faktorensystem auf  $E$ , wenn  $\gamma(x, y) \gamma(x \oplus y, z) = \gamma(x, y \oplus z) \gamma(y, z)$  gilt,  $x \oplus y$  die symmetrische Differenz in  $E$ . Diese Bedingung ist notwendig und hinreichend dafür, daß die  $\gamma$ -Faltung  $u \cdot_\gamma v(x) = \sum_{y \oplus z = x} \gamma(y, z) u(y) v(z)$  in

$P(K)$  assoziativ wird. Als Spezialfälle erhält man die Cliffordsche Algebra auf  $E$  und die äußere Algebra von Grassmann auf  $E$ . Letztere erweist sich als äquivalent einem durch eine Inzidenzmatrix gegebenen simplizialen Komplex. *G. Köthe.*

**Maeda, Fumitomo:** A lattice formulation for algebraic and transcendental extensions in abstract algebras. *J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A* **16**, 383–397 (1953).

In einem vollständigen Verband  $L$  (z. B.: Verband aller Teilkörper eines vorgegebenen Körpers  $\Omega$ ) möge ein System  $\Phi$  von Verbandselementen ausgezeichnet sein (z. B.: System aller durch ein einzelnes Element  $\delta \in \Omega$  erzeugbaren Teilkörper), welches den folgenden beiden Bedingungen genügt: (1) Jedes  $a \in L$  ist die (verbandstheoretische) Vereinigung aller in  $a$  enthaltenen Elemente aus  $\Phi$ ; (2) Ist  $a \in \Phi$  und sind die  $a_i$  beliebig  $\in L$  mit  $a = \bigvee a_i$ , so gibt es schon endlich viele  $v_1, \dots, v_n$  mit  $a = a_{v_1} \cdot \dots \cdot a_{v_n}$ . (Im angegebenen Beispiel sind diese Bedingungen erfüllt.) In der Terminologie des Verf. ist  $L$  ein  $\Phi$ -relativ molekularer, oberhalb stetiger Verband. Es wird nun angenommen, daß für die Elemente aus  $\Phi$  ein Abhängigkeitsbegriff vorgegeben sei (im B.: die algebraische Abhängigkeit), welcher den bei v. d. Waerden, *Moderne Algebra* I, 3. Auflage (Heidelberg 1950, dies. Zbl. **37**, 19), § 64 angegebenen Grundsätzen, in leicht modifizierter Form, genügen soll. Hiervon ausgehend entwickelt Verf. im Rahmen der Verbandstheorie die Lehre von den abhängigen und transzendenten Erweiterungen nach dem Muster von Steinitz. Sind  $a, c \in L$  und ist  $a \leq c$ , so heißt  $c$  Erweiterung von  $a$ . Sie kann aus



$a$  durch Adjunktion einer gewissen Menge  $N$  von Elementen aus  $\Phi$  erhalten werden:  $c = a \cup \bigvee k$  mit  $k \in N$ . Eine „abhängige“ Erweiterung liegt vor, wenn jedes  $k \in N$  von der Menge  $S(a)$  aller in  $a$  enthaltenen Elemente aus  $\Phi$  abhängt. Dagegen heißt  $c$  „rein transzendente“ Erweiterung, wenn  $N$  im Sinne des vorgegebenen Abhängigkeitsbegriffes ein irreduzibles System über  $a$  ist, d. h. wenn kein  $k \in N$  von  $S(a) \cup N - k$  abhängt. Hauptresultat ist der Satz, daß jede Erweiterung von  $a$  in eine rein transzendente und eine darauffolgende abhängige Erweiterung aufgespalten werden kann, wobei die Mächtigkeit des beim ersten Schritt zu adjungierenden, über  $a$  irreduziblen, Systems durch  $c$  und  $a$  eindeutig bestimmt ist; sie wird der „Transzendenzgrad“ von  $c$  über  $a$  genannt. Bei den Beweisen macht Verf. von den diesbezüglichen Ergebnissen McLanes Gebrauch [dies. Zbl. 19, 392; vgl. auch: Birkhoff, Lattice theory, rev. ed., New York 1948 (dies. Zbl. 33, 101), insbes. S. 108]. — Außer auf die Theorie der Körpererweiterungen lassen sich die Ergebnisse des Verf. auch auf die Theorie der Erweiterungen konvexer Mengen anwenden.

P. Roquette.

**Osima, Masaru:** Supplementary remarks on the Schur relations for a Frobenius algebra. J. math. Soc. Japan 5, 24—28 (1953).

The Schur relations obtained in an earlier paper (this Zbl. 47, 268) for a Frobenius algebra, using corresponding bases  $(p_s)$ ,  $(q_s)$  belonging to a Nakayama automorphism  $\Phi$  of the algebra, are used here to deduce similar results by inverting the roles of the bases using the relation:  $u(q_s) v(p_s) = u(p_s^\Phi) v(q_s)$ . Special cases of such relations are considered for the symmetric algebras. It is also shown that, for the corresponding bases  $(a_s)$  and  $(b_s)$ ,  $\sum b_s a_s \neq 0$  except (only) when the underlying field is of prime characteristic  $p$  and this  $p$  divides the degree of each indecomposable constituent of the left-regular representation of the algebra defined by the Cartan base.

V. S. Krishnan.

**Albert, A. A.:** On commutative power-associative algebras of degree two. Trans. Amer. Math. Soc. 74, 323—343 (1953).

Es sei  $\mathfrak{A}$  eine einfache kommutative potenzassoziative Algebra über einem algebraisch-abgeschlossenen Körper mit zu 30 teilerfremder Charakteristik, und das Einselement 1 von  $\mathfrak{A}$  lasse sich als Summe zweier primitiver Idempotenter darstellen (d. h. der Grad von  $\mathfrak{A}$  ist = 2). Zu jedem Idempotent  $u \neq 1$  von  $\mathfrak{A}$  gibt es nun eine Zerlegung  $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_u(1) + \mathfrak{A}_u(2^{-1}) + \mathfrak{A}_u(0)$ , wobei  $\mathfrak{A}_u(k)$  ( $k = 0, 2^{-1}, 1$ ) gerade aus denjenigen  $x \in \mathfrak{A}$  mit  $ux = kx$  besteht. Als Hauptergebnis wird — auch bei nicht algebraisch-abgeschlossenem Grundkörper — der folgende Satz gewonnen:  $\mathfrak{A}$  ist genau dann eine Jordan-Algebra, wenn für jedes Idempotent  $u \neq 1$  die Beziehungen  $\mathfrak{A}_u(k) \mathfrak{A}_u(2^{-1}) \subseteq \mathfrak{A}_u(2^{-1})$  ( $k = 0, 1$ ) gelten. Ferner wird näher untersucht und verallgemeinert eine von L. Kokoris angegebene Klasse zentral einfacher kommutativer potenzassoziativer Algebren, welche keine Jordan-Algebren sind.

G. Pickert.

**Goldberg, S. I.:** Extensions of Lie algebras and the third cohomology group. Canadian J. Math. 5, 470—476 (1953).

The author is concerned with characterizing the third cohomology group of a Lie algebra  $L$  by extension properties of  $L$ . Let  $U$  be a representation module of  $L$ , and  $W$  a submodule of  $U$ . If the factor space  $U/W$ , qua representation module of  $L$ , is isomorphic to a module  $V$ , then  $U$  is called an extension of  $V$  by  $W$  with respect to  $L$ . The structure of  $U$  is completely determined by  $V$ ,  $W$  and a factor system  $\beta$ . This is expressed by writing  $U = (L, V, W, \beta)$ ; and it is shown that the extensions of  $V$  by  $W$  with respect to  $L$  correspond one-one to the factor systems taken modulo the splitting factor systems. — Denote by  $H^q(L, V)$  the  $q$ -th cohomology group of  $L$  by the representation module  $V$  (cf. Chevalley and Eilenberg, this Zbl. 31, 248). For a given extension  $U = (L, V, W, \beta)$  the invariant coboundary operator  $A$  is described, mapping  $H^q(L, V)$  into  $H^{q+1}(L, W)$ ; in particular,  $A$  maps  $H^q(L, V)$  into 0 if the factor system  $\beta$  splits. Now let  $U = (L, V, W, \beta)$  be a fixed extension. Denote by  $(L, V, g)$  an extension  $L^+$  of  $L$  by  $V$  with factor system  $g$  (an extension with abelian kernel  $V$ ; cf. Chevalley & Eilenberg l. c.). Then for a given extension  $L^+ = (L, V, g)$  there exists an extension  $L^{++} = (L, U)$  of  $L$  by  $U$  such that  $L^{++}/W \cong L^+$  if and only if the 3-cocycle  $A(g)$  is a coboundary. In particular, such an extension always exists if  $H^3(L, W) = 0$ .

P. M. Cohn.

**Mori, Mitsuya:** On the three-dimensional cohomology group of Lie algebras. J. math. Soc. Japan 5, 171—183 (1953).

Let  $L$  be a Lie algebra, then an  $L$ -kernel is defined as a pair  $\mathfrak{B} = (V, p)$ , where  $V$  is a Lie algebra and  $p: x \rightarrow p_x (x \in L)$  is a homomorphism of  $L$  into  $D(V)/I(V)$  [ $D(V)$  is the algebra

of derivations, and  $I(V)$  the algebra of inner derivations, of  $V$ ]. The representation  $\nu$  induces a representation  $P$  on the centre  $Z$  of  $V$ , and  $(Z, P)$  is called the centre of the  $L$ -kernel  $(V, \nu)$ . — The author considers  $L$ -kernels over a fixed centre  $(Z, P)$  and develops a theory corresponding to the theory of normal simple algebras with a fixed splitting field over a given centre (cf. Eilenberg and MacLane, this Zbl. 29, 341 for the analogue in groups). Thus he defines the equivalence of such  $L$ -kernels and a multiplication (direct product over  $Z$ ) and inversion (taking anti-isomorphic images) which depend only on the equivalence-class of the kernel chosen. Any extension of  $L$  by  $V$  gives rise to an  $L$ -kernel, and the  $L$ -kernels which can arise in this way are called extendible. The product of extendible kernels is again extendible, and the product of any kernel with its inverse is extendible. Two kernels  $\mathfrak{K}, \mathfrak{K}'$  are called similar, if there are extendible kernels  $\mathfrak{L}, \mathfrak{L}'$  such that  $\mathfrak{K} \times \mathfrak{L}$  and  $\mathfrak{K}' \times \mathfrak{L}'$  are equivalent. The similarity-classes form a group under the given multiplication with  $(Z, P)$  representing the unit-element. This group, the „similarity-group“ of  $(L, Z, P)$ , is shown to be isomorphic to a subgroup of the 3-dimensional cohomology-group  $H^3(L, Z, P)$ . Now the extensions of  $L$  by a given extendible  $L$ -kernel are considered, and the equivalence-classes of such extensions are shown to be in one-one correspondence with the elements of  $H^2(L, Z, P)$ . A further analysis of extensions by  $(Z, P)$  provides a method of enumerating all extensions of  $L$  by a given  $L$ -kernel. P. M. Cohn.

**McLaughlin, J. E. and Alex Rosenberg:** Zero divisors and commutativity of rings. Proc. Amer. math. Soc. 4, 203—212 (1953).

Ein nicht notwendig assoziativer Ring  $A$  heißt Alternativring, wenn für beliebige  $a, b, c \in A$  der Ausdruck  $(a b) c = a (b c)$  eine alternierende Funktion der Argumente ist. Es wird die Frage untersucht, welche Beziehungen zwischen Eigenschaften der Nullteiler eines Alternativrings  $A$  einerseits und der Kommutativität und Assoziativität von  $A$  andererseits bestehen. Diese Frage wird zunächst für Zornsche Ringe beantwortet; das sind Alternativringe, bei denen jedes Element  $a$  entweder nilpotent ist oder ein idempotentes Linksvielfaches  $ba = 0$  besitzt. Für einen Zornschen Ring  $A$  werden folgende Sätze bewiesen: 1. Bildet die Menge  $L$  der Linksnulzteiler aus  $A$  ein Ideal  $\neq A$ , dann ist  $L = R$  (= Radikal von  $A$ ) und  $A = R$  ist ein Schiefkörper. 2. Ist  $A = R$  ein Schiefkörper, dann gilt  $L = R$  oder  $L = A$ . 3. Ist das Zentrum  $C$  von  $A$  echt in  $A$  enthalten und liegen alle Nullteiler aus  $A$  bereits in  $C$ , dann ist entweder  $A$  ein Schiefkörper oder  $L = R = (0)$ . Im zweiten Falle ist  $A = R$  ein Körper  $F$  und  $C = R$  ein Körper  $Z$ . Hat  $F$  die Charakteristik 0, dann ist der Transzendenzgrad von  $F/Z$  mindestens gleich 2; hat  $F$  eine Primzahlcharakteristik, dann ist  $F$  eine rein inseparable Erweiterung von  $Z$  und der Transzendenzgrad von  $Z$  über seinem Primkörper ist mindestens gleich 2. — Durch den letzten Satz wird ein Ergebnis von I. N. Herstein (dies. Zbl. 40, 13) über endliche Ringe mit dieser Eigenschaft verallgemeinert. Die entsprechende Frage wird sodann bei beliebigen Alternativringen, bei denen alle nilpotenten Elemente im Zentrum enthalten sind, untersucht, sowie bei Banachalgebren, die alle topologischen Nullteiler im Zentrum enthalten. Im letzten Falle wird gezeigt, daß dann die Banachalgebra entweder kommutativ ist oder mit dem Quaternionenschiefkörper übereinstimmt. F. Kasch.

**Chamberlin, Eliot and James Wolfe:** Multiplicative homomorphisms of matrices. Proc. Amer. math. Soc. 4, 37—42 (1953).

Das vollständige Matrixensystem des Grades  $n$  mit Koeffizienten aus einem Ring  $R$  wird mit  $\mathfrak{M}_n$  bezeichnet. Die elementaren Matrizen, die die elementaren Transformationen darstellen, mögen  $\mathfrak{M}_n^*$  erzeugen.  $G$  sei ein multiplikatives System, dessen Elemente  $g$  mit  $g^2 = 1$  miteinander vertauschbar sind. Der Verf. beweist: Ist  $R$  kommutativ und  $n \geq 2$ , so wird jeder multiplikative Homomorphismus  $\Phi$  von  $\mathfrak{M}_n$  auf  $G$  in der Form  $\Phi(B) = q(\det B)$  ausgedrückt, wo  $q$  ein multiplikativer Homomorphismus von  $R$  in  $G$  ist. Im Fall  $n = 2$  muß dieser Hauptsatz stark modifiziert werden. K. Shoda.

**Charles, Bernard:** Un exemple général d'anneau commutatif d'opérateurs linéaires tel que  $R'' \neq r(R, I)$ . C. r. Acad. Sci., Paris 236, 2027—2029 (1953).

Es sei  $S$  ein Ring aus  $n$ -reihigen Matrizen über einem beliebigen Körper. Mit  $S'$  werde der  $S$  zugeordnete Ring bezeichnet, d. h. der Ring aller mit  $S$  vertauschbaren Matrizen. Verf. gibt für jedes  $n \geq 4$  einen kommutativen Ring  $R$  an, für den  $R'' = (R')'$  nicht mit dem aus  $R$  und der Einheitsmatrix erzeugten Ring übereinstimmt. R. Kochendörffer.

**Johnson, R. E.:** Representations of prime rings. Trans. Amer. math. Soc. 74, 351—357 (1953).

Die in einer vorangehenden Arbeit (dies. Zbl. 43, 267) begonnenen Strukturuntersuchungen über Primringe werden fortgesetzt. Dabei heißt ein Ring  $R$  ein Primring, wenn sein Nullideal ein Primideal ist. Unter einer Rechts-Struktur von  $R$  versteht Verf. eine Teilmenge  $\mathfrak{R}$  der Menge



aller Prim-Rechtsideale, die als Bildbereich einer gewissen Hüllenoperation auftritt, wie sie in der ersten Arbeit sehr eingehend behandelt wurde. Entsprechend wird der Begriff der Links-Struktur definiert, und alle folgenden Untersuchungen beziehen sich auf solche Primringe, die sowohl eine Rechts- wie auch eine Links-Struktur besitzen. Sind  $\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{Q}$  eine Rechts- bzw. Links-Struktur von  $R$ , so können  $\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{Q}$  zunächst als Verbände aufgefaßt werden. Zu jedem Atom  $N$  von  $\mathfrak{R}$  gibt es dann ein Atom  $M$  von  $\mathfrak{Q}$  mit  $MN \neq 0$ , und der Ring  $K = N \cap M$  besitzt stets einen Quotienten-Schiefkörper.  $N$  kann als  $K$ -Modul aufgefaßt werden. Das Hauptresultat der Arbeit lautet:  $R$  ist ein  $n$ -fach transitiver Ring von  $K$ -Lineartransformationen auf  $N$  für alle  $n$ , die die  $K$ -Dimension von  $N$  nicht überschreiten. Am Ende der Untersuchungen wird als sehr illustratives Beispiel der Ring aller  $(2 \times 2)$ -Matrizen genannt, deren Elemente entweder nur gerade oder nur ungerade ganze Zahlen sind.

*K.-J. Kowalsky.*

**Herstein, I. N.:** The structure of a certain class of rings. Amer. J. Math. 75, 864—871 (1953).

Let  $R$  be a ring with center  $Z$ . For each  $a \in R$ , let there be associated a polynomial  $q_a(t)$  having rational integers as coefficients and without absolute term. First it is proved, by making use of a valuation-theoretical lemma in Nagata-Nakayama-Tuzuku [Nagoya Math. J. 6, 59—61 (1953)] and Jacobson's [Ann. of Math., II. Ser. 46, 695—707 (1945)] generalizations of the theorems of Noether and Wedderburn on algebraic division algebras, that if  $R$  is a division ring and  $a^r q_a(a) - a^r \in Z$  ( $r > 0$  depending on  $a$ ) for every  $a \in R$ , then  $R = Z$ , i. e.  $R$  is commutative, which generalizes results of Kaplansky (this Zbl. 43, 37) and Ikeda (this Zbl. 48, 262). For the general case of  $R$  which is not a division ring,  $r$  is assumed to be 1, and the main theorem of the paper thus states that if  $a q_a(a) - a \in Z$  for every  $a \in R$ , then  $R = Z$ . The proof proceeds stepwise on considering first a semisimple ring and then a subdirectly irreducible ring and makes use of techniques which are generalizations of those in the author's former papers (this Zbl. 43, 266; 50, 29). *T. Nakayama.*

**Herstein, I. N.:** A theorem on rings. Canadian J. Math. 5, 238—241 (1953).

As an extension of a theorem of Kaplansky (this Zbl. 43, 37) the author proved the following theorems. (1) Suppose that  $R$  is a ring with center  $Z$  such that  $x^{n(x)} \in Z$  for all  $x \in R$ . Then  $R$  is non-commutative only if every element in the commutator ideal of  $R$  is nilpotent. (2) Under the same assumption as in (1)  $R$  is a commutative ring if  $R$  possesses no non-zero nilideals. *Y. Kawada.*

**Kleinfeld, Erwin:** Simple alternative rings. Ann. of Math., II. Ser. 58, 544—547 (1953).

Verf. beweist folgenden Hauptsatz: Ein einfacher alternativer Ring ist entweder eine Cayley-Dickson-Algebra oder assoziativ. Der Ring heißt dabei einfach, wenn er keine eigentlichen zweiseitigen Ideale enthält und kein Nilring ist. Diese Aussage konnte bisher nur mit zusätzlichen Voraussetzungen (vgl. etwa E. Kleinfeld, dies. Zbl. 50, 28) gewonnen werden. Zum Beweis wird neben diesen früheren Resultaten insbesondere folgende neue, für allgemeine alternative Ringe  $R$  gültige, Identität verwendet:  $(v^4 x) y = v^4 (x y)$ , wo  $v = r s - s r$  und  $x, y, r, s$  beliebige Elemente aus  $R$  sind. *E. Trost.*

**Mauler, Heribert:** Eine Darstellung für Identitäten zwischen den Kommutatoren eines Ringes. Math. Ann. 126, 410—417 (1953).

If  $A$  is any associative ring, a Lie ring  $[A]$  can be defined on the additive group of  $A$  by taking the Lie product of two elements  $x, y \in A$  to be  $x \cdot y = xy - yx$ . Conversely, the Birkhoff-Witt theorem shows how a Lie ring may be embedded in an associative ring: Let  $L$  be a Lie ring which is a  $K$ -module with a basis over  $K$ , where  $K$  is some operator domain. Then there is an associative ring  $A$  (unique up to isomorphism) such that i) the Lie ring  $[A]$  defined on  $A$  contains a subring  $L^*$  isomorphic to  $L$ , ii)  $L^*$  forms a set of generators for the associative ring  $A$ , and iii) if  $A$  is any associative ring whose Lie ring  $[A]$  contains a subring  $L^*$  which is isomorphic to  $L$  and, qua subset of  $A$ , generates  $\bar{A}$ , then there is a homomorphism of  $A$  onto  $A$  which maps  $L^*$  onto  $L^*$ . — The author gives a proof of this theorem in which the monomials  $p$  of the free associative ring on  $x_1, x_2, \dots$  are interpreted as points, and elements of the form  $p(x_i x_j - x_j x_i) q$  (where  $p$  and  $q$  are monomials) as directed segments going from the point  $p x_i x_j q$  to  $p x_j x_i q$ . In this way an identity between commutators in a free associative ring is made to correspond to a closed chain. By an analysis of Witt's proof (this Zbl. 16, 244) the

author finds a generating set for the closed chains and uses this fact to show that a homomorphism of  $L$  into  $[A]$  for a suitably chosen associative ring  $A$  (viz. the universal associative ring of  $L$ ) is one-one. P. M. Cohn.

**Nagata, Masayoshi:** On the theory of Henselian rings. Nagoya math. J. 5, 45—57 (1953).

Beim Referat dürfen wir uns auf den Fall beschränken, daß der betrachtete, im übrigen völlig willkürliche, kommutative Integritätsbereich  $\mathfrak{o}$  nur ein einziges maximales Primideal  $\mathfrak{m}$  besitzt, und daß allein sein Verhalten relativ  $\mathfrak{m}$  interessiert. Denn der Fall eines beliebigen Primideals  $\mathfrak{p}$  aus  $\mathfrak{o}$  kann leicht durch Quotientenringbildung auf unseren Spezialfall zurückgeführt werden. Sei  $K$  der Quotientenkörper von  $\mathfrak{o}$ ,  $\tilde{K}$  ein separabler, nicht notwendig endlicher Normaloberkörper von  $K$  und  $\tilde{\mathfrak{m}}$  ein maximales Primideal aus dem Ring  $\tilde{\mathfrak{o}}$  aller von  $\mathfrak{o}$  ganz abhängigen  $\tilde{K}$ -Elemente. Dann definiert Verf. in üblicher Weise den zu  $\tilde{\mathfrak{m}}$  über  $K$  gehörigen Zerlegungskörper  $K_2$  und beweist für den Zerlegungsring  $\mathfrak{o}_2 = \tilde{\mathfrak{o}} \cdot K_2$  und sein maximales Primideal  $\mathfrak{m}_2 = \tilde{\mathfrak{m}} \cdot \mathfrak{o}_2$  die geläufigen Tatsachen, daß  $\tilde{\mathfrak{m}}$  das einzige über  $\mathfrak{m}_2$  liegende  $\tilde{\mathfrak{o}}$ -Primideal ist, und daß die Restklassenkörper  $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$  und  $\mathfrak{o}_2/\mathfrak{m}_2$  identifiziert werden können, sowie vor allem (ganz einfach) den von vornherein plausiblen, aber in der allgemeinen, vom Ref. entwickelten Zerlegungstheorie bisher noch fehlenden Satz:  $\mathfrak{m}_2$  ist die zu  $\mathfrak{m}_2$  gehörige Primärkomponente von  $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{o}_2$ . Wichtig für seine speziellen Untersuchungen ist daneben vor allem der Hilfssatz: Es sei  $\tilde{K}$  endlich über  $K$ , und es liege  $a \in \mathfrak{o}_2$  zwar in  $\tilde{\mathfrak{m}}$ , aber in keinem anderen maximalen Primideal von  $\tilde{\mathfrak{o}}$ . Dann ist  $a$  über  $K$  Nullstelle eines irreduziblen Polynoms  $f(x) = x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_n$  ( $\alpha_i \in \mathfrak{o}$ ), für das  $f(x) \equiv x^{n-1}(x - \alpha_1) \pmod{\mathfrak{m}_2}$ ;  $\alpha_1 \equiv a \pmod{\mathfrak{m}_2}$ . — Verf. nennt nun  $\mathfrak{o}$  „Henselsch“ (relativ  $\mathfrak{m}$ ), wenn das bekannte Henselsche Lemma gilt (Schluß von einer Zerlegung von  $f(x) = x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_n$  ( $\alpha_i \in \mathfrak{o}$ ) mod  $\mathfrak{m}$  in teilerfremde Faktoren auf eine zugehörige Zerlegung von  $f(x)$  in  $\mathfrak{o}[x]$ ), und beweist auf Grund des oben ausführlich formulierten Hilfssatzes leicht:  $\mathfrak{o}$  ist dann und nur dann Henselsch, wenn bei beliebiger Wahl des Normalkörpers  $\tilde{K}$  immer in  $\tilde{\mathfrak{o}}$  nur ein einziges maximales Primideal  $\tilde{\mathfrak{m}}$  liegt. Er definiert dann bei beliebigem  $\mathfrak{o}$  den zu  $\mathfrak{o}$  gehörigen Henselring als den (bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten) Ring  $\mathfrak{H}_{\mathfrak{o}}$ , den man erhält, wenn man für  $\tilde{K}$  den Körper aller über  $K$  separablen Elemente, für  $\tilde{\mathfrak{m}}$  ein beliebiges maximales Primideal aus  $\tilde{\mathfrak{o}}$  wählt.  $\mathfrak{H}_{\mathfrak{o}}$  ist offenbar ein „kleinster“, von  $\mathfrak{o}$  ganz abhängiger Henselring. Es folgen Anwendungen auf allgemeine und spezielle Bewertungsringe, wobei etwa der Satz hervorgehoben sei: Sind  $\mathfrak{p}_1$  und  $\mathfrak{p}_2$  zwei Primideale aus dem Bewertungsring  $\mathfrak{B}$ , und ist  $\mathfrak{B}_{\mathfrak{p}_2}$  Henselsch, so ist es auch  $\mathfrak{B}_{\mathfrak{p}_1}$ . ( $\mathfrak{B}_{\mathfrak{p}}$  zu  $\mathfrak{p}$  gehöriger Primidealquotientenring.) Auf das „Henselsche Lemma für Bewertungsringe“ und eine Verallgemeinerung sei hier nur kurz hingewiesen. (Das Henselsche Lemma besagt im Sinne von O. Schilling [Amer. J. Math. 65, 309—334, 1943] im wesentlichen:  $K$  ist hinsichtlich der Bewertung  $B$  dann und nur dann relativ vollständig, wenn der zugehörige Bewertungsring  $\mathfrak{B}$  Henselsch ist). Ein erster Anhang bringt einen einfachen Beweis des Satzes, daß (bei Benutzung der gleichen Terminologie wie oben) der Quotientenring  $\mathfrak{o}_{\mathfrak{m}}$  stets einen Bewertungsring darstellt, wenn  $\mathfrak{o}$  ein Bewertungsring ist. Im zweiten Anhang wird ein diskreter Henselscher Bewertungsring  $\mathfrak{o}$  angegeben, der selbst nicht vollständig ist, der aber die Eigenschaft besitzt, daß für eine endliche (diesmal inseparable) normale Erweiterung  $\tilde{K}$  von  $K$  der Bewertungsring  $\tilde{\mathfrak{o}}$  vollständig wird. W. Krull.

**Nagata, Masayoshi:** Corrections to my paper: „On the structure of complete local rings“. Nagoya math. J. 5, 145—147 (1953).

Es wird ein Versehen, das beim Beweis von „Proposition 2“ der genannten Arbeit (dies. Zbl. 39, 263) unterlaufen war, verbessert. W. Krull.

**Nakayama, Tadasi:** On the commutativity of certain division rings. Canadian J. Math. 5, 242—244 (1953).

As an extension of a theorem of Kaplansky (this Zbl. 43, 37) the author proves the following theorem. Let  $A$  be a division ring and  $Z$  be its center. Let  $r$  be a natural number and  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  be  $r$  (fixed) non-zero elements in  $Z$ . Suppose that there exist, for each element  $a$  of  $A$ ,  $r$  natural numbers  $n_1(a), n_2(a), \dots, n_r(a)$  such that  $n_1(a) < n_i(a)$  ( $i = 2, \dots, r$ ) and  $a^{n_1(a)} \alpha_1 + a^{n_2(a)} \alpha_2 + \dots + a^{n_r(a)} \alpha_r \in Z$ . Then necessarily  $A = Z$ , that is,  $A$  is commutative. The proof is based on the following arithmetical lemma. Let  $Z$  be a field which is either (i) of characteristic 0, or (ii) of characteristic  $p > 0$  and non-algebraic over its prime field, and let  $L$  be an algebraic proper extension of  $Z$  which is not purely inseparable over  $Z$ . Then there exists a pair of distinct (special) exponential valuations  $q_1, q_2$  in  $L$  which coincide on  $Z$ . [This result is not proved here, but is proved by N. Nagata, T. Nakayama, T. Tuzuku, Nagaya Math. J. 6, 59—61 (1953)]. Using this lemma the theorem can be proved as in the above cited paper of Kaplansky. Y. Kawada.



Moriya, Mikao: Theorie der Derivationen und Körperdifferenten. Math. J. Okayama Univ. 2, 111—148 (1953).

The author develops the theory of different in a ring  $\mathfrak{D}$ , where the fundamental theorem of ideal theory holds, from the standpoint of derivations. This was done by the reviewer (this Zbl. 44, 267) after the idea of A. Weil [Bull. Amer. Math. Soc. 49, 41 (1943) (abstract)] in the case of algebraic number fields. Let  $k$  be the quotient field of  $\mathfrak{o}$ ,  $K$  be a finite separable extension over  $k$  and  $\mathfrak{D}$  be the ring of integers in  $K$  over  $\mathfrak{o}$ . For an ideal  $\mathfrak{A}$  of  $\mathfrak{D}$  a derivation  $D$  of  $\mathfrak{D}$  in  $\mathfrak{D}/\mathfrak{A}$  is defined by a module-homomorphism of  $\mathfrak{D}$  in  $\mathfrak{D}/\mathfrak{A}$  such that  $D(\alpha\beta) = \alpha D(\beta) + D(\alpha)\beta$  ( $\alpha, \beta \in \mathfrak{D}$ ) holds. The totality of  $D$  such that  $D(\mathfrak{o}) = 0$  makes an  $\mathfrak{D}$ -module  $\mathfrak{D}(\mathfrak{D}, \mathfrak{o}; \mathfrak{D}/\mathfrak{A})$ . The length of the composition sequence of  $\mathfrak{D}$ -submodules of this  $\mathfrak{D}$ -module is called the dimension of  $\mathfrak{D}(\mathfrak{D}, \mathfrak{o}; \mathfrak{D}/\mathfrak{A})$ . It is proved that this dimension is bounded ( $\leq d$ ) when  $\mathfrak{A}$  varies over all ideals of  $\mathfrak{D}$  and there exists the maximal ideal  $\mathfrak{D}_0$  of  $\mathfrak{D}$  for which the dimension of  $\mathfrak{D}(\mathfrak{D}, \mathfrak{o}; \mathfrak{D}/\mathfrak{D}_0)$  is  $d$ . This ideal  $\mathfrak{D}_0$  is called the quasi-different of  $K/k$ . Let  $\mathfrak{D}_0 = \mathfrak{P}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{P}_m^{e_m}$  be the decomposition into the product of prime ideals. Let  $d_i$  be the dimension of  $\mathfrak{D}(\mathfrak{D}, \mathfrak{o}; \mathfrak{D}/\mathfrak{P}_i^{e_i})$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ). Then  $d_i \geq e_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ). The ideal  $\mathfrak{D} = \prod \mathfrak{P}_i^{d_i}$  is called the different of  $K/k$ . It can be proved that this definition of different coincides with that of Dedekind. In case where the residue class field of  $\mathfrak{o}$  with respect to an arbitrary prime  $\mathfrak{p}$  is perfect, the quasi-different of  $K/k$  coincides with the different of  $K/k$ .  
Y. Kawada.

Kasch, Friedrich: Invariante Untermoduln des Endomorphismenrings eines Vektorraumes. Arch. der Math. 4, 182—190 (1953).

Es sei ein Vektorraum über einem Schiefkörper  $K$  als Skalarenkörper, und die Dimension  $n$  von  $V$  nach  $K$  sei größer als 1. Ferner sei  $A$  der  $K$ -Endomorphismenring von  $V$ . Dann kann man wie üblich  $K$  in  $A$  einbetten; dabei stimmt das Zentrum  $Z$  von  $K$  mit dem von  $A$  überein. Ist insbesondere  $n$  endlich, so ist  $A$  ein einfacher Ring mit 1-Element und Minimalbedingung ( $A$  heiße kurz ein  $e$ -Ring), und umgekehrt ist jeder  $e$ -Ring stets zum Endomorphismenring eines endlichdimensionalen Vektorraumes über einem Schiefkörper isomorph. Ein Untermodul (Unterring) von  $A$  heißt invariant, wenn er bei Anwendung eines beliebigen inneren Automorphismus von  $A$  als Ganzes invariant bleibt. Sind nun  $v_i, v_j$  Vektoren aus einer beliebig festgelegten Basis  $M$  von  $V$ ,  $K$ , so bezeichnet  $d_{ij}$  diejenige Abbildung aus  $A$ , die  $v_i$  in  $v_j$  und alle anderen Basisvektoren in Null überführt. Unter der Einschränkung, daß  $K$  kein Primkörper von der Charakteristik 2 oder  $n > 2$  ist, beweist Verf. folgende Sätze: 1. Jeder invariante Untermodul von  $A$  enthält die Elemente  $K d_{ij}$  ( $i \neq j$ ),  $K(d_{ii} - d_{jj})$  und  $(k_1 k_2 - k_2 k_1) d_{ii}$  ( $k_1, k_2 \in K$ ), wenn er nicht in  $Z$  liegt. 2. Ist  $R$  ein invarianter Ring von  $A$ , so ist entweder  $R \subseteq Z$  oder  $R$  ist dicht (d. h. zu beliebig endlich vielen, über  $K$  linear unabhängigen Vektoren  $v_1, \dots, v_r$  und zu  $r$  beliebigen Vektoren  $w_1, \dots, w_r$  aus  $V$  existiert stets eine Abbildung aus  $R$ , welche die  $v_i$  in die  $w_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) überführt. Ist insbesondere  $A$  ein  $e$ -Ring, so ist entweder  $R \subseteq Z$  oder  $R = A$ . (Eine Verallgemeinerung des Satzes von H. Cartan über invariante Unterkörper eines Schiefkörpers.) 3. Der durch alle Kommutatoren von  $A$  erzeugte Modul ist dicht. Ist  $A$  ein  $e$ -Ring, so stimmt er mit  $A$  überein. Als Folgerungen der obigen Sätze gelten: 1.  $A$  sei nicht von der Charakteristik 2. Dann ist der durch alle Quadrate der Elemente aus  $A$  erzeugte Modul dicht, stimmt also mit  $A$  überein, wenn  $A$  ein  $e$ -Ring ist. 2. Der durch alle  $r$ -ten Potenzen der Elemente aus  $A$  erzeugte Ring ist dicht, ist also mit  $A$  identisch, wenn  $A$  ein  $e$ -Ring ist. Weiter beweist Verf. einige Sätze über die Existenz der Normalbasen eines  $e$ -Ringes  $A$ . Dabei ist  $A$  als der Endomorphismenring eines  $n$ -dimensionalen Vektorraumes  $V$  über einem Schiefkörper  $K$  betrachtet. Unter Benutzung aller obigen Bezeichnungen gelten: 1. Erzeugt  $k$  eine Normalbasis von  $K/Z$ , so erzeugen die  $k d_{ii}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) eine Normalbasis von  $A/Z$ . 2. Ist ein  $e$ -Ring  $A$  über dem Zentrum  $Z$  von einem endlichen Rang ( $A$  ist also eine einfache Algebra) und enthält  $K$  einen maximalen kommutativen über  $Z$  galoisschen Unterkörper  $G$ , so erzeugen die  $g d_{ii}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) eine Normalbasis von  $A/Z$ , wenn  $g$  eine Normalbasis von  $G/Z$  erzeugt.

M. Moriya.

Wolf, Paul: Galoissche Algebren mit vorgegebener Galoisgruppe über einem Teilkörper des Grundkörpers. II. Math. Nachr. 10, 233—238 (1953).

Let  $K/\Omega$  be a Galois algebra, in the sense of Hasse, with Galois group  $\mathfrak{G}$ .  $K$  is a direct sum of mutually orthogonal fields all isomorphic to a Galois extension  $\tilde{K}/\Omega$  whose Galois group  $\mathfrak{G}^*$  may be considered as a subgroup of  $\mathfrak{G}$ . Let now  $\Omega$  be galoisian over a subfield  $\Omega_0$ , with Galois group  $\mathfrak{g}$ , and assume that  $K/\Omega_0$  is a Galois algebra with Galois group  $\mathfrak{G}_0$ . It is shown that the extension  $\mathfrak{G}_0$  of  $\mathfrak{G}$  by  $\mathfrak{g}$  possesses a „generating system“ (consisting of automorphisms and a factor set) which may be looked upon as a generating system for an extension  $\mathfrak{G}_0^*$  of  $\mathfrak{G}^*$  by  $\mathfrak{g}$  and, moreover,  $\mathfrak{G}_0^*$  may be regarded as the Galois group of  $\tilde{K}/\Omega_0$ . Further, it is proved that there is a „Verkettungssystem“ of  $K/\Omega$  with  $\mathfrak{G}_0$ , in the sense of the 1st report (this Zbl.

50. 34), which lies in the group algebra of  $\mathfrak{G}^*$  and may thus be looked upon as a Verkettungssystem of  $\tilde{K}/\Omega$  with  $\mathfrak{G}_0^*$ . T. Nakayama.

**Krasner, Marc:** La non-existence des extensions d'une certaine forme. C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 370—372 (1953).

The author proves the following generalisation of a recent result of his (this Zbl. 50, 34): Let  $k$  be a field which is not an algebraic extension of a Galois field and  $K$  a separable algebraic extension of  $k$  such that each  $\lambda \in K$  is a zero of a polynomial  $f_\lambda(x) \in k[x]$  of the form  $f_\lambda(x) = x^{n(\lambda)} - a(x) - q(x; \lambda)$ , where  $a(x)$  is a polynomial belonging to  $k[x]$ , independent of  $\lambda$  and exactly divisible by a certain power  $x^m$  of  $x$ , where  $n(\lambda) > m$  and where  $q(x; a) \in k[x]$  is a polynomial in  $x$  of degree  $< m$ , then  $(K:k) \leq m$ . J. C. Shepherdson.

**Cohn, Paul and Kurt Mahler:** On the composition of pseudo-valuations. Nieuw Arch. Wiskunde, III. Ser. **1**, 161—198 (1953).

The paper deals with certain real-valued functions  $q$  on a commutative ring  $R$  with 1, and especially with pseudo-valuations  $w$  on  $R$  (Mahler, this Zbl. **13**, 51). Three unary operations are introduced in the set of all these  $q$ , and four binary operations in the set of all  $w$ . The properties of these operations, their mutual relationships, and connexions between them and the ideal theory of  $R$  are established. — A real-valued function  $q(a)$  defined for all elements  $a$  in a commutative ring  $R$  with unit element 1 is called admissible if  $q(0) = 0$ ,  $q(a) \geq 0$ , subadditive if  $q(a+b) \leq q(a) + q(b)$ , and submultiplicative if  $q(ab) \leq q(a)q(b)$ . If all these conditions are satisfied  $q$  is a pseudo-valuation.  $q_1 \leq q_2$  is defined to mean  $q_1(a) \leq q_2(a)$  for all  $a$  in  $R$ . Let  $A_R$  be the set of all admissible functions on  $R$  and  $P_R$  its subset of pseudo-valuations. In  $A_R$  three unary operations  $\times, +, \oplus$  can be defined by

$$q^\times(a) = \inf_{H: x_i = a} \prod_i q(x_i), \quad q^+(a) = \inf_{\Sigma x_i = a} \max_i q(x_i), \quad q^-(a) = \inf_{\Sigma x_i = a} q\left(\sum_i q(x_i)\right).$$

$q^\times$  is submultiplicative,  $q^+$  is subadditive, and both  $q^+$  and  $q^-$  are submultiplicative if  $q$  is submultiplicative.  $q^{\times+}$  turns out to be the greatest pseudo-valuation majorised by  $q$ , and  $q^{+-}$  the greatest non-archimedean pseudo-valuation majorised by  $q$ . In  $P_R$  four commutative and associative binary operations  $\cdot, \odot, \times, \otimes$  can be defined by

$$w_1 \cdot w_2(a) = \inf \max_i (w_1(x_i) w_2(y_i)), \quad w_1 \odot w_2(a) = \inf \sum w_1(x_i) w_2(y_i), \\ w_1 \times w_2(a) = \inf \max_i (w_1(x_i), w_2(y_i)), \quad w_1 \otimes w_2(a) = \inf \sum (w_1(x_i) + w_2(y_i)).$$

The operations  $\cdot$  and  $\times$  produce non-archimedean pseudo-valuations, and both  $w_1 \cdot w_2 \leq w_1 \cdot w_2$  and  $w_1 \times w_2 \leq w_1 \otimes w_2$  hold. — Two elements  $q_1, q_2$  of  $A_R$  are called equivalent,  $q_1 \sim q_2$ , if, for any sequence  $a_n$  in  $R$ ,  $q_1(a_n) \rightarrow 0$  if and only if  $q_2(a_n) \rightarrow 0$ , and they are called strongly equivalent,  $q_1 \approx q_2$ , if there exists a constant  $k$  such that  $q_1 \leq k q_2$  and  $q_2 \leq k q_1$ . Operations which can be defined on the  $\sim$ -classes ( $\approx$ -classes) in the natural way are called  $\sim$ -invariant ( $\approx$ -invariant). Of the unary operations in  $A_R$ ,  $\cdot$  and  $\otimes$ , but not  $\times$ , are  $\sim$ -invariant. All four binary operations in  $P_R$  defined above are  $\approx$ -invariant. Only  $\cdot$  is always  $\sim$ -invariant, so is  $\cdot$  if applied to bounded pseudo-valuations, and  $\otimes$  if applied to bounded non-archimedean pseudo-valuations. For bounded non-archimedean pseudo-valuations  $w_1, w_2, w_3$  we have  $w_1 \cdot w_2 \leq w_1 \cdot w_2$  (where  $\cdot$  stands for the quasi ordering of  $P_R$  inducing the  $\sim$ -classes of  $P_R$  which was introduced on loc. cit.),  $w_1 \times w_2 \cdot w_3 \sim (w_1 \times w_2) \cdot (w_1 \times w_3)$ ,  $w_1 \times w_2 \leq (w_1 + w_2) \times (w_1 \cdot w_2)$ . If  $q(a) = \min(u(a), v(a))$  where  $u, v \in P_R$  the strong equivalences  $q^{\times+} \sim u \cdot v$  and  $q^{+-} \approx u \cdot v$  establish a relationship between some of the unary and binary operations introduced in this paper. — A pseudo-valuation  $w$  is called special if there exists an ideal  $\mathfrak{a}$  of  $R$  such that  $w(a) = w_{\mathfrak{a}}(a) = 0$  if  $a \in \mathfrak{a}$  and  $\infty$  otherwise. For special pseudo-valuations we have  $w_{\mathfrak{a}} = w_{\mathfrak{b}} = w_{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}} = w_{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}}$ , but only  $w_{\mathfrak{a}} \otimes w_{\mathfrak{b}} \approx w_{\mathfrak{a}} \cdot w_{\mathfrak{b}} = w_{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}}$ . The set of ideals of  $R$  and the set of special pseudo-valuations on  $R$  form anti-isomorphic complete lattices. — Some examples from algebraic number fields and rings of algebraic integers and eight „multiplication tables“ give excellent illustrations of the above definitions. A. Jaeger.

**Verhoeff, J.:** On pseudo-convergent sequences. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **56**, 401—404 (1953).

A sequence  $\{a_i\}$  of elements in a field  $K$  with a non-archimedean valuation is called pseudo-convergent, if either  $a_{i+1} = a_i$  for all large  $i$ , or  $a_{i+1} - a_i < a_i - a_{i-1}$  for all large  $i$ . Using algebraic extensions of  $K$ , Ostrowski (this Zbl. **10**, 150) first proved that if  $\{a_i\}$  is a pseudo-convergent sequence in  $K$  and  $f(x)$  a polynomial with coefficients in  $K$ , then  $\{f(a_i)\}$  is also pseudo-convergent. The author



gives a proof which avoids these extensions and points out that an earlier attempt at such a proof by Loonstra is incomplete by showing that one of the lemmas used there is incorrect.

P. M. Cohn.

**Kasch, Friedrich:** Über die Riccatische Differentialgleichung in Körpern der Charakteristik  $p$ . Arch. der Math. 4, 17—22 (1953).

Verf. zeigt, daß jede Riccatische Differentialgleichung in einem Körper  $K$  der Charakteristik  $p > 2$  (im Sinne der modifizierten Differentiationstheorie von F. K. Schmidt, vgl. dies. Zbl. 47, 36) in einer quadratischen Erweiterung von  $K$  lösbar ist. Ist nämlich  $b$  irgendeine nichttriviale Lösung von  $3D^3y + 2aDy + (Da)y = 0$  ( $a \in K$ ), so erweist sich jede Nullstelle von  $b y^2 + (Db)y + ab + D^2b$  als Lösung des Spezialfalles  $Dy = y^2 + a$ , und auf ihn kann jede Riccatische Differentialgleichung durch eine lineare Substitution zurückgeführt werden. Für den Existenzbeweis von  $b$  werden Eigenschaften der Differentialpolynome über  $K$  im Sinne der modifizierten Theorie benutzt.

A. Jaeger.

### Zahlkörper. Funktionenkörper:

**Kaplansky, Irving:** Quadratic forms. J. math. Soc. Japan 5, 200—207 (1953).

$K$  sei ein nicht formal reeller Körper, folglich läßt sich  $-1$  als eine Quadratsumme in  $K$  schreiben. Dem Körper werden folgende drei Invarianten zugeordnet:  $A = A(K)$  die Anzahl der Quadratklassen von  $K$ , d. h. die Faktorgruppe  $(x)/(x^2)$ ,  $x$  bedeutet das allgemeine von 0 verschiedene Element von  $K$ .  $B = B(K)$  die kleinste Zahl  $n$  derart, daß  $-1$  die Summe von  $n$  Quadraten aus  $K$  ist.  $C = C(K)$  die kleinste Zahl  $n$  derart, daß jede quadratische Form in  $n+1$  Variablen die 0 eigentlich darstellt. Eine Reihe von eleganten Schlüssen ergibt die folgenden Sätze: 1)  $B = 1, 2, 4, 8$  oder ein Vielfaches von 8. 2)  $B \leq A$ . 3) Wenn  $A > 2$ , so  $B < A$ . 4)  $C \leq AB$ . 5)  $C \leq \frac{1}{2}AB$ , falls  $B \geq 2$ . 6)  $C \leq \frac{1}{4}AB$ , falls  $B \geq 4$ . 7)  $C \leq A$ , falls  $A \leq 8$ . 8)  $C \leq 4$ , falls es (von isomorphen abgesehen) höchstens eine nullteilerfreie Quaternionenalgebra über  $K$  gibt.

M. Eichler.

**O'Meara, O. T.:** Characterization of quadratic forms over local fields. Proc. nat. Acad. Sci. USA 39, 969—972 (1953).

Ankündigung von Sätzen (ohne Beweise) über die ganzzahlige Äquivalenz quadratischer Formen in perfekten diskret bewerteten Körpern mit endlichem Restklassenkörper und Charaktersitit  $\neq 2$ ; das Ideal (2) sei durch das Primideal  $e$ -mal teilbar. Im Falle  $e = 1$  findet Verf. ein vollständiges Invariantensystem. Vgl. dazu auch B. W. Jones, Duke math. J. 11, 715—727 (1944). Für  $e \geq 1$  gilt folgender Satz: In der kanonischen Darstellung  $f = \sum_{i=1}^m p^{a_i} f_i$  ( $p = \text{Primelement}$ ,  $f_i = \text{variablenfremde Formen der Determinante 1}$ ,  $a_1 < a_2 < \dots$ ) bedeute  $a = a_m$  die „Ordnung“ von  $f$ . Zwei ganzzahlige Formen sind dann und nur dann äquivalent, wenn sie gleiche Ordnung haben, und wenn sie mod  $(p)^{2e+a+1}$  äquivalent sind.

M. Eichler.

**Dufresnoy, J. et Ch. Pisot:** Sur un ensemble fermé d'entiers algébriques. Ann. sci. École norm. sup., III. Sér. 70, 105—133 (1953).

Es handelt sich um die ausführliche Begründung von Ergebnissen, die in zwei kurzen Noten (dies. Zbl. 47, 275 und 50, 264) angegeben worden waren. Sei  $\theta > 1$  eine ganzzahlige Zahl, deren Konjugierte alle einen Betrag kleiner als 1 besitzen mögen. Die Menge  $S$  aller derartigen Zahlen  $\theta$  ist abgeschlossen und es bezeichne  $S'$  die Menge ihrer Häufungspunkte. Im Minimalpolynom  $P(z) = p_0 + \dots + p_{s-1}z^{s-1} + \varepsilon z^s$  von  $\theta$  sei  $\varepsilon = \pm 1$  so gewählt, daß  $p_0 > 0$  sei. Bezeichne  $Q(z) = \varepsilon z^s P(z^{-1})$ , so bestehen für die rationale Funktion  $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  die beiden Entwicklungen  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$  für  $|z| < \theta^{-1}$  und  $f(z) = \lambda(1 - \theta z)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n z^n$  für  $|z| \leq 1$ . Grundlegend für alle Überlegungen ist der folgende, bereits von C. L. Siegel [Duke math. J. 11, 597—602 (1944)] bei der Bestimmung der zwei kleinsten Zahlen aus  $S$

benutzte allgemeine Zusammenhang: Ist  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ , ( $c_n$  reell) regulär für  $|z| \leq 1$ , dann

gilt  $\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} g(z) g(z^{-1}) z^{-1} dz = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2$ . Für  $g(z) = f(z)(1 - \theta z)$  folgt daraus die ebenfalls

schon von C. L. Siegel angegebene Gleichung  $u_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - \theta u_{n-1})^2 = 1 + \theta^2$  und für

$g(z) = f(z) - \lambda(1 - \theta z)^{-1}$  erhält man  $\lambda^2(\theta^2 - 1)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 = 1$ . Mit Hilfe dieser beiden

Gleichungen wird gezeigt, daß die zu einer beschränkten Menge von Zahlen  $\theta$  aus  $S$  gehörenden Funktionen  $f(z)$  für  $|z| < 1$  eine normale Familie von meromorphen Funktionen bilden. Auf Grund des Kroneckerschen Kriteriums ergibt sich schließlich, daß die Grenzfunktionen wieder rational sind. Dieser Zusammenhang bildet die Grundlage für Theorem 1: Dann und nur dann gehört eine Zahl  $\theta \in S$  bereits zu  $S'$ , wenn ein Polynom  $A(z)$  mit ganzen rationalen Koeffizienten existiert, so daß für  $|z| = 1$  die Ungleichung  $A(z) \leq P(z)$  gilt, wobei das Gleichheitszeichen nur für endlich viele Werte angenommen wird. Aus diesem Satz folgt: 1. Ist  $\theta \in S$  und  $n > 1$ , so ist  $\theta^n \in S'$ ; 2. die totalreellen Zahlen aus  $S$  gehören zu  $S'$ , also insbesondere alle Zahlen 1. oder 2. Grades aus  $S$ . — Nach der Bestimmung der 4 kleinsten Zahlen aus  $S$  wird schließlich gezeigt, daß  $\theta_0 = (1 + \frac{1}{2})^2$  die kleinste Zahl aus  $S'$  ist. Sei  $\theta \in S$  und  $\theta < \theta_0$ , so genügt es nach Theorem 1 zu beweisen, daß kein ganzzahliges Polynom  $A(z)$  mit  $A(z) \leq P(z) = (Q(z))$  für  $|z| = 1$  existiert. Der Beweis dieser Tatsache stützt sich wesentlich auf Lemma 1: Sei

$A(z) = \sum_{n=0}^k a_n z^n$  mit  $a_0 \geq 1$  und sei  $A(z) \leq Q(z)$  für  $z = 1$ . Aus  $\theta < 2$  folgt dann  $a_0 = 1$ , und aus  $\theta < \theta_0$  folgt  $a_1 = q_1 + 1$  [ $q_1$  = Koeff. von  $z$  in  $Q(z)$ ] oder  $A(z) = Q(z)$ . Beim weiteren Beweis wird eine Fallunterscheidung nach dem Grad von  $A(z)$  vorgenommen, wobei der Fall  $\text{Grad } A = \text{Grad } Q$  die wesentlichen Schwierigkeiten verursacht. *F. Kersch.*

**Rosenlicht, Maxwell: Differentials of the second kind for algebraic function fields of one variable.** Ann. of Math., II. Ser. **57**, 517–523 (1953).

Ist  $R$  ein algebraischer Funktionkörper einer Veränderlichen (AF1) vom Geschlecht  $g_R$  mit dem Konstantenkörper  $K$ , so nennt Verf. ein Differential  $\omega$  von  $R$  (Bezeichnungen gemäß Chevalley, Introduction to the theory of algebraic functions of one variable, New York 1951) ein Differential 2. Gattung (D2G), wenn zu jeder Stelle  $p$  von  $R$  ein Element  $f_p \in R$  mit  $v_p(\omega - df_p) > 0$  existiert. Bei Charakteristik  $\text{Char}(R) = 0$  ist diese Def. der klassischen (Verschwinden aller Residuen von  $\omega$ ) äquivalent, bei  $\text{Char}(R) = p > 0$  ist das Verschwinden der Residuen nur hinreichend dafür, daß  $\omega$  ein D2G ist. Die D2G bilden einen Vektorraum  $\mathfrak{D}_R^2$  über  $K$ , der den der exakten Differentiale ( $\mathfrak{E}_R$ ) enthält. Hauptergebnisse: Bei  $\text{Char}(R) = 0$  ist  $\dim(\mathfrak{D}_R^2 \mathfrak{E}_R) = 2g_R$ ; bei  $\text{Char}(R) = p > 0$  ist  $\dim(\mathfrak{D}_R^2 \mathfrak{E}_R) = g_R$ , falls  $R/K$  nicht separabel ( $\mathfrak{E}_R = 0$  und jedes D2G ist von 1. Gattung) oder falls  $R/K$  separabel und konservativ ist (Invarianz des Geschlechts bei jeder Konst.-Erweit.), und es ist  $g_R = \dim(\mathfrak{D}_R^2 \mathfrak{E}_R) = g_{R(K)}$  ( $K$  kleinste vollkommene Erweiterung von  $K$ ), falls  $R/K$  separabel aber nicht konservativ ist. Sei  $S \subset R$  ein AF1 mit gleichem Konst.-Körper  $K$ : ist dann  $\omega$  D2G in  $R$ , so folgt,  $\text{Cosp}_{R/S} \omega$  ist D2G in  $S$ , und ist  $\Omega$  D2G in  $S$ , so folgt, daß  $\text{Sp}_{S/R} \Omega$  D2G in  $R$  ist. — Abschließend verweist Verf. auf geometrische Deutungen dieser Ergebnisse, die an anderer Stelle ausführlich diskutiert werden sollen [vgl. Amer. J. Math. **75**, 621–626 (1953)].

*E. Lamprecht.*

## Zahlentheorie:

● **Lietzmann, W.: Riesen und Zwerge im Zahlenreich.** 5. Aufl. (Math.-phys. Bibliothek, Reihe I, Nr. 25.) Stuttgart: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1953. 60 S., kart. DM 2,40.

● **Gauss, Ch.-Fr. (de Brunswick): Recherches arithmétiques.** Traduites par A.-C.-M. Pouillet-Desisle. Mayenne: Éditions Joseph Floch 1953. 502 p.

Waage, E.: Nahezu gleichseitige rationale und nahezu gleichschenklige pythagoreische Dreiecke. Elemente Math. **8**, 111–113 (1953).



Svenonius, Björn: Quasirechtwinklige Dreiecke mit ganzzahligen Seiten. *Elementa* 36, 261—265 (1953) [Schwedisch].

{ Knödel, Walter: Carmichaelsche Zahlen. *Math. Nachr.* 9, 343—350 (1953).  
 Knödel, Walter: Eine obere Schranke für die Anzahl der Carmichaelschen Zahlen kleiner als  $x$ . *Arch. der Math.* 4, 282—284 (1953).

Verf. definiert in der ersten Arbeit: Eine Zahl  $c_k$  mit  $c_k > k > 0$  heißt  $C_k$ -Zahl, wenn  $a^{c_k-k} \equiv 1 \pmod{c_k}$  für jedes  $a$  mit  $(a, c_k) = 1$ . Insbesondere besteht z. B. die Menge der  $C_1$ -Zahlen aus allen Primzahlen und den Carmichaelschen Zahlen.

$c_k$  ist genau dann  $C_k$ -Zahl, wenn aus  $c_k = \prod_{i=0}^{\infty} p_i^{\gamma_i}$ ,  $k = \prod_{i=0}^{\infty} p_i^{\kappa_i}$ ,  $p_0 = 2$ ,  $c_k \equiv 0$

mod  $p_i$  folgt:  $c_k \equiv k \pmod{\varphi(p_i^{\gamma_i})}$  für  $i \geq 1$  und  $i = 0$ ,  $\gamma_0 = 0, 1, 2$ ;  $c_k \equiv k$

mod  $\frac{1}{2} \varphi(p_0^{\gamma_0})$  für  $\gamma_0 \geq 3$ . Es ergibt sich: Wenn  $(c_k, k) = 1$ , dann ist  $c_k$  quadratfrei

und ungerade. Bezeichnet man die Anzahl der natürlichen Zahlen  $n$  mit der Eigenschaft  $E$  mit  $N(n; \text{hat die Eigenschaft } E)$ , ferner mit  $\varepsilon$  eine beliebig kleine positive

Zahl und setzt man zur Abkürzung  $(1/\sqrt{2-\varepsilon}) \sqrt{\log x \log \log x} = l$ , so wird in

der zweiten Arbeit gezeigt  $N(c_1; c_1 < x) = o(xe^{-l})$ ;  $N(c_k; c_k < x) = O(xe^{-l} + k^6)$ .

Diese Ergebnisse, die diejenigen der ersten Arbeit verschärfen, werden erhalten mit

Hilfe eines Satzes von N. G. de Bruijn (dies. Zbl. 42, 42). H. J. Kanold.

Lekkerkerker, C. G.: Prime factors of the elements of certain sequences of integers. I. II. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* 56, 265—276, 277—280 (1953).

Theorem: Let  $a$  and  $b$  be two integers  $\neq 0$  with  $a^2 + 4b > 0$  and suppose  $u_0 = 0$ ,

$u_1 = 1$ ,  $u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$ , then the sequence  $u_n$  has the property, that for each positive

integer  $n$ , with a finite number of exceptions a prime  $p$  exists with  $p | u_n$  and  $p \nmid u_m$  ( $m = 1, \dots, n-1$ ).

At first is shown that there exists a pos. integer  $c(q')$  ( $q$  prime  $\nmid b$ ,  $t > 0$ ), such that  $q^t | u_n$  if and

only if  $c(q') | n$ . From this follow recurrence formulae for  $A(q, u_n)$ , the number of factors  $q$  of  $u_n$ .

Let now  $q_1, \dots, q_\sigma$  denote the prime factors of  $(a, b)$ ;  $q_{\sigma+1}, \dots, q_\varrho$  those of  $u_n$  which also occur

in  $u_1 \dots u_{n-1}$  but not in  $(a, b)$  and  $q_{\varrho+1}, \dots, q_\tau$  the other prime factors of  $u_n$ . Let be

$u_n = q_1^{t_1} \dots q_\tau^{t_\tau}$ ,  $M = q_1^{t_1} \dots q_\varrho^{t_\varrho}$ ,  $n = p_1^{r_1} \dots p_s^{r_s}$ ,  $v_m = \prod_{j=1}^{\sigma} q_j^{A(q_j, u_m)}$ . By means of the

recurrence formulae is proved  $M \leq n v_n \left[ \frac{u_n/p_1}{v_n/p_1}, \dots, \frac{u_n/p_s}{v_n/p_s} \right]$ . This l. c. m. is connected with  $u_n$

in such a way that follows  $M \leq C n^{\theta^{(n)}} u_n$ ; hereby  $C$  and  $\theta$  are constants and  $0 < \theta < 1$ .

Since  $n \theta^{(n)} \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$  we get  $M < u_n$  for  $n > n(a, b)$ . Therefore  $\varrho < \tau$ , which

proves the theorem. W. Verdenius.

Rosenthal, E.: Diophantine equations separable in cyclotomic fields. *Duke math. J.* 20, 217—232 (1953).

The author develops an algorithm for the resolution of the multiplicative

equation  $\prod_{j=1}^h \prod_{i=1}^t X_{ij}^{a_{ij}} = \prod_{j=1}^h \prod_{i=1}^t Y_{ij}^{b_{ij}}$ , where  $X_{ij}$  and  $Y_{ij}$  are each the product of

an ideal and its distinct conjugates in the cyclotomic number field  $K(e^{2\pi i/l})$ ,  $l$  denoting

an odd prime. By means of this algorithm the complete solution of (1) can be

written down from a knowledge of the solution in multiplicative form of an associated

multiplicative system of independent equations in the rational domain. For the

last purpose use is made of a method of E. T. Bell (this Zbl. 6, 155). The algorithm

is applied to obtain the complete solution of certain diophantine equations of higher

degree in the rational domain, as for instance of the equation obtained by equating

two  $l$ 'th-order circulants and of the equation  $\sum_{i=1}^m x_i^l = 0$  in the case that

$m \geq 4(l-2)$ . W. Ljunggren.

Holzer, Ludwig: Zu den ternären quadratischen Formen. *Wiss. Z. Univ. Rostock, Reihe Math. Naturw.* 2, 1—6 (1953).

Diskussion der Gleichung  $a x^2 + b y^2 + c z^2 = d$ , insbes.  $d = 0$  oder  $-abc$ . Koeffizienten und Unbekannte seien ganz rational. I. a. gibt es Lösungen im Falle

$d = 0$  bzw.  $-abc$  mit  $(a, x) = (b, y) = (c, z) = 1$ . Einige Beiträge zur Auffindung von Nullösungen allgemeiner ternärer Nullformen. *M. Eichler.*

**Oppenheim, A.:** Least determinants of integral quadratic forms. *Duke math. J.* **20**, 391—393 (1953).

Ganzzahlige quadratische Formen, deren Determinante bei festgehaltener Variablenanzahl und Signatur den absolut kleinstmöglichen Wert annimmt, haben die Gestalt  $f(x_1, \dots, x_s) + x_{s+1}x_{s+2} + \dots$ , und  $f$  ist eine definite Form von gleicher Minimaleigenschaft. Explizite Beispiele für letztere bei O'Connor and Pall, *Duke math. J.* **11**, 319—331 (1944). *M. Eichler.*

**Selmer, Ernst S.:** Sufficient congruence conditions for the existence of rational points on certain cubic surfaces. *Math. Scandinav.* **1**, 113—119 (1953).

Mordell (this Zbl. **33**, 160) has conjectured that the elementary congruence conditions are sufficient for the existence of rational points on cubic surfaces. The author proves this conjecture for the purely cubic equation (1)  $a_1 x_1^3 + a_2 x_2^3 + a_3 x_3^3 + a_4 x_4^3 = 0$ ,  $a_1 a_2 a_3 a_4 \neq 0$ , satisfying the additional condition that (for instance) (2)  $a_3 a_4 a_1 a_2 = a$  a rational cube. If (2) is satisfied, (1) can be transformed into  $x^3 + m y^3 = n (u^3 + m v^3)$ , with integer, cubefree  $m$  and  $n$ , and the last equation is treated in the field  $K(\sqrt[3]{m})$ . The class-number of this field is significant. To cover all cases a result of Hasse (this Zbl. **3**, 199) is needed. Finally is shown how the method can be extended to prove the conjecture for the more general equation  $f_3(x, y) = n \cdot f_3(u, v)$ , where  $f_3$  is an arbitrary binary cubic form. *W. Ljunggren.*

**Rieger, G. J.:** Über eine Verallgemeinerung des Waringschen Problems. *Math. Z.* **58**, 281—283 (1953).

L. Schnirelmann (dies. Zbl. **6**, 104) hat mit analytischen Methoden bewiesen: Ist  $\mathfrak{M}$  eine Menge natürlicher Zahlen mit positiver Dichte, so bilden die  $n$ -ten Potenzen der Zahlen aus  $\mathfrak{M}$  eine Basis endlicher Ordnung der Menge aller natürlichen Zahlen. Dieses ist eine Verallgemeinerung des Waring-Hilbertschen Satzes. Für den zuletzt erwähnten Satz hat Linnik (vgl. A. J. Chintschin, *Drei Perlen der Zahlentheorie*, Berlin 1951, S. 33—61, dies. Zbl. **42**, 40), einen elementaren Beweis angegeben. Der Verf. zeigt, daß man durch einen kleine Modifizierung dieses Beweises einen kurzen elementaren Beweis für die oben genannte Verallgemeinerung erhalten kann. *S. Selberg.*

**Lorentz, G. G.:** Multiplicity of representation of integers by sums of elements of two given sets. *J. London math. Soc.* **28**, 464—467 (1953).

Let  $A, B$  be sets of positive integers.  $A + B = \{a + b\}$  for all  $a \in A, b \in B$ . The paper deals with the problem to express in a precise form the fact that usually many elements of  $A + B$  have several different representations of the form  $a + b$  (two representations  $a + b$  and  $a' + b'$  are considered identical if and only if  $a' = a, b' = b$ ). Theorem 1 says: Let  $\varrho(n)$  be the number of different representations in the form  $a + b$  of a positive integer  $n$ , and let the asymptotic density  $\lambda$  of  $A$  be positive. Then there is a set  $M$  of asymptotic density not less than  $\lambda$  such that  $\varrho(n) \rightarrow \infty$  for  $n \in M, n \rightarrow \infty$ . The proof of this and other theorems is based on the inequality

$$C(n) \geq A((1 - \varepsilon)n) - (B(\varepsilon n))^{-1} \cdot \sum_{x \leq n, x \in C} \varrho(x)$$

where  $\varepsilon > 0$  and  $C$  are an arbitrary set of positive integers. *S. Selberg.*

**Watson, G. L.:** On integers  $n$  relatively prime to  $[\lambda n]$ . *Canadian J. Math.* **5**, 451—455 (1953).

Verf. löst ein kürzlich von K. F. Roth gestelltes Problem: Für jedes reelle  $\lambda$  existiert für  $f(x, \lambda) = \sum_{\substack{n \leq x \\ (n, [\lambda n]) = 1}} 1$  der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x, \lambda)}{x} = \delta(\lambda)$ . Für irrationales



$\alpha$  ist  $\delta(\alpha) = \frac{6}{\pi^2}$ , und für rationales  $\alpha = \frac{a}{q}$ ,  $(a, q) = 1$ ,  $q > 0$  gilt  $\delta(\alpha) = \frac{1}{q} \sum_{u=1}^{q-1} \frac{\varphi(u)}{u}$ ,

wo  $\varphi(u)$  die Eulersche Funktion bezeichnet. Er bemerkt, daß ein entsprechendes Resultat gewonnen werden kann, falls die Summationsbedingung  $(n, [\alpha n]) = 1$  durch  $(n, [\alpha n]) = k$  ersetzt wird.

H.-E. Richert.

**Estermann, Theodor:** On the number of primitive lattice points in a parallelogram. Canadian J. Math. 5, 456—459 (1953).

Another proof that if  $\alpha$  is irrational then the number of integer  $n$  with  $1 \leq n \leq N$  and  $n$  prime to the integral part of  $\alpha n$  is  $6\pi^{-2}N + o(N)$  (cf. the preceding review).

J. W. S. Cassels.

**Gupta, Hansraj:** A generalization of the Möbius function. Scripta math. 19, 121—126 (1953).

Es handelt sich um die zahlentheoretische Funktion  $\nu_r(n)$ , definiert durch  $\sum_{d|n} \nu_r(d) = 1$  für  $n = m^r$ ,  $= 0$  sonst.  $\nu_r(n)$  stimmt für  $r = 0$  mit der Möbiusschen Funktion  $\mu(n)$ , für  $r = 2$  mit der Liouvilleschen Funktion  $\lambda(n)$  überein. Es werden einige Sätze über diese Funktion bewiesen. Beispiele: 1. Sind in der kanonischen Darstellung  $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$  mehr als  $h$  Zahlen unter den  $\alpha_i$  nicht durch  $r$  teilbar,

so gilt  $\sum_{d|n} \nu_r(d) \log^h d = 0$ . 2. Aus  $F_1(x) = \sum_{d \leq x} f\left(\frac{x}{d}\right)$  und  $F_2(x) = \sum_{d \leq x} f\left(\frac{x}{d^r}\right)$

folgt  $F_2(x) = \sum_{d \leq x} \nu_r(d) F_1\left(\frac{x}{d}\right)$ . 3.  $\left| \sum_{d \leq n} \frac{\nu_r(d)}{d} \right| \leq 1 + \frac{1}{n^{1/r}}$ .

H.-E. Richert.

**Prachar, Karl:** Über Zahlen der Form  $a^2 + b^2$  in einer arithmetischen Progression. Math. Nachr. 10, 51—54 (1953).

Let  $A(x, D, l)$  denote the number of the integers  $\leq x$  and  $\equiv l \pmod{D}$ , which are the sum of two squares. Let  $p$  and  $q$  be primes  $\equiv 1$ , resp.  $3 \pmod{4}$ ,  $d = (D, l)$ ,  $D = dD'$ ,  $l = dl'$ ,  $t$  equal to the different primes  $q$ , which divide  $d$  odd times;  $l_1$  satisfies  $l_1 t \equiv l' \pmod{D'}$  when  $(t, D') = 1$ . Suppose  $b = 2^{-1/2} \prod_q (1 - q^{-2})^{-1/2}$ ,

$Z(s) = \prod_{2|D', p|D', q|D'} (1 - 2^{-s})(1 - p^{-s})(1 - q^{-2s})$  and  $B(x) = [dt\varphi(D')]^{-1} b Z(1) x \log^{-1/2} x$ .

Theorem: (1)  $A(x, D, l) \sim B(x)$  if  $(t, D') = 1$ ,  $D' \not\equiv 0 \pmod{4}$ ; (2)  $A(x, D, l) \sim 2 B(x)$  if  $(t, D') = 1$ ,  $D' \equiv 0$ ,  $l_1 \equiv 1 \pmod{4}$ ; (3)  $A(x, D, l) = 0$  otherwise. — The proof of (3) is elementary. For (1) and (2) the starting-point is the generating Dirichlet-series of  $A(x, D, l)$ :  $F(s) = (dt)^{-s} \sum_{\substack{n=l_1 \pmod{D'} \\ n=a^2+b^2}} n^{-s}$ . An investigation of this

series gives a relation between  $F(s)$  and the  $L$ -series with characters mod  $D'$ . It turns out, that  $G(s) = (dt)^s F(s) = \varepsilon \varphi^{-1}(D') Z(s) E(s) + f(s)$ , where  $\varepsilon = 1$  or  $2$  according to (1) or (2),  $E(s) = \sum_{n=a^2+b^2} n^{-s}$  and  $f(s)$  is a regular function in  $s = 1$ . The

connection with the  $L$ -functions is however still so, that the behavior near the line  $\sigma = 1$  ( $s = \sigma + it$ ) remains valid: For  $|t| > t_0$ ,  $\sigma > 1 - c_1 \log^{-1} |t|$  is  $|G(s)| < c_2 \log |t|$ . Now it is possible to deduce (1) and (2) by means of complex integration as is proved by Landau (Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Bd. II, Leipzig 1909) for  $D = 1$ . This last part is not explained in detail in the text.

W. Verdenius.

**Shapiro, Harold N.:** Iterates of arithmetic functions and a property of the sequence of primes. Pacific J. Math. 3, 647—655 (1953).

The author considers again the class of arithmetic functions discussed in an earlier paper (this Zbl. 39, 273). In particular, he determines those functions  $g$  in his class such that  $C_g(p)$  is maximal for all primes  $p$ , where  $C_g(p)$  is the unique non-negative integer  $k$  such that  $g^k(p) = 2$ .

P. T. Bateman.

**Klimov, A. I.:** Über eine Abschätzung für die Grenze der Nullstellen der  $L$ -Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 89, 205—208 (1953) [Russisch].

The author sketches a proof of the following theorem. If  $\chi$  is any residue character modulo  $k$ , then the Dirichlet  $L$ -function formed from the character  $\chi$  has no zeros in the region

$$R(z) \geq 1 - 0.0005 [\ln(k+3) + (\ln \gamma)^{3/4} (\ln \ln \gamma)^{3/4}], \quad J(z) \geq 1,$$

where  $\gamma = J(z) + 8$ ; if  $\chi$  is principal or complex, the restriction  $J(z) \geq 1$  is unnecessary. The proof is based on a theorem of Vinogradov on exponential sums (this Zbl. 36, 305).

P. T. Bateman.

**Gelfond, A. O.:** Über einen elementaren Zugang zu einigen Aufgaben aus dem Gebiet der Primzahlverteilung. Vestnik Moskovsk. Univ. 8, Nr. 2 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk Nr. 1) 21–26 (1953) [Russisch].

By using simple manipulations with power series and Lambert series but nothing from the theory of the Dirichlet  $L$ -functions, the author gets a crude (but positive) lower estimate for  $L(1, \chi)$  for real non-principal residue characters  $\chi$ . In a similar way he proves that if  $\theta$  is a completely multiplicative arithmetic function which is not identically zero, takes no values other than 0, 1, -1, and has the

property  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1/2} \left| \sum_{k=1}^n \theta(k) \right| < \frac{1}{12}$ , then  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta(n)}{n} > 0$ . P. T. Bateman.

**Linnik, Ju. V.:** Die Summe von Primzahlen und Potenzen ein und derselben Zahl. Mat. Sbornik, n. Ser. 32 (74), 3–60 (1953) [Russisch].

The author proves the existence of positive constants  $k_0$  and  $C$  with the following property. If  $k$  is a positive integer greater than  $k_0$ , then for all sufficiently large positive integers  $N$  there are more than  $CN(\ln N)^{k-2}$  solutions of the Diophantine equation  $N = p + p' + 2^{\alpha_1} + \dots + 2^{\alpha_k}$  in positive integers  $x_1, \dots, x_k$  and prime numbers  $p$  and  $p'$ . The proof is based on the consideration of the integral

$$\int_0^1 S^2(\theta) T^k(\theta) e^{2\pi i \theta N} d\theta,$$

where  $S(\theta) = \sum_{n=2}^{\infty} e^{-n/N} e^{2\pi i \theta n} A(n)$  and  $T(\theta) = \sum_{m \leq (\ln N)/(\ln 2)} e^{-m/N} e^{2\pi i \theta 2^m}$ , and requires theorems on the density of zeros of  $L$ -series due to the author [Izvestiya Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 10, 35–45 (1946)] and Rodosskij (this Zbl. 47, 45). However, no unproved hypotheses are used, in contrast to an earlier paper of the author on the same subject [Trudy mat. Inst. Steklov. 38, 152–169 (1951)]. The author has announced a more general theorem of the same sort (this Zbl. 47, 45) in which 2 is replaced by an arbitrarily given positive integer  $g$  greater than 1 and  $N$  is a sufficiently large positive integer of the same parity as  $k, g$ . He asserts in the present paper that the proof for the general case is essentially the same as the proof for the case  $g = 2$ .

P. T. Bateman.

**Rodosskij, K. A.:** Über die kleinste Primzahl in einer arithmetischen Progression und die Nullstellen der  $L$ -Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 88, 753–756 (1953) [Russisch].

Linnik has proved that if  $h$  and  $D$  are coprime positive integers, then the least prime number congruent to  $h$  modulo  $D$  is less than  $D^c$ , for a certain positive constant  $c$  [Mat. Sbornik, n. Ser. 15 (57), 139–178 and 347–368 (1944)]. The author of the present paper observes that Linnik's derivation of this inequality rests heavily on two difficult lemmas on  $L$ -functions. Linnik himself [Mat. Sbornik, n. Ser. 16 (58), 101–120 (1945)] subsequently gave a much simpler proof of one of these. The present paper is concerned with the other one, called by Linnik the „basic theorem“. The author briefly sketches a proof of the following weaker theorem similar to Linnik's „basic theorem“ and shows in outline that it is powerful enough to give Linnik's inequality for the least prime in an arithmetic progression. Theorem: If  $2 \leq \psi \leq 10^{-1} \ln D$ , then the number of  $L$ -functions with characters modulo  $D$  which have zeros  $\sigma + it$  such that  $1 - \psi \ln^{-1} D \leq \sigma \leq 1$  and  $|t| \leq \min(e^{\psi} \ln^{-1} D, 1)$  does not exceed  $e^{A\psi}$ , where  $A$  is a positive constant. The case  $10^{-1} \ln D \leq \psi \leq \ln \ln D$  of this theorem was settled in a very simple way in an earlier paper [Ukrain. mat. Zhurn. 3, 399–403 (1951)]. The case  $2 \leq \psi \leq \ln \ln D$ , which is much more difficult, is investigated by methods from another earlier paper (this Zbl. 33, 106).

P. T. Bateman.

**Wright, E. M.:** The calculation of large primes. Math. Gaz. 37, 104–106 (1953).



Suppose  $p$  is an odd prime number and  $k$  is a positive integer less than  $p$ . It is easy to prove that if  $n = kp + 1$  or  $kp^2 + 1$ ,  $2^k \not\equiv 1 \pmod{n}$ , and  $2^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ , then  $n$  is a prime number. In fact this result has been used in finding large prime numbers [cf. Miller, *Eureka* 1951, no. 14, 10–11 (1951)]. The present author proves the following less immediate theorem of the same type: If  $k$  is not a cube,  $k < 2(2p+2)^{1/2} - 2$ ,  $n = kp^3 + 1$ ,  $2^k \not\equiv 1 \pmod{n}$ , and  $2^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ , then  $n$  is a prime number. He also shows that we can replace  $2(2p+2)^{1/2} - 2$  in the statement of the theorem by  $\min \{p, 6(2p+6)^{1/2} - 2\}$  if we make the further assumptions that  $p \neq 47$  and neither  $\frac{1}{2}(p+1)$  nor  $\frac{1}{2}(7p+1)$  is a square. All the arguments are elementary.

P. T. Bateman.

Delange, Hubert: Sur le nombre des diviseurs premiers de  $n$ . C. r. Acad. Sci., Paris 237, 542–544 (1953).

Sei  $\omega(n)$  die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von  $n$  und  $N(x, a, b)$  die Anzahl der  $n \leq x$  mit  $a \leq [\omega(n) - \log \log n] / (\log \log n)^{1/2} \leq b$ . Dann ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{N(x, a, b)}{x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-u^2/2} du.$$

Dieses Resultat ist bereits bekannt. Vgl. Erdős-Kac, dies. Zbl. 24, 102 und 21, 207.

K. Prachar.

• Gruenberger, F.: Table of prime numbers from 2 to 406253. Madison Numerical Analysis Laboratory 1953. 1 microcard 25 cents.

Barnes, E. S.: Note on non-homogeneous linear forms. Proc. Cambridge philos. Soc. 49, 360–362 (1953).

Davenport, H.: On the product of  $n$  linear forms. Proc. Cambridge philos. Soc. 49, 190–193 (1953).

Let  $L_1, \dots, L_n$  be  $n$  homogeneous forms in the  $n$  variables  $u_1, \dots, u_n$  with the determinant  $\Delta \neq 0$ . Let  $r$  of the forms be real and the remaining  $2s = n - r$  complex conjugate in pairs. Let  $M_H, M_I$  be respectively the homogeneous and inhomogeneous minimum of the product of the forms, i. e.  $M_H = \inf |L_1 \cdots L_n|$  ( $u_1, \dots, u_n$  integers not all zero) and  $M_I = \sup \inf_{\alpha} |(L_1 - \alpha_1) \cdots (L_n - \alpha_n)|$  ( $u_1, \dots, u_n$  integers,  $\alpha_j$  real if  $L_j$  is real,  $\alpha_j = \overline{\alpha_k}$  if  $L_j = \overline{L_k}$ ). In the first paper Barnes gives a very simple proof of Davenport's result that (\*)  $M_H^s M_I^{n-s} < C |\Delta|^n$ , where  $C$  depends only on  $n$  (this Zbl. 47, 274). In the second paper the author uses a modification of Barnes' method to show that  $M_H^{2s-1} M_I^{2n-2s-1} < C |\Delta|^{2n-2}$  ( $s \neq 0$ ) which is stronger than (\*) if  $r \neq 0, n$ . He also shows that (\*) is best possible if  $r = 0, n$ .

J. W. S. Cassels.

Rogers, K.: The minima of some inhomogeneous functions of two variables. J. London math. Soc. 28, 394–402 (1953).

The following theorem is proved: Let  $f(x, y)$  be a non-negative continuous function of the real variables  $x, y$  such that  $f(x, y) = f(-x, -y)$ . Put

$$\mu = \max [f(0, \tfrac{1}{2}), f(\tfrac{1}{2}, 0)] \min \{f(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}), f(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})\}.$$

Let the region  $f(x, y) \leq \mu$  have precisely two asymptotes each passing through the origin and let it separate the rest of the plane into four regions each strictly convex. Then to every real  $x_0, y_0$  there are  $x = x_0, y = y_0 \pmod{1}$  such that  $f(x, y) \leq \mu$ . This generalises the theorem of Barnes in which  $f(x, y)$  is the absolute value of an indefinite quadratic form (this Zbl. 37, 171).

J. W. S. Cassels.

Rogers, C. A.: Almost periodic critical lattices. Arch. der Math. 4, 267–274 (1953).

In most cases so far successfully treated the critical lattices  $\Lambda$  of an automorphic star-body  $S$  are all periodic: i. e. there is a compact subset  $H$  of the group  $G$  of automorphisms of  $S$  with the property that to every  $\Omega \in G$  there is a  $\Theta \in H$  such that  $\Theta \Omega \Lambda = \Lambda$ . In this paper the author shows that every automorphic star-body

$S$  has at least an almost-periodic critical lattice  $A$ . By almost-periodic is here meant that to every neighbourhood  $N$  of the lattice  $A$  (in the topology of Mahler) there is a compact set  $H = H(N) \subset G$  with the property that to every  $\Omega \in G$  there is a  $\Theta \in H$  such that  $\Theta \Omega A \in N$ . Further, if there is not a periodic critical lattice then there is an almost-periodic critical lattice related to  $G$  in a rather complicated way. In particular, if  $G$  is abelian (or has a more general property here called quasi-abelian), to every neighbourhood  $N$  of  $A$  and every  $\Omega \in G$  there is an integer  $r$  such that  $\Omega^r A \in N$ . J. W. S. Cassels.

**Watson, G. L.: Minkowski's conjectures on the critical lattices of the region  $|x^p| + |y^p| \leq 1$ . II.** J. London math. Soc. 28, 402—410 (1953).

(Part I, this Zbl. 50, 47). It was conjectured by Minkowski (Diophantische Approximationen, Berlin 1907, pp. 51—58) that the critical determinant of the region  $|x^p| + |y^p| \leq 1$  for fixed  $p \geq 1$  is the minimum of the determinants  $\Delta_0, \Delta_1$  of the two symmetric lattices generated by six points on the boundary. Here it is shown by an elaborate computation that the minimum of  $\Delta_0, \Delta_1$  is at least a local minimum among lattices generated by six points on the boundary and, further, that there is a range of  $p$  for which both  $\Delta_0, \Delta_1$  are local minima (and so there is a nonsymmetric local maximum). J. W. S. Cassels.

**Ollerenshaw, Kathleen: An irreducible non-convex region.** Proc. Cambridge philos. Soc. 49, 194—200 (1953).

The author inscribes in the star domain  $K: x^2 - y^2 \leq 2, xy \leq 1$  an irreducible star domain  $K'$  for which the quotient  $Q(K') = A(K')/A(K')$  of the area by the lattice determinant has the value 3.51... From this she deduces an example of a set  $K^*$ , not a star domain, for which  $Q(K^*) = 1.31$ ... Both values are the smallest so far obtained. K. Mahler.

**Kasch, Friedrich: Zur Annäherung algebraischer Zahlen durch arithmetisch charakterisierte rationale Zahlen.** Math. Nachr. 10, 85—98 (1953).

Generalizing results of Th. Schneider (this Zbl. 14, 205; 38, 188) and K. Mahler (this Zbl. 14, 205; 19, 250), the following interesting theorem is proved: Let  $\xi_i = p_i/q_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) be an infinite sequence of distinct rational numbers with the following properties. (1)  $0 < q_i < q_{i+1}$ ,  $(p_i, q_i) = 1$ . (2)  $q_i$  can be written as  $q_i = q'_i q''_i$  where  $q'_i$  and  $q''_i$  are positive integers such that  $\limsup (\log q'_i \log q_i) = \omega_1$ . (3) There are two positive integers  $f_i$  and  $l_i$  such that  $q''_i f_i = l_i$  and that further  $\limsup (\log f_i / \log q_i) = \omega_2$ . (4) An algebraic number  $\chi$  and a real number  $\mu > 1$  exist such that  $\chi = p_i q_i^{-\mu}$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ). Then  $\limsup (\log q_{i+1} / \log q_i) = \infty$ . One can prove an even stronger, but rather more complicated property of the  $q_i$ 's. The author applies his theorem to the construction of special transcendental numbers. K. Mahler.

**Leveque, W. J.: Note on S-numbers.** Proc. Amer. math. Soc. 4, 189—190 (1953).

The author improves results by K. Mahler (this Zbl. 3, 246) and J. F. Koksma (this Zbl. 21, 208) and shows that nearly all real or complex numbers  $\xi$  have the following property: Denote by  $\gamma(\xi)$  the lower bound of those positive numbers  $\gamma$  for which

$$|a_0 + a_1 \xi + \dots + a_m \xi^m| \geq \Gamma_m a^{-\gamma m} \quad (a = \max(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_m|) \geq 1)$$

for all degrees  $m$  and all sets of integers  $a_0, a_1, \dots, a_m$ ; here  $\Gamma_m$  is a positive number depending on  $\xi$  and  $m$ , but not on the coefficients  $a_0, a_1, \dots, a_m$ . Then  $\gamma(\xi) \leq 2$  if  $\xi$  is real,  $\gamma(\xi) \leq 3/2$  if  $\xi$  is non-real. The proof is based on a recent result by N. I. Fel'dman (this Zbl. 42, 48; especially Lemma 5 of this note.) K. Mahler.

**Cole, A. J.: A problem of diophantine approximation.** Indagationes math. 15, 144—157 = Nederl. Akad. Wet., Proc. Ser. A 56, 144—157 (1953).

Let  $c(\theta, \alpha) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x |\theta x + y - \alpha|$ , where  $x, y$  are integers, and let  $C$  be



the sup of all  $c(\theta, \alpha)$  where  $\theta$  is irrational and  $\alpha$  not of the form  $m\theta + n$  ( $m, n$  integers). Then it is shown that  $0,309 \dots < C < 0,409 \dots$ . In a footnote it is shown that a result of Poitou and Descombes [C. r. Acad. Sci., Paris 234, 581—583, 1522—1524 (1952)] implies  $C > 0,35 \dots$ . Compare the result of Khintchine (this Zbl. 12, 247) as sharpened by I. I. Jogin [Učenje Zapiski Moskovsk. Univ., Mat. 73, 41—44 (1944)] that  $c(\theta, \alpha) \leq 5^{-1/2}$  for all irrational  $\theta$  and all  $\alpha$ .

*J. W. S. Cassels.*

**Kuipers, L. and B. Meulenbeld:** On a certain classification of the convergents of a continued fraction. Nieuw Arch. Wiskunde, III. Ser. 1, 199—211 (1953).

It is shown that for irrational  $\alpha$  the irreducible fractions  $P/Q$  such that  $|\alpha - P/Q| < Q^{-2}$  fall into at least four classes modulo 3, each class occurring infinitely often. For the corresponding problem modulo 2 cf. L. Kuipers and B. Meulenbeld, this Zbl. 46, 46. W. T. Scott, this Zbl. 22, 308. A. Oppenheim, this Zbl. 27, 161, and R. M. Robinson, this Zbl. 24, 252. The proofs contain much consideration of cases. A second part is promised in which  $|\alpha - P/Q| < kQ^{-2}$  for constant  $k > 0$  will be similarly considered.

*J. W. S. Cassels.*

**Cugiani, Marco:** Sui punti esclusi dalle coperture dell'insieme razionale. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 8, 294—300 (1953).

Assume the rational numbers  $p/q$ , where  $0 \leq p \leq q$ ,  $(p, q) = 1$ , have been arranged in a sequence  $0/1, 1/1, 1/2, 1/3, 1/4, 2/3, \dots$  according to increasing height  $p + q$  and for equal height according to value; let  $N = N(p, q)$  be the place number of  $p/q$  in this sequence. For fixed  $\varepsilon > 0$  denote by  $I_N = I_N(p/q)$  the open interval of centre  $p/q$  and length  $2^{1-N}\varepsilon$ . Define intervals  $Y_N = Y_N(p/q)$  as follows: For  $N = 1$ ,  $Y_1 = I_1$ ; for  $N \geq 2$ ,  $Y_N$  is to be the Null set if  $p/q \in \bigcup_{i=1}^{N-1} Y_i$ , and otherwise  $Y_N$  is to be the difference set  $I_N - \left( I_N \cap \bigcup_{i=1}^{N-1} Y_i \right)$ . Finally let  $J(\varepsilon) =$

$\bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i$ ; this set contains every  $p/q$  and is of length  $< 2\varepsilon$ . If  $\alpha$  is irrational and  $0 < \alpha < 1$ , if further  $p_n/q_n$  is its  $n$ -th convergent and  $N(n) = N(p_n/q_n)$ , then there exists an  $\varepsilon_0 > 0$  such that  $\alpha \notin J(\varepsilon)$  for all  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$  if  $q_n q_{n+2} = O(2^{N(n)})$ ; while  $\alpha \in J(\varepsilon)$  for all  $\varepsilon$  if  $2^{N(n)} = o(q_n q_{n+2})$ . The author considers further generalizations.

*K. Mahler.*

**Cugiani, M.:** Le frazioni continue. Periodico Mat., IV. Ser. 31, 44—61 (1953).

This article is a continuation of the exposition by the author (this Zbl. 48, 298) on the subject of continued fractions, in particular, on regular continued fractions and their equivalence to irrational numbers, on the Lagrange theorem on the equivalence of periodic continued fractions and irrational numbers, and on Liouville numbers.

*E. Frank.*

## Analysis.

### Mengenlehre:

**Vaccarino, Giuseppe:** Il calcolo delle classi. Archimede 5, 54—55 (1953).

**Specker, Ernst P.:** The axiom of choice in Quine's new foundations for mathematical logic. Proc. nat. Acad. Sci. USA 39, 972—975 (1953).

In den „New Foundations for Mathematical Logic“ (dies. Zbl. 16, 193) hat W. V. Quine einen mengentheoretischen Logikkalkül definiert, der von dem Russellschen Stufenpostulat nur für das Komprehensionsprinzip Gebrauch macht. Hierunter soll verstanden sein die axiomatische Auszeichnung der Ausdrücke, die besagen, daß jede Bedingung  $H(x)$  eine Menge bestimmt, nämlich die Menge der Elemente, die  $H(x)$  erfüllen. Es sind die Ausdrücke vom Typus

$$\exists z \forall x (x \in z \leftrightarrow H(x)) \quad z \text{ nicht in } H.$$

In den „New Foundations“ (NF) ist diese Forderung zur Abwehr der inkonsistenten Mengen abgeschwächt: Nicht jede Bedingung bestimmt eine Menge, sondern nur jede geschichtete

(„stratified“) Bedingung, wo  $H$  geschichtet heißt, wenn alle in  $H$  vorkommenden Variablen — es gibt nur eine Variablensorte — auf einem Abschnitt der Reihe der natürlichen Zahlen so abgebildet werden können, daß  $x = y$  genau dann, wenn  $n \in n + 1$ . Das System der NF scheint trotz der Schwierigkeiten, die seiner Interpretation entgegenstehen, nichts zu enthalten, was seine Widerspruchsfreiheit bedroht. Andererseits ist es im kalkültechnischen Sinne so handlich, daß ein Autor vom Rang von J. B. Rosser sich entschlossen hat, seine „Logic for Mathematicians“ (New York 1953) über diesem System aufzubauen, mit einem ungewöhnlich gehaltvollen Schlußkapitel über das Auswahlaxiom (und das Zornsche Lemma). Hierdurch gewinnt die vorliegende Studie ein wesentlich erhöhtes Interesse. Auf eine musterhaft durchsichtige Art wird in einer Folge von wohlgedachten Einzelschritten für das Auswahlaxiom gezeigt, daß dieses Axiom mit dem System der NF unverträglich ist, wobei das Auswahlaxiom ersetzt ist durch sein wohlordnungstheoretisches Äquivalent in der Gestalt, in der es besagt: „Die Kardinalzahlen sind wohlgeordnet durch die Beziehung ‚Es gibt Mengen  $a, b$ , so daß  $a \in m$ ,  $b \in n$  und  $a \subseteq b$ ‘“. Hierzu schreibt mir Prof. Quine (8. 2. 54): „Rosser says that this anomaly and others related to it, involve departures from the classical theory of higher infinities, but that the classical theory can be obtained within a definable sub-universe of NF“. Er fügt hinzu, daß ein Schüler von Prof. Rosser dies zeigen wird. H. Scholz.

**Shepherdson, J. C.:** Inner models for set theory. III. J. symbolic Logic 18, 145—167 (1953).

Verf. schließt hiermit die in Teil I und II dieser Arbeit (dies. Zbl. 43, 53; 48, 281) begonnenen Untersuchungen über innere Modelle der Mengenlehre ab. Unter „eigentlich-vollständigen“ Modellen werden solche vollständigen verstanden, die wesentlich enger sind als das durch das Axiomensystem bestimmte Universum, d. h. diejenigen vollständigen Modelle, deren Klassen Mengen des Universums sind und eine Klasse des Universums definieren. Das Hauptergebnis ist: Wenn das aus den Axiomen  $A, B, C$  von Gödel bestehende Axiomensystem widerspruchsfrei ist, so geht die Widerspruchsfreiheit nicht verloren, wenn die Hypothese, daß keine eigentlich-vollständigen Mengen existieren, hinzugefügt wird. Wenn ein vollständiges Modell konstruiert werden kann, für das sich eine gewisse Zusatzhypothese beweisen läßt, so läßt sich ein Beweis dafür geben, daß diese Zusatzhypothese aus den Axiomen  $A$  bis  $C$  von Gödel und der Hypothese, daß keine eigentlich vollständigen Modelle existieren, ableitbar ist, vorausgesetzt man fügt noch das von Gödel (The consistency of the continuum hypothesis. Princeton 1940) eingeführte Axiom  $V = L$  hinzu. In einem 1951 hinzugefügten Nachtrag wird gezeigt, daß der von Rosser und Wang (dies. Zbl. 37, 295) eingeführte Begriff des Standardmodells wesentlich mit dem Begriff des eigentlich-vollständigen Modells übereinstimmt. W. Ackermann.

**Morinaga, Kakutaro und Noburo Nishigori:** On axiom of betweenness. I, II. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 16, 177—221 (1952), 16, 399—408 (1953).

Als Grundbegriffe einer (teilweisen) Ordnung, ja sogar einer Quasi-Ordnung können auch die ternären Relationen der „open-betweenness“ bzw. „open- $Q$ -betweenness“ ( $x \prec y \prec z$  oder  $x \prec y \prec z$ ) und der „closed- $Q$ -betweenness“ ( $x \prec y \prec z$  oder  $x \prec y \prec z$ ) dienen; die Verff. geben unabhängige Axiomensysteme für diese Grundbegriffe an. Jürgen Schmidt.

**Fraïssé, Roland:** Sur certaines relations qui généralisent l'ordre des nombres rationnels. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 540—542 (1953).

Poursuivant ses recherches sur les relations générales, l'A. leur étend les deux propriétés suivantes des ordres:  $\alpha$ ) tout ordre dénombrable est isomorphe à une restriction de l'ordre  $\eta$  des rationnels,  $\beta$ )  $\eta$  est le seul ordre dénombrable dense sans premier ni dernier élément. Pour cela il étend d'abord son ancienne définition de relation riche (ce Zbl. 34, 176): étant donnée une classe  $K$  de relations à  $n$  arguments, une relation  $R$  de  $K$  sera dite „riche dans  $K$ “ si toute relation de  $K$  est isomorphe à une restriction de  $R$ . Il dit qu'une relation  $H$  de base  $E$  est homogène si, quelle que soit la partie finie  $F$  de  $E$ , tout isomorphisme de  $H$ , restreinte à  $F$ , sur une restriction de  $H$ , peut être prolongé en un automorphisme de  $H$ . Étant donnée une relation  $R$ , il désigne par  $\Gamma_R$  la classe des relations  $A$  dont toute restriction à une partie finie de la base est isomorphe à une restriction de  $R$ . Il énonce alors sans démonstration les résultats suivants: 1. Toute relation  $H$ , homogène et de base finie ou dénombrable, est riche dans la classe  $\Gamma_H$ , supposée restreinte aux relations de bases finies et dénombrables (extension de  $\alpha$ ). 2. S'il existe dans une classe  $\Gamma_R$  des relations homogènes  $H$  telles que  $\Gamma_R = \Gamma_H$ , l'une des  $H$  et une seule (avec ses isomorphismes) est de base finie ou dénombrable (extension de  $\beta$ ). 3. Pour qu'il existe dans  $\Gamma_R$  une relation homogène  $H$  telle que  $\Gamma_R = \Gamma_H$ , il faut et suffit que  $\Gamma_R$  vérifie la condition suivante: C: Si  $A, B$  de bases finies appartiennent à  $\Gamma_R$  et ont une restriction commune de base  $I$ , il existe une  $C$  de  $\Gamma_R$  et deux isomorphismes  $\varphi$  et  $\psi$  de  $A$  et de  $B$  sur deux restrictions de  $C$ , avec  $\varphi(x) = \psi(x)$  pour  $x \in I$ . — C'est là une extension d'un résultat de A. Lindenbaum [Ann. Soc. Polon. Math. 17, 124—126 (1938)], et de l'A. (loc. cit.). La classe des ordres partiels et des ordres totaux vérifie C. Celle des ordres ramifiés [définis par l'A., C. r. Acad. Sci., Paris 237, 508—510 (1953)] ne la



vérifie pas. L'A. termine en indiquant plusieurs problèmes non résolus; en particulier: quelle est la puissance de l'ensemble des  $F_R$  qui vérifie C? Signalons que les démonstrations paraîtront bientôt aux Ann. sci. École norm. sup.

R. de Possel.

**Hoheisel, Guido und Jürgen Schmidt:** Über die Konstruktion einer gewissen totalen Ordnung in Bäumen. Arch. der Math. 4, 261—266 (1953).

Die Arbeit bezieht sich auf die verzweigten Mengen  $M$  (ensembles ramifiés), die hier „Bäume“ genannt werden [vgl. G. Kurepa, Ensembles ordonnés et ramifiés, Thèse Paris 1935, dies. Zbl. 14, 394; vielleicht wäre es besser, den Ausdruck „Baum“ für diejenigen verzweigten Mengen,  $T$ , zu reservieren, die so beschaffen sind, daß jede ihrer Ketten wohlgeordnet ist; das sind die sogenannten verzweigten Matrizen, tableaux ramifiés, arbres (fr.), trees (engl.)]. Die „natürliche Ordnung“ von  $T$  wird nun auf beliebige verzweigte Mengen  $M$  übertragen: die gegebene Ordnung  $\leq$  von  $M$  und dazu noch eine andere der Menge  $Z$  aller Zweige aus  $M$ , durch die jede „Gabel“ aus  $M$  totalgeordnet wird, werden zu einer Totalordnung von  $M$  erweitert. Die Arbeit steht im Zusammenhang mit Kinnas unveröffentlichter Dissertation (Köln 1952). Ref. möchte dabei auf seinen Artikel (s. dies. Zbl. 27, 300) hinweisen, wo folgende Verschärfung des obigen Satzes (allerdings für  $T$ , die aber auf  $M$  vernünftigerweise übertragbar ist) bewiesen ist: Dabei kann und soll jede Gabel mit  $\geq 2$  Zweigen irgendwie totalgeordnet werden, unabhängig von der Totalordnung jeder anderen Gabel; durch ein solches System von unabhängigen Totalordnungen der Gabeln wird dann mit der gegebenen Verzweigungsrelation  $\leq$  in  $M$  auf naturgemäße Weise eine und nur eine Totalordnung von  $M$  induziert. Dadurch wird jedes  $(K, -)$  ein Stück der so gewonnenen Kette (cf. Kurepa, dies. Zbl. 44, 272, insbesondere p. 222, Lemma 18. 3. 3. 3. 1). Ref. möchte die folgende Darstellungsweise geben: Für  $X \subseteq (M, \leq)$  sei  $(X, -) = \{y \mid y \in M, y > X\}$ , insbesondere  $(0, -) = M$ ; sei  $[X]$  die Menge aller Punkte von  $M$ , die mit  $X$  vergleichbar sind. Wenn  $X$  eine Anfangskette  $K$  von  $M$  ist und  $(K, -) \neq 0$ , sei  $b(x) = [x] \cap (K, -)$  für jedes  $x > K$ . Das System  $Z(K)$  aller  $K$ -Zweige  $b(x) (x > K)$  heiße die  $K$ -Gabel von  $M$ . Wird nun  $Z(K)$  totalgeordnet, so wird die relative Ordnung zwischen  $K$ -Zweigen auf ihre bezüglichen Elemente übertragen (die  $K$ -Zweige sind paarweise identisch oder disjunkt), womit eine Ordnung  $\varrho_K$  von  $(K, -)$  erzeugt wird. Das System aller Ordnungen  $\varrho_K$  ( $K$  veränderlich) mit  $\leq$  ergibt die bezügliche natürliche Totalordnung von  $M$ .

G. Kurepa.

**Banaschewski, Bernhard:** Über die Konstruktion wohlgeordneter Mengen. Math. Nachr. 10, 239—245 (1953).

Es handelt sich um einen Vortrag, in dem die beiden Zermeloschen Beweise des Wohlordnungssatzes [s. Math. Ann. 59, 514—516 (1904), 56, 107—128 (1908)] im Lichte der neueren Entwicklungen (Extremal- und Hüllen-Betrachtungen) verdeutlicht werden. Sei  $E$  eine Menge und  $\varphi$  eine Abbildung, die jedem  $A \subseteq E$  eine höchstens einpunktige Menge  $\varphi A \subseteq E$  zuordnet. Insbesondere betrachtet der Verf. solche  $\varphi$ , die Auswahlfunktionen zu einer Abbildung  $\theta$  der Potenzmenge  $\mathfrak{P}E$  auf sich selbst sind:  $\varphi A \in \theta A$ , sobald  $\theta A \neq 0$ . Die Rolle der Konfinalitätsbedingung: „Ist  $A \subseteq E$  eine Teilmenge einer  $\varphi$ -Wohlordnung  $U$  und dabei mit  $U$  konfinal, so gilt  $\varphi A = \varphi U$ “ wird hervorgehoben [eine Wohlordnung  $U$  ist eine  $\varphi$ -Wohlordnung, wenn  $\varphi x = \varphi U_x (x \in U)$ ; dabei ist  $U_x$  die Menge aller  $y \in U$ , für die  $y < x$ ]. Anschließend an J. Schmidt [Math. Nachr. 7, 165—182 (1952) wird der hüllen-theoretische Aspekt der ganzen Problematik auch klar dargestellt.

G. Kurepa.

**Jackson, James R.:** A partial ordering defined by certain matrices. Proc. Amer. math. Soc. 4, 429—430 (1953).

$p_{mn} (m = 1, \dots, M; n = 1, \dots, N)$  seien reelle Zahlen. (Von den Eigenschaften der reellen Zahlen wird allerdings lediglich gebraucht, daß jede Zahl genau eine der Eigenschaften  $= 0, > 0, < 0$  besitzt.)  $<$  bedeutet die kleinste transitive Relation, welche die durch „Es gibt  $n$  mit  $p_{mn} < 0 < p_{m'n}$ “ gegebene Relation (zwischen  $m$  und  $m'$ ) enthält. Dieser Begriff entstammt einer Untersuchung über industrielle Produktion, bei welcher  $p_{mn}$  die Menge des beim  $n$ -ten Produktionsprozeß erzeugten  $m$ -ten Wirtschaftsgutes bedeutet. Genau dann ist  $m < m'$  unmöglich und somit  $\leq$  eine Teilordnung, wenn es Permutationen  $\sigma$  von  $\{1, \dots, M\}$  und  $\tau$  von  $\{1, \dots, N\}$  so gibt, daß aus  $p_{\sigma(m)\tau(n)} > 0, m' \leq m, n' \leq n$  stets  $p_{\sigma(m')\tau(n')} \geq 0$  folgt.

G. Pickert.

**Grossmann, Aleksandar:** Sur une propriété des ensembles ordonnés. Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys. astron., II. Ser. 8, 24—26 u. serbo-kroat. Zusammenfassg. 26 (1953).

Comme une généralisation partielle de résultats du Réf. (ce Zbl. 39, 277), l'A. prouve ceci: Chaque chaîne ordonnée  $E$  telle que puiss.  $E \leq \aleph_\xi$ , vérifie ou bien  $\Gamma E < \omega_{\xi+1}$  ou bien  $E$  est une somme ordinale suivant un argument  $H$  dont chaque intervalle non vide  $J$  vérifie  $\Gamma J = \omega_{\xi+1}$ . L'A. se demande si pour tout  $\xi$  on peut prouver, sans l'hypothèse généralisée du continu, l'existence d'une chaîne  $E_\xi$  telle que puiss.  $E_\xi = \aleph_\xi$ ,  $\Gamma E_\xi = \omega_{\xi+1}$ . [La réponse y est par l'affirmative comme le prouve: l'ensemble  $A_\xi$  des complexes finis d'ordinaux  $< \omega_\xi$ , et l'ensemble  $B_\xi$  des  $\omega_\xi$ -suites dyadiques ne contenant, chacune, qu'un nombre fini des 1; alors qu'on ordonne  $B_\xi$  alphabétiquement, on ordonne  $A_\xi$  naturellement: pour  $x, y \in A_\xi$ ,  $x \leq y$  signifie que ou bien  $x$  est une portion initiale de  $y$  ou bien que la suite  $x$  précède alphabétiquement la suite  $y$  (une autre ordination de  $A_\xi$  nous a servi pour d'autres buts; cf. l'ensemble  $\mu$  du mémoire analysé à ce Zbl. 27, 97). Il est préférable de considérer au lieu de  $A_\xi$  l'ensemble des complexes finis de points extraits d'un ensemble de type  $\omega_\xi^* + \omega_\xi$ .] Au début de 1950 l'A. a exposé le théorème de la Note au séminaire du Réf; entretemps, Shepherdson le publia aussi (ce Zbl. 44, 47); l'article correspondant ne nous fut pas accessible jusqu'à présent. *G. Kurepa.*

**Sedmak, Viktor:** Quelques applications des ensembles partiellement ordonnés. C. r. Acad. Sci., Paris 236, 2139—2140 (1953).

Le sujet principal de la Note consiste (Th. 3) dans le fait que  $\text{Sup } d_0 [P] = \aleph_0$ ,  $P$  parcourant la famille des polyèdres dans  $R_3$  (solution d'un problème du rapporteur; cf. Sedmak, ce Zbl. 47, 56; la terminologie et les notations sont les mêmes;  $d_0 [P]$  désigne le nombre minimum d'ordinations totales de  $[P]$  dont l'intersection coïncide avec  $[P]$ ). L'A. effleure quelques idées contiguës dont l'étude aussi bien que le développement détaillé de la Note seront publiés ailleurs. *G. Kurepa.*

**Kurepa, Georges:** Sur les correspondances multivoques. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 1133—1135 (1953).

Soient  $r, s$  deux cardinaux,  $A, B$  deux ensembles de puissances  $\alpha, \beta$ . Une correspondance entre  $A$  et  $B$  est dite  $(r, s)$  si elle associe, à chaque élément de  $A$ ,  $r$  éléments de  $B$ , et à chaque élément de  $B$ ,  $s$  éléments de  $A$ . On définit de même la correspondance  $(\geq r, \leq s)$ ; l'A. démontre que s'il existe entre  $A$  et  $B$  une telle correspondance, on a  $r\alpha \geq s\beta$ . Il en déduit l'extension suivante du théorème de Cantor-Bernstein: s'il existe une correspondance  $(r, s)$  entre  $A$  et une partie de  $B$  et une correspondance  $(r, s)$  entre  $B$  et une partie de  $A$ , alors  $\alpha = \beta$ . Comme conséquence de la première proposition ci-dessus appliquée au cas fini, il énonce sans démonstration une proposition relative au nombre des „faces“ d'un simplexe qui vérifient une certaine propriété. *R. de Possel.*

**Erdős, P. and R. Rado:** A problem on ordered sets. J. London math. Soc. 28, 426—438 (1953).

Désignons par  $\omega_n$  le plus petit ordinal de puissance  $\aleph_n$ . Soit  $S$  un ensemble ordonné de puissance  $\aleph_n$ ; supposons que l'on soit dans l'un des trois cas suivants: ou bien il existe un ensemble de  $S$  qui a pour type  $\omega_n^*$  (ordre inverse de  $\omega_n$ ), ou bien il existe un ensemble de  $S$  qui a pour type d'ordre  $\omega_n$ , ou bien, quel que soit l'ordinal  $\alpha < \omega_n$ , il existe des ensembles de  $S$  qui ont pour types d'ordre  $\alpha$  et  $\alpha^*$ . — S'il en est ainsi quel que soit  $S$ , les AA. disent que  $\aleph_n$  a la propriété  $P$ . — Rappelant qu'un cardinal  $\alpha$  est dit „régulier“ s'il n'est pas la somme de cardinaux  $< \alpha$  en nombre  $< \alpha$ , ils démontrent le théorème suivant: Supposons vraie l'égalité  $2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$  (hypothèse H); alors un cardinal  $\aleph_n$  a la propriété  $P$  si, et seulement si  $\aleph_n$  est régulier ( $\alpha$  étant égal au cardinal immédiatement inférieur à  $\alpha$  s'il existe et égal à  $\alpha$  s'il n'existe pas). C'est évident pour  $n = 0$ . La démonstration est assez longue et fait intervenir 4 lemmes. D'après les AA., J. C. Shepherdson dit avoir démontré de son côté le théorème pour  $n = 1$ . Une note ajoutée au cours de la correction des épreuves signale que L. Gillman a démontré la réciproque; à savoir: la proposition „ $\aleph_n$  a la propriété  $P$  si, et seulement si  $\aleph_n$  est régulier“ entraîne l'hypothèse H. *R. de Possel.*

**Neumer, Walter:** Bemerkungen zur allgemeinen Hypothese  $2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$  im Anschluß an einige Beweisversuche von H. Eyraud. Math. Nachr. 9, 321—342 (1953).

Eyraud (dies. Zbl. 41, 375) untersucht die finale Ordnung der Menge  $\omega_1(\omega_1)$  aller  $\omega_1$ -Folgen von Ordinalzahlen  $< \omega_1$  [die Elemente von  $\omega_1(\omega_1)$  werden auch „ $\omega_1$ -Linien“ genannt]; durch Betrachtungen von  $\omega_2$ -Ketten aus  $\omega_1(\omega_1)$  („Geflechten“, „réseaux“) glaubte er sogar die Kontinuums-hypothese ( $K_0$ ) bewiesen zu haben. (Die Existenz von solchen  $\omega_2$ -Ketten ist eine einfache Verallgemeinerung eines wohlbekannten Satzes von Du Bois Reymond.) An Hand der Eyraudschen Fehlschlüsse werden nun in dieser Arbeit die Bedingungen aufgestellt, unter denen



die Schlußweisen von Eyrard gültig sind. Der Verf. beschränkt sich nicht auf  $(K_0)$ , sondern betrachtet die Hypothese  $(K_\alpha)$ , wonach  $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ . Durch Heranziehung von Aussagen  $(P_\alpha)$ ,  $(R_\alpha)$ ,  $(S)$  usw. werden 30 Sätze bewiesen, darunter auch die logische Äquivalenz von  $(K_\alpha)$ ,  $(P_\alpha)$ ,  $(R_\alpha)$  für jedes  $\alpha$  (Th. 20, 25). Angesichts  $(P_0)$  wird eine Bedingung  $(E)$  (S. 331) formuliert, die hinreichend dafür ist, daß für ein Geflecht die Aussage  $(P_0)$  statthat; andererseits sieht man durch ein Gegenbeispiel, daß  $(E)$  nicht immer gilt. Die allgemeine Kontinuumhypothese ist gleichwertig zu  $(S)$  (S. 340). Terminologie: (auch im Zbl. 41, 375)  $(P_\alpha)$ : Die Anzahl der Primlinien jeder  $\omega_{\alpha+2}$ -Kette von steigenden Linien der final-geordneten Menge  $\omega_{\alpha+1}(\omega_{\alpha+1})$  ist  $\aleph_{\alpha+1}$  (S. 330).  $(R_\alpha)$ : Sei  $E$  eine wohlgeordnete Kette; wenn  $X \cap E$  und jedem  $a \in X$  eine nichtleere Menge  $f(a) \subseteq I(E, a)$  zugeordnet wird, so daß  $\alpha$  die kleinste Zahl ist mit der Eigenschaft  $k f(a) < \aleph_{\alpha+1}$ , und wenn  $k(E - X) \leq \aleph_{\alpha+1}$ , so ist auch  $kE \leq \aleph_{\alpha+1}$ .  $(S)$ : Wenn  $E - X$  einpunktig ist und für jedes  $Q \subseteq E$  mit  $kQ < \aleph_\alpha$  ein  $a \in E$  existiert mit  $f(a) \supseteq Q$ , so ist  $c f(kE)$  die größte reguläre Zahl, mit der eine Zahl der Zahlklasse von  $kE$  confinal sein kann [s.  $(R_\alpha)$  für  $E, X, \alpha, f$ ].  $kx =$  Kardinalzahl von  $x$ ;  $I(E, a) =$  die Menge aller  $x \in E$ , für die  $x < a$ . G. Kurepa.

Sierpinski, Waclaw: Sur quelques résultats nouveaux concernant l'hypothèse du continu. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 440 (1953).

Sierpinski, W.: Sur un théorème concernant l'équivalence des ensembles de points par décomposition finie. Matematiche 8, 4 p. (1953).

Es wird der folgende Satz bewiesen: „Sind  $A$  und  $B$  zwei kongruente Punktmengen und enthält ihr Durchschnitt  $AB$  weniger als  $n(n+1)/2$  Punkte, so läßt sich jede der beiden Mengen  $A - B$  und  $B - A$  in  $n$  disjunkte Teilmengen zerlegen, so daß jede Zerlegungskomponente von  $A$  einer Zerlegungskomponente von  $B$  kongruent ist und umgekehrt.“ Der Satz stammt ursprünglich von A. Lindbaum, der ihn in Fundamenta Math. 8, 209—222 (1926) (insbesondere S. 218) ohne Beweis angegeben hat. — Über den Lindenbaumschen Satz hinaus beweist der Verf. noch, daß die Anzahl  $n(n+1)/2$  sich nicht vergrößern läßt.

K. Bögel.

Watanabe, Hideaki: Une remarque sur l'uniformisation des ensembles analytiques plans. Tôhoku math. J., II. Ser. 5, 79—82 (1953).

Der Satz von Lusin, daß jede ebene  $A$ -Menge durch eine  $A_{\sigma\delta}$ -Menge uniformisiert werden kann, wird hier ergänzt durch den Satz, daß dies schon durch eine  $A_{\tau\delta}$ -Menge geschehen kann ( $A_\tau$ -Mengen Komplemente von Mengen  $A_\sigma$ ).

H. Hornich.

Volkman, Bodo: Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind. I. Math. Z. 58, 284—287 (1953).

Verf. betrachtet  $g$ -adische Entwicklungen  $q = \sum_{i=1}^{\infty} e_i g^{-i}$ ,  $e_i, g_i$  ganz;  $0 \leq e_i < g$ ,  $g \geq 2$ .  $\langle q \rangle_g$  bezeichnet die Menge aller  $\sigma = \sum_{i=1}^{\infty} f_i g^{-i}$  mit  $0 \leq f_i \leq e_i$ .

Für  $\langle q \rangle_g$  werden mit Hilfe eines Satzes von Eggleston (dies. Zbl. 45, 166) die Hausdorffsche Dimension in bezug auf eine gewisse Funktionenklasse und die gebrochene Hausdorffsche Dimension bestimmt.

H.-E. Richert.

## Differentiation und Integration reeller Funktionen. Maßtheorie:

• Luzin (Lusin), N. N.: Gesammelte Werke. Bd. I: Metrische Funktionentheorie und Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Moskau: Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR 1953. 400 S. R. 22,— [Russisch].

Nachdruck der einundzwanzig Arbeiten von Lusin aus der Theorie der reellen Funktionen und aus der Theorie der analytischen Funktionen. R. Sikorski.

Cafiero, Federico: Sulle famiglie compatte di funzioni additive di insieme astratto. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 30—40 (1953).

Verf. gibt zwei (indirekte) Beweise der folgenden Verallgemeinerung eines auf Lebesgue und Vitali zurückgehenden Satzes: Ist  $\varphi_n|_{\mathfrak{M}}$  totaladditiv auf dem

$\sigma$ -Mengenkörper  $\mathfrak{M}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , und ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n(M) = 0$  für jedes  $M \in \mathfrak{M}$ , so ist die Folge  $q_1, q_2, \dots$  gleichmäßig stetig, d. h. für jede konvergente Folge  $M_1, M_2, \dots$  aus  $\mathfrak{M}$  mit leerem Limes und jedes  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $m$ , so daß  $q_n(M_\mu) < \epsilon$  für  $\mu > m$  und alle  $n$ .  
G. Aumann.

Hildebrandt, T. H.: Integration in abstract spaces. Bull. Amer. math. Soc. 59, 111—139 (1953).

Historische Übersicht der Entwicklung der wichtigsten abstrakten Integralbegriffe.  
A. Csizsár.

Sobolev, V. I.: Über das halbgeordnete Maß von Mengen, meßbare Funktionen und gewisse abstrakte Integrale. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 91, 23—26 (1953) [Russisch].

$R$  sei ein partiell geordneter Ring mit Einheitselement  $e$  (der noch weitere Bedingungen erfüllen muß).  $e_\lambda$  ( $-\infty < \lambda < +\infty$ ) sei eine Zerlegung von  $e$ . Sei  $I$  das Intervall  $(\lambda, \mu)$ . Dann sei  $e(I) = e_\mu - e_{\lambda+0}$ ;  $e(I)$  ist eine totaladditive Intervallfunktion mit Werten aus  $R$ , welche Verf. als Maß von  $I$  einführt. Man gelangt in der üblichen Weise zum Maß der linearen offenen und abgeschlossenen Mengen, und darüber hinaus zum äußeren und inneren Maß beliebiger linearer Mengen  $M$ . Falls äußeres und inneres Maß von  $M$  übereinstimmen, erhält man das Maß  $e(M)$ . Auf dem üblichen Weg definiert Verf. für reellwertige Funktion  $f(\lambda)$  und meßbare Mengen  $E$  das Integral  $\int_E f(\lambda) de_\lambda$ . Man vergleiche übrigens Steen, dies. Zbl. 18, 69. Nach Freudenthal, dies. Zbl. 14, 313 existiert für jedes  $a \in R$  eine eindeutig bestimmte Zerlegung  $e_\lambda^a$  der Einheit  $e$ , so daß  $a = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda de_\lambda^a$ . Wir nennen eine Menge  $M$   $a$ -meßbar, wenn im obigen Sinne das Maß  $e^a(M)$  existiert. Verf. gibt ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür, daß  $b \in R$  in der Gestalt  $b = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) de_\lambda^a$  darstellbar ist: Zu jedem Intervall  $I$  muß eine  $a$ -meßbare Menge  $M$  existieren, so daß  $e^b(I) = e^a(M)$ . Die Ausführungen sind zum Teil skizzenhaft. Zitate des Verf.: Plessner und Rochlin: Uspechi mat. Nauk 1(11), 71—191 (1946), Sobolev, dies. Zbl. 29, 49.

L. Schmetterer.

Corominas, Ernest: Contribution à la théorie de la dérivation d'ordre supérieure. Bull. Soc. math. France 81, 177—222 (1953).

Extension aux quotients différentiels des propriétés classiques des dérivées. Première partie d'un travail dont la suite paraîtra dans d'autres périodiques.

A. Revuz.

Bonati Savorgnan, Carlo: Sulla derivazione di funzioni composte. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 22, 258—264 (1953).

L'A. dimostra che la funzione composta  $f(x(t), y(t), z(t))$  ( $a \leq t \leq b$ ) è dotata quasi ovunque di derivata asintotica, questa riuscendo poi uguale a

$$f'_x(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + f'_y(x(t), y(t), z(t)) y'(t) + f'_z(x(t), y(t), z(t)) z'(t),$$

se  $f(x, y, z)$  è derivabile parzialmente rispetto ad  $x, y$  e  $z$  nel cubo  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ , le derivate parziali prime di  $f(x, y, z)$  riuscendo continue rispetto alle singole coppie delle variabili, e se le funzioni  $x(t), y(t)$  e  $z(t)$  sono assolutamente continue in  $a \leq t \leq b$ , vi risultano comprese fra zero ed uno e vi soddisfanno quasi ovunque alla  $x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) > 0$ . Tutte queste ipotesi possono essere attenuate se la funzione composta è del tipo  $f(x, y(x), z(x))$ , come l'A. dimostra.

G. Scorza Dragoni.

Lodigiani, Bruna: Sulla differenziabilità asintotica regolare delle funzioni di più variabili. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 22, 251—257 (1953).

L'A. dimostra che se nel cubo  $S: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$  la funzione  $f(x, y, z)$  è dotata di derivate parziali prime e queste riescono continue rispetto alle singole coppie di variabili, la funzione  $f(x, y, z)$  è dotata quasi ovunque in  $S$  di un differenziale asintotico regolare.

G. Scorza Dragoni.

Šmidov, F. I.: Zur Theorie der Funktionen von zwei Veränderlichen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 89, 981—982 (1953) [Russisch].



Es sei  $f(x, y)$  eine beliebige Funktion der beiden Veränderlichen  $x$  und  $y$ , und es sei  $\Gamma$  ihr aus den Punkten  $M = (x, y, f(x, y))$  bestehender „Graph“ im dreidimensionalen Raume. Verf. definiert dann „verallgemeinerte Halbtangenten“ an  $\Gamma$  und „Punkte positiver Dichte“ auf  $\Gamma$ . Aus einer seiner früheren Arbeiten [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 39, 271 (1943)] kann er folgern, daß die Menge  $U$  derjenigen Punkte positiver Dichte auf  $\Gamma$ , in denen in mindestens einer Richtung keine verallgemeinerte Halbtangente existiert, auf einer abzählbaren Menge von „Lipschitzflächen“ liegt, d. h. auf Flächen  $z = f_n(x, y)$ , die den Bedingungen  $|f_n(x_1, y_1) - f_n(x_2, y_2)| \leq L_n(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|)$  genügen, wobei die Konstante  $L_n$  durch  $f_n$  bestimmt ist. Für meßbare Funktionen  $f(x, y)$  lassen sich schließlich zwei Sätze von V. V. Stepanov [Mat. Sbornik 32, 511—527 (1924)] verschärfen zu: Satz 1. Ist die Funktion  $f(x, y)$  auf ihrem Definitionsbereich  $E$  meßbar, so tritt in jedem Punkte  $(x, y) \in E$ , abgesehen von einer Menge, die das Maß Null hat, einer der beiden folgenden Fälle ein: entweder hat  $f(x, y)$  in diesem Punkte ein asymptotisch vollständiges Differential, oder jeder von dem Punkte  $(x, y, f(x, y))$  ausgehende Strahl ist eine verallgemeinerte Halbtangente an  $\Gamma$ . — Satz 2. Unter derselben Voraussetzung ist die Menge  $E'$  der Punkte, in denen  $f(x, y)$  ein asymptotisch vollständiges Differential besitzt, als Summe höchstens abzählbar vieler Mengen  $E_n$  darstellbar, auf deren jeder  $f(x, y)$  der obigen Lipschitzbedingung genügt.

K. Bögel.

Kudrjavec, L. D.: Über die Eigenschaften differenzierbarer Abbildungen von Gebieten Euklidischer Räume. Mat. Sbornik, n. Ser. 32 (74), 493—514 (1953) [Russisch].

The mapping  $f = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$  under consideration transforms a connected open subset  $G$  of the  $n$ -dimensional Euclidean space  $E_n$  into the  $m$ -dimensional Euclidean space  $E_m$  and is differentiable, i. e. the functions  $f_1, f_2, \dots, f_m$  have a differential in every point  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in G$ . — (I) If a set  $A \subset G$  is of the  $\lambda$ -dimensional Hausdorff measure zero, then  $f(A)$  is also of the  $\lambda$ -dimensional Hausdorff measure zero. — Suppose now that  $n = m$ . (II) For almost all points  $y \in f(A)$  (where  $A \subset G$  is measurable), if  $x_0 \in f^{-1}(y)$ , then  $\lim_{x(Q) \rightarrow 0} \frac{|f(Q) \cdot f(A)|}{|f(Q)|} = 1$  where  $Q$  is a cube with the centre  $x_0$ . — A topological definition of an orientable mapping  $f$  of  $G \subset E_n$  is formulated, such that: (III)  $f$  is orientable if and only if the functional determinant  $J = \partial(f_1, \dots, f_n)/\partial(x_1, \dots, x_n)$  is either non-negative or non-positive. (IV) If  $f$  is orientable, if the set  $G_0: J(x) = 0$  has no interior point, and if  $y$  is a point of the boundary of  $f(G)$ , then  $f^{-1}(y) \subset G_0$  and  $f^{-1}(y)$  is not compact. Theorem (IV) is also generalized to the case  $m < n$ .

R. Sikorski.

Weissinger, Johannes: Über einen Differentiationsprozeß für Abbildungen und die Transformationsformel für Gebietsintegrale. Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden 2, 461—465 (1953).

Es sei  $P \rightarrow \Phi(P)$  eine Abbildung der Punkte  $P$  eines  $n$ -dimensionalen Euklidischen Raumes in einen  $n$ -dimensionalen Raum hinein. Wenn  $\lim J[\Phi(Q_v)]/J[Q_v] = \Phi'(P)$  für jede sich auf  $P$  zusammenziehende Folge von Würfeln  $Q_v$  existiert ( $J[\dots]$  ist der Inhalt der betr. Punktmengen), so heißt  $\Phi'(P)$  in Analogie zur gewöhnlichen Ableitung einer Funktion die Maßableitung von  $\Phi$ . Es gilt ähnlich wie in der gewöhnlichen Differentialrechnung ein Mittelwertsatz, mit dessen Hilfe die Transformationsformel für Gebietsintegrale ohne viele Epsilonantik hergeleitet werden kann. Schließlich zeigt man, daß  $\Phi'(P)$  im allgemeinen der Absolutbetrag der Funktionaldeterminante der Abbildung ist.

W. Maak.

Nikol'skij, S. M.: Eigenschaften der differenzierbaren Funktionen von mehreren Veränderlichen auf geschlossenen glatten Mannigfaltigkeiten. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 88, 213—216 (1953) [Russisch].

Unter einer  $m$ -dimensionalen ( $1 \leq m < n$ ) Mannigfaltigkeit  $S$  im  $R_n$  wird eine abgeschlossene, beschränkte Punktmenge des  $R_n$  mit folgender Eigenschaft verstanden: Um jeden Punkt von  $S$  gebe es eine Kugel, die aus  $S$  ein Stück ausschneidet, welches sich bei geeigneter Numerierung der Koordinaten durch Gleichungen:  $x_k = \varphi_k(x_1, \dots, x_m)$ ,  $k = m+1, \dots, n$ , darstellen läßt. Dabei durchlaufe  $(x_1, \dots, x_m)$  ein  $m$ -dimensionales Gebiet  $G$ ; die Funktionen  $\varphi_k$  werden Differenzier-

barkeitsbedingungen unterworfen. Aus der Zugehörigkeit der Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$  zu der Funktionsklasse  $H_p^{r_1, \dots, r_n}$  (vgl. dies. Zbl. 43, 56) folgert der Verf. entsprechende Eigenschaften für die „Normalableitungen“ von  $f$  auf  $S$ . Sind umgekehrt auf  $S$  Funktionen mit den Eigenschaften von Normalableitungen gegeben und gehören diese zu gewissen Funktionsklassen, so kann daraus auf die Existenz einer Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$  geschlossen werden, deren Normalableitungen auf  $S$  sie sind; die Funktionsklasse von  $f$  ist angebar. Diese Sätze verallgemeinern Ergebnisse des Verf. in der Arbeit dies. Zbl. 50, 62. W. Thimm.

**Thompson, Lee Detmer:** Converse of a well known theorem on integral means. Proc. Amer. math. Soc. 4, 402–407 (1953).

Die reelle Funktion  $f(x)$  sei Lebesgue-integrierbar im offenen Intervall  $I$ , es sei  $M_h f(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$ . Folgender Satz wird bewiesen: Gilt für  $x \in I$   $\lim_{h \rightarrow 0} M_h f(x) = f(x)$  und hat für  $h > 0$   $M_h f(x)$  eine stetige  $(n+1)$ -te Ableitung in  $I$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), so ist  $f^{(n)}(x)$  stetig in  $I$ . A. Császár.

**Apéry, Roger:** Une inégalité sur les fonctions de variable réelle. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 3–4 (1953).

Für  $x \geq 0$  sei  $f(x)$  meßbar und  $0 \leq f(x) \leq 1$ , ferner  $g(x) \geq 0$  und nicht fallend; dann gilt  $\int_0^{+\infty} f(x)g(x)dx \leq \int_0^{\xi} g(x)dx$  mit  $\xi = \int_0^{+\infty} f(x)dx$ . G. Aumann.

**Baidaff, Bernardo I.:** Berechnung des bestimmten Integrals eines exakten Differentials von mehreren Veränderlichen. Bol. mat. 26, 23–24 (1953) [Spanisch].

**Wall, H. S.:** Concerning continuous continued fractions and certain systems of Stieltjes integral equations. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 2, 73–84 (1953).

P. Puig Adam (this Zbl. 44, 56) defined  $w$  as the continuous continued fraction from  $a$  to  $b$  determined by  $(f, g, z)$  as follows: If each of  $f$  and  $g$  is a function defined in an interval  $[a, b]$ , and  $z$  a number, and if  $\epsilon$  is a positive number, there exists a positive number  $\sigma$  such that if  $A$  is an ordered subdivision  $\{x_i\}_{i=0}^{n+1}$  of  $[a, b]$  of norm less than  $\sigma$  and, for each positive integer  $i$  less than  $n+2$ ,  $h_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$  and  $k_i = g(x_i) - g(x_{i-1})$ , then the continued fraction

$$\Phi_A[a, b] = h_1 + \frac{1}{k_1 + \frac{1}{h_2 + \frac{1}{k_2 + \dots + \frac{1}{h_{n+1}} + \frac{1}{k_{n+1}} + \frac{1}{z}}}}$$

differs from  $w$  by less than  $\epsilon$ . It was shown in this work that if each of  $f$  and  $g$  is a function having a positive and continuous derivative in  $[a, b]$  and  $z$  a positive number, then the continuous continued fraction from  $a$  to  $b$  determined by  $(f, g, z)$  exists. Formulas were given which related the function  $\Phi_A^b(f, g, z)$ ,  $a \leq x \leq b$ , to certain differential equations. Here  $w$  is denoted by  $\Phi_a^b(f, g, z)$ , and if  $c$  is a number in  $[a, b]$ , then  $\Phi_c(f, g, z)$  denotes the number  $z$ . In this paper the existence of the continuous continued fraction from  $a$  to  $b$  determined by  $(f, g, z)$  is established for any sensed pair  $f, g$  of functions which are continuous and of bounded variation in  $[a, b]$ , and the function  $\Phi_a^b(f, g, z)$  is connected with certain differential and integral equations. E. Frank.

**Bang, Thøger:** The theory of metric spaces applied to infinitely differentiable functions. Math. Scand. 1, 137–152 (1953).

Let  $m_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) be a sequence of positive numbers satisfying  $m_n^{1/n} \rightarrow \infty$ , and let  $m_{n,c}$  be the greatest logarithmically convex minorant of  $m_n$ . Let  $P$  be the sequence of subindices  $p$  verifying  $m_p = m_{p,c}$ .  $f(x)$  being infinitely differentiable, put

$$\|f\|_x = \inf_{p \in P} \left[ \max \left\{ e^{-p}, \max_{0 \leq n \leq p} \frac{|f^{(n)}(x)|}{e^n m_{n,c}} \right\} \right].$$

If  $|f^{(n)}(\xi)| \leq m_n$ , then  $\|f\|_x \leq e^{-q}$  implies (\*)  $\|f\|_{x+h} \leq \|f\|_x \exp(e|h| m_q^c / m_{q-1,c})$ . From this there follows easily a proof of the deeper half of the Denjoy-Carleman theorem, stating that if (1)  $|f^{(n)}(\xi)| \leq m_n$ ,  $f^{(n)}(a) = 0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) and (2)  $\sum m_n^c / m_{n+1}^c = \infty$ , then  $f(x) = 0$ . This proof is elementary in the sense that it does not use complex function theory, an other elementary proof has been given previously by the author in his Thesis (Kjöbenhavn 1946, p. 65). If (1) and (2) are satisfied, i. e. if  $f(x)$  is quasi-analytic (q. a.), a method is indicated to calculate  $f(x)$  from  $f^{(n)}(a)$ , which is not a linear summation of the Taylor series, as used hitherto (loc. cit.



§ 15). From (\*) the author deduces new proofs of other results, proved also in his Thesis: If  $f(x) \not\equiv 0$  is q. a. and  $f^{(n)}(x_n) = 0$ , then  $\liminf_{q \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=1}^q |x_{j-1} - x_j| \right) \left/ \left( \sum_{n=1}^q m_{n-1}/m_n \right) \right. > 0$ . This generalizes results of Gontcharoff and Soula (loc. cit. p. 75). From this follows a proof of Borel's conjecture that if  $f(x)$  is q. a. and  $f^{(n)}(a) > 0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), then  $f(x)$  is analytic (loc. cit. p. 85). Finally let  $f(x) \not\equiv 0$  be q. a. and let  $f(z_j) = 0$ ,  $z_0 < z_1 < z_2 < \dots$ , then  $z_q > \frac{1}{e} \sum_{j=1}^q \frac{m_{j-1}}{m_j} - C$ , where  $C$  is independent of  $q$ . This is to be compared with a result of

Hirschman (this Zbl. 37, 47).

J. Horváth.

Mulè, Giovanni: Su un criterio di convergenza uniforma. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 8, 43—44 (1953).

Verf. beweist das einfache Resultat: notwendig und hinreichend für die gleichmäßige Konvergenz einer beliebigen Funktionenfolge ist, daß jede ihrer Teilfolgen eine gleichmäßig konvergente Folge enthält.

H. Beckert.

Bertolini, Fernando: Osservazioni sulle funzioni omogenee. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 8, 65—71 (1953).

Ausgehend vom Begriffe „homogen vom Grade  $\alpha$  bez. eines Poles  $P_0$ “, wie ihn Picone (Lezioni di Analisi Matematica I, Roma 1950) für Funktionen  $f(x_1, x_2, \dots, x_r)$  definierte, wird gezeigt, daß die Gesamtheit der Pole einer gegebenen Funktion  $f$  einen linearen Raum erfüllen und daß eine Funktion  $f$ , die homogen vom Grade  $\alpha$  bez.  $P_1$  und gleichzeitig homogen vom Grade  $\beta$  bez.  $P_2$ , bei  $\alpha \neq \beta$  und  $P_1 \neq P_2$  identisch verschwindet.

R. W. Weitzenböck.

### Allgemeine Reihenlehre:

Costa, M. A. Fernandes: Einige Sätze über Grenzwerte von Folgen. Gaz. Mat., Lisboa 14, Nr. 54, 7—13 (1953) [Portugiesisch].

Hanani, Haim: On sums of series of complex numbers. Pacific J. Math. 3, 695—709 (1953).

Anschließend an A. Dvoretzky und H. Hanani (dies. Zbl. 29, 253) werden die Mengen der Werte bestimmt, die für gegebene  $c_\nu \rightarrow 0$  als Summen  $\sum \varepsilon_\nu c_\nu$  mit geeigneten  $\varepsilon_\nu = \pm 1$  auftreten können.

Robert Schmidt.

Gumowski, Igor: Summation of slowly converging series. J. appl. Phys. 24, 1068 (1953).

Von einem beachtenswerten Ansatz kommt Verf. nach bedenkenloser Vertauschung von Grenzübergängen zu einer Formel, die (vorbehaltlich der Restabschätzung) richtig wird, wenn man dort in  $b_2, b_4, \dots$  die Faktoren  $2!, 4!, \dots$  der Nenner streicht. Dann aber erweist sie sich als die Eulersche Summenformel ohne Restglied.

Robert Schmidt.

Harington, C. F. and J. M. Hyslop: An analogue for strong summability of Abel's summability method. Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser. 9, 28—34 (1953).

1. Für  $p \geq q \geq 1$  folgt aus der  $[A; p]$ -Summierbarkeit (starke  $A$ -Summierbarkeit mit dem Index  $p$ ) die  $[A, q]$ -Summierbarkeit. 2. Für  $k \geq 0$ ,  $p \geq 1$  folgt aus der  $[C; k, p]$ -Summierbarkeit die  $[A, p]$ -Summierbarkeit. Robert Schmidt.

Hara, Hisao: On the Cauchy's product series theorem on Euler's summability. Kōdai math. Sem. Reports 3, 91—92 (1953).

Der Verf. beweist folgendes Analogon zum Reihenmultiplikationssatz von Cauchy: Sei  $|E_p|$  das absolute Euler-Verfahren der Ordnung  $p \geq 0$ ; dann folgt aus  $|E_p| \cdot \sum a_n = A$  und  $|E_p| \cdot \sum b_n = B$  für das Cauchy-Produkt  $\sum c_n$  von  $\sum a_n$  und  $\sum b_n$  stets  $|E_p| \cdot \sum c_n = A B$ . Entsprechende Ausdehnungen der Sätze von Mertens und Abel waren schon bekannt (vgl. z. B. G. H. Hardy, Divergent Series, Oxford 1949, insbesondere S. 237, dies. Zbl. 32, 58).

D. Gaier.

Newton, Tyre A.: A note on the Hölder mean. Pacific J. Math. 3, 807—822 (1953).

Die Hölder-Mittel  $H_n^{(k)}$  ( $k = 0, 1, \dots$  fest) einer Folge  $\{s_n\}$  sind definiert durch  $H_n^{(0)} = s_n$ ,  $H_n^{(k)} = (n+1)^{-1} \sum_{\nu=0}^n H_\nu^{(k-1)}$ . Die  $H_n^{(k)}$  lassen sich aus den  $H_n^{(k+m)}$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) vermöge (1)  $H_n^{(k)} = \sum_{j=0}^m (-1)^j A_j^{(m)}(n) H_{n-j}^{(k+m)}$  mit  $A_j^{(m)}(n) = \binom{n}{j} [A^j(n+1-j)^m]$  ( $A^j = j$ -te Differenzen) berechnen. Verf. gibt eine neue Ableitung von (1) über die Polynome  $F_j^{(m)}(x) = \sum x^{p_0} (x-1)^{p_1} \dots (x-j)^{p_j}$  ( $0 \leq j \leq m$ , Summe erstreckt über alle Produkte mit positiven ganzen  $p_0$  und  $p_0 + p_1 + \dots + p_j = m+1$ ),  $F_j^{(m)}(x) = 0$  ( $j < 0$ ,  $j > m$ ). Setzt man nämlich  $F_j^{(m)}(x) = x G_j^{(m)}(x)$ , so ist  $A_j^{(m)}(n) = G_j^{(m)}(n+1)$ . Diskussion von Rekursionsformeln der Polynome  $G_j^{(m)}(x)$ . Mit Hilfe der  $G_j^{(m)}(x)$  lassen sich auch die Hölder-Mittel  $H_n^{(-m)}$  der negativ-ganzzahligen Ordnung  $-m$  durch

$$H_n^{(-m)} = \sum_{j=0}^m (-1)^j G_j^{(m)}(n+1) s_{n-j}$$

erklären. Hierfür wird bewiesen: a) Ist  $\sum a_n = S$  und  $a_n = o(n^{-m})$  ( $n \rightarrow \infty$ ), so gilt  $H^{(-m)} - \sum a_n = S$ . b) Ist  $\sum a_n = S$  mit alternierenden  $a_n$ , so ist  $a_n = o(n^{-m})$  ( $n \rightarrow \infty$ ) notwendig und hinreichend für  $H^{(-m)} - \sum a_n = S$ . D. Gaier.

**Brudno, A. L.: Die Normen von Toeplitzischen Feldern.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **91**, 11–14 (1953) [Russisch].

Vorbereitende Untersuchungen für die nachstehende Arbeit. K. Zeller.

**Brudno, A. L.: Die Relativnormen Toeplitzscher Matrizen.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **91**, 197–200 (1953) [Russisch].

Verf. verwendet zum Vergleich der Stärke permanenter Matrixverfahren bezüglich beschränkter Folgen den Ausdruck

$$N_A^B(\delta) = \sup_x \lim_n |\sum_k b_{nk} x_k|,$$

wo zur Konkurrenz alle Folgen  $\{x_k\} = x$  mit  $\lim x_k = 1$  und  $\lim \sum_k a_{nk} x_k = \delta$  zugelassen sind. Er leitet verschiedene Eigenschaften dieses Ausdrucks her; u. a. ist  $B \geq A$  (bezüglich beschränkter Folgen) gleichbedeutend mit  $N_A^B(0) = 0$  (Satz 1–5). Satz 6 besagt: Limitiert  $B$  jede beschränkte  $A$ -limitierbare Folge, so gilt eine entsprechende Beziehung für gleichmäßige Limitierbarkeit. Von besonderem Interesse sind die Untersuchungen über Folgen permanenter Verfahren  $A_1, A_2, \dots$  zu denen es kein Matrixverfahren  $A$  gibt, das bezüglich beschränkter Folgen stärker als jedes einzelne  $A_i$  ist. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für dieses Vorkommnis wird mittels  $N_{A_k}^{A_1}(\delta)$  formuliert (Satz 7 und 8, Beispiel 2). Literatur: Brudno, Mat. Sbornik, n. Ser. **16** (58), 191–247 (1945). K. Zeller.

**Ramanujan, M. S.: Series-to-series quasi-Hausdorff transformations.** J. Indian math. Soc., n. Ser. **17**, 47–53 (1953).

Die Transponierte einer Hausdorffschen Reihe-in-Reihe-Transformation ist dann und nur dann eine  $\chi$ -Matrix (= regulär), wenn ihre  $\mu_n$  eine Momentenfolge bilden und  $\mu_0 = 1$  ist. Jede unmittelbare Fortsetzung einer analytischen Funktion (eines Funktionselementes) ist die Transponierte einer Hausdorffschen Transformation.

Robert Schmidt.

**Clunie, James: An extension of quasi-monotone series.** Math. Student **20**, 107–112 (1953).

Man kann in der Definition der Quasimonotonie  $a_{n+1} \leq a_n(1 + \chi/n)$  von O. Szasz (dies. Zbl. **35**, 39) nicht  $\chi$  durch eine nichtbeschränkte Folge  $\chi_n$  ersetzen, ohne daß der Abelsche Test, der Kondensationstest und der Integraltest falsch werden.

Robert Schmidt.



**Tietze, Heinrich:** Über eine Verallgemeinerung des Gaußschen arithmetisch-geometrischen Mittels und die zugehörige Folge von Zahlen- $n$ -tupeln. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1952, 191—195 (1953).

Verf. untersucht den Iterationsprozeß:

$$(1) \quad x_k^0 = x_k, \quad x_k^{(j+1)} = \sqrt[k]{\binom{n}{k}^{-1} \sum_{i_1 \neq i_2 \dots i_m} x_{i_1}^{(j)} \dots x_{i_k}^{(j)}} \quad (k = 1, 2, \dots, n; j = 0, 1, 2, \dots).$$

Er behandelt die Frage, ob der Prozeß nach rückwärts beliebig fortsetzbar ist, d. h. ob es  $n$  Folgen  $\{x_k^{(j)}\}$  ( $k = 1, 2, \dots, n; j = 0, -1, -2, \dots$ ) gibt, für welche (1) auch bei allen negativen  $j$ -Werten erfüllt wird. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß die Polynome  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-x_k^{(j)})^k y_n^{n-k}$  für jedes  $j = 0, -1, -2, \dots$

lauter (verschiedene) positive Wurzeln haben. Verf. zeigt durch Beispiele, daß dies bei  $n \geq 3$  auch dann nicht immer der Fall ist, falls  $x_1 > x_2 > \dots > x_n > 0$  vorausgesetzt wird. Für  $n = 2$  ist die Fortsetzung nach rückwärts durch die Formeln  $x_{1,2}^{(j-1)} = x_2^{(j)} \pm \sqrt{[x_1^{(j)}]^2 - [x_2^{(j)}]^2}$  ( $j = 0, -1, -2, \dots$ ) immer gesichert. Für  $n \geq 3$  wirft Verf. die Frage auf, ob es überhaupt solche Werte- $n$ -tupel  $x_1, x_2, \dots, x_n$  gibt, die sich gemäß den Formeln (1) nach rückwärts beliebig fortsetzen lassen.

*J. Aczél.*

**Spiegel, M. R.:** The summation of series involving roots of transcendental equations and related applications. J. appl. Phys. 24, 1103—1106 (1953).

Grundsätzlich kann man die Potenzreihenkoeffizienten einer ganzen Funktion aus den Gliedern der Weierstraßschen Produktdarstellung heraus berechnen. Dies wird zur Auswertung solcher Reihen ausgenutzt wie  $\sum_n 1/n^k$  und  $\sum_n 1/p_n^k$  ( $k = 2, 4, 8$ ), wenn  $p_n$  die positiven Nullstellen der Besselschen Funktion  $J_0(x)$ , von  $\operatorname{tg} x - x$  oder von  $\cos x \cosh x + 1$  durchläuft.

*Robert Schmidt.*

**Forster, Herbert:** Ein Grenzwertsatz. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1952, 93—97 (1953).

Ein Satz, aus dem sich folgern läßt: Für  $F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{2\nu}}{\nu! \Gamma(\nu+n+1) \cdot \Gamma(2\nu+n+1)}$

mit einer positiven Konstanten  $n$  ist  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{\sqrt{x} F'(x)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . *Robert Schmidt.*

**Perron, Oskar:** Über eine Formel von Ramanujan. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1952, 197—213 (1953).

A proof is given of the following formula of Ramanujan (Collected Papers, Cambridge 1927, p. 350):

$$x + \frac{1^2 - n^2}{x} + \frac{2^2 - m^2}{x} + \frac{3^2 - n^2}{x} + \frac{4^2 - m^2}{x} + \dots = m \frac{1 + P(x)}{1 - P(x)},$$

where

$$P(x) = \prod_{\epsilon} \Gamma\left(\frac{1+x+m+\epsilon n}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3+x-m-\epsilon n}{4}\right) \Big/ \Gamma\left(\frac{1+x-m-\epsilon n}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3+x+m+\epsilon n}{4}\right),$$

$\epsilon = \pm 1$ . The formula is also shown true for complex  $x$ , and  $n$  and  $m$  arbitrary complex numbers provided no partial numerator vanishes. The formula

$$\frac{m(1-n)}{x-n+m} + \frac{(1+n)(2-m)}{x+n-m} + \frac{(2+m)(3-n)}{x-n+m} + \frac{(3+n)(4-m)}{x+n-m} + \dots$$

$$= \frac{m-n-x}{2} + \frac{m+n+x}{2} \cdot \frac{1}{\Phi(1+x)},$$

where  $\Phi(x) = 1/P(x)$ , is also proved for complex  $n, m, x$ , for which no partial numerator vanishes, the real parts of  $x+n-m$  and  $x-n+m$  have the same sign, and in the case of negative signs also  $R(1+x) < 0$ . *E. Frank.*

Izumi, Shin-ichi: On an approximation problem in the theory of probability. Tôhoku math. J., II. Ser. 5, 22—28 (1953).

1. Wenn  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|f(k)|}{w^k}$  für einen Wert  $w$  konvergiert, dann gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein Polynom  $P(x)$  derart, daß  $\sum_{n=0}^{\infty} P(n) - f(n) \frac{\lambda^n}{n!} < \varepsilon$  zutrifft. 2. Wenn  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^2(k)}{w^k}$  für einen positiven Wert konvergiert, dann gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein Polynom  $P(x)$  derart, daß  $\sum_{n=0}^{\infty} (P(n) - f(n))^2 \frac{\lambda^n}{n!} < \varepsilon$  zutrifft.

Robert Schmidt.

### Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

● Lense, Josef: Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik. 3. Aufl. Berlin: Walter de Gruyter & Co. 1953. 216 S. DM 26,—.

Popken, J.: Asymptotic expansions from an algebraic standpoint. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 56, 131—143 (1953).

Bekanntlich lassen sich viele Umrechnungen mit „formalen“ Potenzreihen in den Rahmen eines allgemeinen Konvergenzbegriffes einordnen, indem man im Körper der formalen Potenzreihen eine geeignete Bewertung einführt. Bei der von Van der Corput vorgeschlagenen Erweiterung der Theorie der asymptotischen Entwicklungen gelingt eine solche Reduktion auf die Bewertungstheorie nicht, da die Multiplikationseigenschaft nicht notwendig erhalten bleibt. Der Verf. zeigt, daß eine analoge Behandlung auch in diesem Falle dennoch möglich ist, wenn man sich auf die von K. Mahler studierten Pseudobewertungen stützt, bei denen die Gleichung  $\varphi(a, b) = \varphi(a)\varphi(b)$  durch die Ungleichung  $\varphi(a, b) \leq \varphi(a)\varphi(b)$  ersetzt wird. Zu diesem Zwecke werden insbesondere Sätze über Konvergenz von Reihen und Folgen im Falle der Metrisierung durch Pseudobewertungen hergeleitet. Zum Schluß werden analoge Überlegungen für asymptotische Integrale skizziert. A. Ostrowski.

Freud, Géza: Über die Lebesgueschen Funktionen der Lagrangeschen Interpolation. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 4, 137—142 und russ. Zusammenfassg. 142 (1953).

Es sei  $l_{kn}(x)$  mit  $k = 1, 2, \dots, n$  die Grundfunktion, welche zum Grundpunkte  $x_{kn}$  der  $n$ -ten Lagrangeschen Interpolation mit der Zahlenmatrix  $\{x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{nn}\}$  gehört. Wenn  $x_{in}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) die Nullstellen des durch die nichtnegative Gewichtsfunktion  $w(x) \in L$  bestimmten normierten Orthogonalpolynoms  $P_n(x)$  sind, wenn in einem Teilintervall  $(c, d)$  vom Orthogonalitätsintervall  $(a, b)$  gilt  $0 < m \leq w(x) \leq M$  und wenn ferner  $|P_n(x)| \leq K$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), so besteht gleichmäßig für alle  $x$  in jedem inneren Teilintervall von  $(c, d)$  die Gleichung  $\sum_{k=1}^n l_{kn}(x) = O(\ln n)$ .

Mit Hilfe dieses Resultats und bekannter Methoden untersucht der Verf. die Tragweite der Lagrangeschen Interpolation und die Annäherung des Interpolationspolynoms.

E. J. Nyström.

Predonzan, Arno: Su una formula d'interpolazione per le funzioni razionali. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 22, 417—425 (1953).

Verf. beweist folgende Verallgemeinerung der Lagrangeschen Interpolationsformel: Es seien  $2n + 1$  voneinander verschiedenen und endlichen Stellen  $x_k$  endliche Werte  $y_k$  eindeutig zugeordnet. Dann gibt es eine rationale Funktion  $y = f/g$ , wobei  $f$  und  $g$  Polynome  $n$ -ten Grades in  $x$  sind und  $g \not\equiv 0$ , so daß  $y$  an den Stellen  $x_k$  die vorgegebenen Werte  $y_k$  annimmt;  $y$  ist eindeutig bis auf eine von Null verschiedene Konstante oder allenfalls bis auf den Polynomen  $f$  und  $g$  gemeinsame Linearfaktoren. — Zur Konstruktion dieser rationalen Funktion wähle man aus den



$2n+1$  Paaren  $(x_i, y_i)$   $n+1$  beliebig aus; es seien etwa die ersten  $(x_i, y_i)$ ,  $(i = 1, 2, \dots, n+1)$ . Aus diesen und den restlichen  $(x_j, y_j)$ ,  $(j = n+2, \dots, 2n+1)$ , bilde man die Steigungen  $[x_j, x_i] = (y_j - y_i)/(x_j - x_i)$  und sodann die mit Vorzeichen versehenen Determinanten  $\Delta_i$  aus den Elementen der  $(n, n+1)$ -Matrix  $([x_j, x_i])$  durch Streichen der  $i$ -ten Spalte  $(i = 1, \dots, n+1)$ . Wird noch  $l_i(x) \equiv c \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i}}^{n+1} (x - x_i)$  für  $c \neq 0$  konst. und  $i = 1, \dots, n+1$  gesetzt, dann lautet die rationale Funktion:

$$y = \left( \sum_{i=1}^{n+1} y_i \Delta_i l_i(x) \right) / \left( \sum_{i=1}^{n+1} \Delta_i l_i(x) \right). \quad H. Bilharz.$$

**Szász, Otto:** On closed sets of rational functions. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **34**, 195—218 (1953).

La memoria contiene alcune dimostrazioni, condotte con metodo semplice ed uniforme, sulla chiusura in vari spazi funzionali di certe successioni di funzioni razionali. In particolare, assegnata la successione  $\{z_n\}$  di costanti reali o complesse sono considerate le successioni  $\{1/(x^2 + z_n^2)\}$ ,  $\{x/(x^2 + z_n^2)\}$ ,  $\{e^{-x/2} x^{2n}\}$  in  $L_2(0, \infty)$ , e la successione  $\{(ct - z_n)/(1 - ct z_n)\}$  in  $C(-1, 1)$ . La memoria, che si collega ad alcune ricerche dello stesso A. pubblicate nel 1916, chiude degnamente l'attività scientifica del compianto valoroso analista.

G. Sansone.

**Vekua, I. N.:** Über die Vollständigkeit eines Systems von metaharmonischen Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **90**, 715—718 (1953) [Russisch].

$S, D, D_c$  seien wie in der in dies. Zbl. **50**, 289 besprochenen Note des Verf. definiert. Verf. verallgemeinert seine Ergebnisse auf die Funktionen

$$U_{nm} = (\lambda r)^{-1/2} J_{n+1/2}(\lambda r) P_n^m(\cos \theta) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} \quad (m \leq n),$$

die der Gleichung  $\Delta U + \lambda U = 0$  genügen. Vollständigkeit gilt hier nur, wenn  $\lambda$  kein Eigenwert dieser Gleichung bezüglich  $S$  ist, d. h. wenn aus  $\Delta U + \lambda U = 0$ ,  $U = 0$  auf  $S$  folgt:  $U = 0$  in  $D$ . Für die Entwicklungen in  $D_c$ , die nicht genauer behandelt werden, sind statt der  $U_{nm}$  die Funktionen

$$(\lambda r)^{-1/2} H_{n+1/2}^{(1)}(\lambda r) P_n^m(\cos \theta) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} \quad (m \leq n)$$

nötig. In einer Fußnote stellt Verf. seine Priorität [1. Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskoy SSR **4**, Nr. 4 (1943); 2. Trudy Tbilissk. mat. Inst. **12** (1943)] gegenüber H. Weyl (dies. Zbl. **46**, 107) und C. Müller (dies. Zbl. **46**, 107) bei Existenzfragen beim Dirichletschen Problem für  $D_c$  fest. Er bemerkt ferner, daß ein von Weyl und Müller benütztes Lemma von Rellich (dies. Zbl. **28**, 164) von ihm unabhängig bewiesen wurde (loc. cit. 1., S. 135, Lemma 3).

K. Prachar.

**Rudin, Walter:** A remark concerning Graves' closure criterion. Canadian J. Math. **5**, 194—195 (1953).

Das Kriterium von Graves (dies. Zbl. **46**, 294) wird verfeinert, indem nur vorausgesetzt wird, daß die Nullstellen der Funktion  $p(t)$  das Lebesguesche Maß Null haben.

O. Volk.

**Sz.-Nagy, Béla:** Approximation properties of orthogonal expansions. Acta Sci. math. **15**, 31—37 (1953).

L'A. approfondisce le ricerche di W. Rudin (questo Zbl. **46**, 66), dimostrando due teoremi dei quali riportiamo il seguente: Sia  $C_{r,\alpha}$ ,  $(r = 0, 1, \dots; 0 < \alpha \leq 1)$  la classe delle funzioni  $f(x)$ ,  $(0 \leq x \leq 1)$  continue assieme alle derivate dei primi  $r$  ordini e la cui derivata di ordine  $r$  soddisfa a una condizione di Lipschitz di ordine  $\alpha$ , e sia  $N_{r,\alpha}(f)$  il minimo valore della costante di Lipschitz relativa al rapporto  $|f^{(r)}(x) - f^{(r)}(x')|/|x - x'|^\alpha$ , ove  $x \neq x'$ . Allora esistono costanti positive  $\gamma_r$  (dipendenti soltanto dai loro indici) tali che, dati con arbitrio un sistema ortonormale sull'intervallo  $(0, 1)$  di funzioni  $\varphi_i(x)$ ,  $(i = 1, 2, \dots)$  e un sistema di numeri reali o complessi

$$\lambda_{ni}, \quad (n = 1, 2, \dots; i = 1, \dots, n) \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^n |\lambda_{ni}|^2 \leq n, \quad \text{e} \quad \text{posto} \quad s_n(f; x) = \sum_{i=1}^n \lambda_{ni} c_i \varphi_i(x),$$

$c_i = \int_0^1 f(x) q_i(x) dx$ ,  $\varrho_n(r, \alpha, p) = \limsup \left\{ \left[ \int_0^1 |f(x) - s_n(f; x)|^p dx \right]^{1/p} / N_{r, \alpha}^p(f) \right\}$  quando  $f(x)$  appartiene a  $C_{r, \alpha}$  e dove  $1 \leq p \leq +\infty$ , risultano verificate le disuguaglianze  $\varrho_n(r, \alpha, p) \geq \gamma_{r, \alpha} / n^{r+\alpha}$ . S. Cinquini.

● Lorentz, G. G.: Bernstein polynomials. (Mathematical Expositions, No. 8.)

Toronto: University of Toronto Press 1953. X, 130 p. \$ 5,75.

Il volume è dedicato allo studio dei polinomi

$$B_n(x) = B_n^f(x) = \sum_{v=0}^n f\left(\frac{v}{n}\right) \binom{n}{v} x^v (1-x)^{n-v}$$

introdotti nell'Analisi da S. Bernstein per la dimostrazione del teorema di Weierstrass sull'approssimazione di una funzione  $f(x)$  definita nell'intervallo chiuso  $(0, 1)$ . — Il Cap. I contiene appunto la dimostrazione del teorema di Weierstrass per una  $f(x)$  continua e lo studio del grado di approssimazione dei polinomi  $B$  per le funzioni continue, per quelle a variazione limitata, e in generale per quelle aventi soltanto punti di continuità o di discontinuità di prima specie. Il Cap. II contiene varie generalizzazioni. Vi sono studiati i polinomi di Kantorovitch e Lorentz

$$P_n(x) = P_n^f(x) = \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} x^v (1-x)^{n-v} \frac{1}{v!(n-v)!} \int_0^1 f(t) dt$$

relativi ad una  $f(x) \in L$  in  $(0, 1)$ ; sono definiti i polinomi di Bernstein relativi ad un intervallo infinito, ed è dimostrato il teorema di Müntz sull'approssimazione di una funzione continua in  $(0, 1)$  come combinazione lineare di monomi  $x^{\alpha_n}$ , avendosi per la successione  $\{\alpha_n\}$ ,  $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots$ ,  $\alpha_n \rightarrow \infty$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{-1} = \infty$ . Il Cap. III, che si apre con la dimostrazione di Hildebrandt del teorema di Hausdorff dell'esistenza di una funzione a variazione limitata  $g(x)$

i cui momenti soddisfino il sistema  $\int_0^1 x^v dg(x) = \mu_v$ , ( $v = 0, 1, \dots$ ), essendo  $\{\mu_v\}$  una successione di costanti reali assegnate, utilizza il cosiddetto metodo del riordinamento per il problema generale dei momenti negli spazi funzionali. Il Cap. IV tratta il problema dell'approssimazione nel campo complesso con l'impiego dei polinomi di Bernstein. Le ricerche del Bernstein sono rielaborate dall'A. per dare al lettore un'esposizione facilmente accessibile e completa. Giova la rappresentazione dei polinomi di Bernstein con integrali curvilinei dipendenti da un parametro ed è ampiamente approfondito il problema dell'approssimazione di una funzione analitica assegnata quando siano noti i valori di questa assunti in una successione di punti dell'intervallo  $(0, 1)$ . — L'A., che fino dal 1937 ha dato molti contributi originali alla teoria dei polinomi di Bernstein, ha arricchito con questo volume la collezione „Mathematical Expositions“ di Toronto di una Monografia veramente interessante. G. Sansone.

Butzer, P. L.: Linear combinations of Bernstein polynomials. Canadian J. Math. 5, 559–567 (1953).

Se  $f(x)$  è definita in  $(0, 1)$  e  $B(x)$  è il corrispondente polinomio di Bernstein di ordine  $n$

$$B_n^f(x) = \sum_{v=0}^n f\left(\frac{v}{n}\right) p_{v,n}(x), \quad p_{v,n}(x) = \binom{n}{v} x^v (1-x)^{n-v}.$$

E. Voronovskaja ha dimostrato (questo Zbl. 5, 12) che in ogni punto  $x$  ove esista  $f''(x)$  vale la relazione  $\lim_{n \rightarrow \infty} n [B_n^f(x) - f(x)] = \frac{x(1-x)}{2} f''(x)$ , e perciò l'esistenza della derivata seconda di  $f(x)$  in  $x$  non migliora l'ordine di approssimazione di  $f(x)$ , che per  $f''(x) \neq 0$  resta  $O(1/n)$ . Introducendo i polinomi  $L_n^{[0]} = [L_n^f(x)]^{[0]} = B_n^f(x)$ ,  $(2^{\kappa} - 1) L_n^{[2\kappa]} = 2^{\kappa} [L_{2n}^{[2\kappa-2]} - L_n^{[2\kappa-2]}]$ ,  $\kappa = 1, 2, \dots$ , l'A. dimostra che se  $|f(x)| \leq M$  e se  $f^{(2\kappa)}(x)$  esiste nel punto  $x$ , allora per  $\kappa = 1, 2, \dots$  si ha nel punto  $x$

$|L_n^{[2\kappa-2]}(x) - f(x)| = O(n^{-\kappa})$ ,  $|L_n^{[2\kappa]}(x) - f(x)| = o(n^{-\kappa})$ ,  $\kappa = 1, 2, \dots$ , e ancora: se  $f^{(2\kappa)}(x)$  esiste in  $(0, 1)$  ed è  $f^{(2\kappa)}(x) \in \text{Lip } \alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , si ha allora  $|L_n^{[2\kappa]}(x) - f(x)| \leq M n^{-\kappa-\alpha/2}$  con  $M$  costante. G. Sansone.

Wenzl, F.: Nullstellendichte reeller Polynome und Tschebyscheffsche Approximation. Math. Z. 59, 17–39 (1953).

Se  $P(x) = \prod_{v=1}^n (x - \xi_v)$ ,  $-1 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n < 1$ , l'A. chiama „densità degli zeri di  $P(x)$ “ la funzione  $\varrho(\xi)$  così definita  $\varrho(\xi) = 1/(\xi_{v+1} - \xi_v)$  se  $\xi_v \leq \xi < \xi_{v+1}$ ,  $v = 1, 2, \dots, n-1$ ;  $\varrho(\xi) = 0$  se  $\xi < \xi_1$ ,  $\xi > \xi_n$ , e chiama



„densità relativa degli zeri di  $P(x)$ “ la funzione  $\varrho^*(\xi) = \varrho(\xi)/n$ . L'A. dimostra che data una classe di polinomi  $P_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ , a radici tutte reali e semplici, comprese in  $(-1, 1)$ , se la funzione  $\varrho_n^*(\xi)$  corrispondente a  $P_n(x)$  soddisfa in  $I^*$  ( $|x| < 1 - \varepsilon_0$ ;  $0 < \varepsilon_0 < 1$ ), qualunque sia l'indice  $n$ , la limitazione  $0 < \gamma \leq \varrho_n^*(\xi) \leq G$  ( $\gamma$  e  $G$  costanti), allora, se  $x$  è un qualsiasi punto estremo di  $P_n(x)$  appartenente ad  $I^*$ , vale la limitazione

$$\ln |P_n(x)| = n \left[ \int_{-1}^1 \ln |x - \xi| \varrho_n^*(\xi) d\xi + O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \right].$$

Il teorema è applicato per studiare il comportamento dell'integrale  $\int_{-1}^1 \ln |x - \xi| \varrho^*(\xi) d\xi$  nell'ipotesi che per ogni  $n$   $P_n(x)$  sia definito, con Tchebycheff, dalla proprietà che  $\max_{-1 \leq x \leq 1} |g(x) P_n(x)|$  abbia valore minimo, essendo  $g(x)$  una funzione assegnata continua in  $(-1, 1)$  ed ivi mai nulla.

G. Sansone.

**Gagliardo, Emilio:** Sulla convergenza uniforme di alcune serie. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 8, 173—177 (1953).

Es strebe  $a_1, a_2, \dots \rightarrow 0$ , und es sei  $\sum |a_n - a_{n+1}|$  konvergent. Mit den Polynomen  $P_n(x)$  von Legendre ist dann  $\sum a_n P_n(x)$  gleichmäßig konvergent in jedem abgeschlossenen Teilintervall von  $(-1, +1)$ . — Für  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$  strebe ferner  $\lambda_{n+1} - \lambda_n$  monoton gegen  $q > 0$ . Dann sind  $\sum a_n e^{i\lambda_n x}$ ,  $\sum a_n \cos \lambda_n x$ ,  $\sum a_n \sin \lambda_n x$  gleichmäßig konvergent in jedem abgeschlossenen Teilintervall von  $(0, 2\pi/q)$ ,  $\sum (-1)^n a_n e^{i\lambda_n x}$ ,  $\sum (-1)^n a_n \cos \lambda_n x$ ,  $\sum (-1)^n a_n \sin \lambda_n x$  gleichmäßig konvergent in jedem abgeschlossenen Teilintervall von  $(0, \pi/q)$ .

Robert Schmidt.

**Juncosa, M. L. and D. M. Young:** A uniform approximation to Fourier coefficients. Proc. Amer. math. Soc. 4, 373—374 (1953).

Let  $f(x)$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ) be bounded and continuous except at a finite number of points, where it may have a jump. Then

$$b_n(M) = \frac{1}{2M} \sum_{j=-M+1}^M f\left(\frac{j}{M}\right) e^{-in\pi j/M}$$

tends uniformly in  $n$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) to  $a_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) e^{-in\pi x} dx$  as  $M \rightarrow \infty$ .

J. Horváth.

**Ul'janov, P. L.:** Über trigonometrische Reihen mit monoton abnehmenden Koeffizienten. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 90, 33—36 (1953) [Russisch].

Eine Funktion  $\varphi(x)$  heiße in  $[a, b]$   $A$ -integabel, wenn 1.  $m E \{|\varphi(x)| \geq n\} = o(1/n)$  und 2. der endlichen Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_b^a [\varphi(x)]^n dx = J$  existiert, wobei  $[\varphi(x)]^n = \varphi(x)$  für  $|\varphi(x)| \leq n$  und  $[\varphi(x)]^n = 0$  für  $|\varphi(x)| > n$ .  $J$  heiße das  $A$ -Integral von  $\varphi(x)$  in  $[a, b]$ :  $(A) \int_a^b \varphi(x) dx = J$  (nach Titchmarsh wird durch die Bedingung 1. die Additivitätseigenschaft der  $A$ -Integration gewährleistet). Eine Folge  $\{a_n\}$  erfüllt die Bedingung (B), wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n - a_{n+1}| < \infty$ . Verf. untersucht die Reihen (1)  $f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$  und (2)  $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$  lediglich unter der Voraussetzung, daß die  $\{a_k\}$  die Bedingung (B) erfüllen. (Für solche Folgen brauchen  $f(x)$  und  $\bar{f}(x)$  in  $[a, b]$  nicht  $L$ -integabel zu sein.) Genügt die Folge  $\{a_n\}$  der Bedingung (B), so ist (1) bzw. (2) eine  $A$ -Fourier-Reihe von  $f(x)$  bzw.  $\bar{f}(x)$ , d. h. es gilt

$$a_k = \frac{1}{\pi} (A) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots);$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} (A) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad (k = 1, 2, \dots) \quad \text{und} \quad 0 = \frac{1}{\pi} (A) \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x) dx.$$

Ist noch  $a_0 = 0$  und  $q(x)$  sowie auch die zu  $q$  konjugierte Funktion  $\bar{q}(x)$  von beschränkter Variation, so gilt  $(A) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) q(x) dx = - (A) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \bar{q}(x) dx$ . Endlich gelten (für  $a_0 = 0$ ) die Gleichungen

$$\bar{f}(x) = -\frac{1}{\pi} (A) \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2 \operatorname{tg}(t/2)} dt, \quad f(x) = \frac{1}{\pi} (A) \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2 \operatorname{tg}(t/2)} dt$$

für alle  $x \in [-\pi, \pi]$ , außer — im Fall der zweiten Gleichung — womöglich an den Stellen  $x = -\pi, 0, \pi$ . V. Garten.

**Lozinskij, S. M.:** Über die Konvergenzgeschwindigkeit von Folgen linearer trigonometrischer Polynomoperatoren. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 89, 785—787 (1953) [Russisch].

Die Bildung der  $n$ -ten Teilsumme einer Fourierreihe ist eine Operation von der Form

$$\sigma_T(f) = \sigma_T(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) T(x-t) dt,$$

wo  $T$  ein trigonometrisches Polynom ist. Die auf dieser Darstellung beruhenden Konvergenzuntersuchungen verallgemeinert Verf. Ein Raum vom Typ  $\bar{F}_\sigma$  ist ein Banachraum, der aus  $2\pi$ -periodischen Funktionen besteht, alle trigonometrischen Polynome enthält und einigen weiteren Bedingungen genügt.  $U$  heißt ein linearer trigonometrischer Polynomoperator des Typs  $T$  ( $T$  wie oben), wenn folgendes gilt: 1.  $U$  ist ein linearer Operator zwischen zwei  $\bar{F}_\sigma$ -Räumen; 2.  $U(f)$  ist ein trigonometrisches Polynom vom Grade  $\leq \operatorname{grad} T$ ; 3. Ist  $f$  ein Polynom dieser Art, so ist  $U(f) = \sigma_T(f)$ . — Verf. betrachtet Folgen solcher Operationen  $U_n$  und erhält Konvergenzaussagen, die wegen der zahlreichen auftretenden Parameter nur grob wiedergegeben werden können. Satz 1:  $\|U_n\| \geq \|\sigma_T\|$ . Satz 2 und 3: Unter gewissen Voraussetzungen über die Normen  $\|\sigma_{T_n}\|$  gibt es ein  $f$ , so daß  $U_n(f)$  bzw.  $U_n(f, 0)$  divergiert, wobei noch eine Reihe von Nebenbedingungen erfüllt ist und die Stärke der Divergenz scharf abgeschätzt wird (Bestimmung von Divergenzkonstanten). Satz 4 befaßt sich mit Polynomen  $T_n$  und zugehörigen  $U_n$ , für die  $\sigma_{T_n}(f, x)$  bei beliebigem stetigem  $f$  gleichmäßig konvergiert. Hier kann man ein  $f$  finden, so daß  $U_n(f, 0)$  „langsam“ konvergiert. — Literatur: Verf.: Mat. Sbornik, n. Ser. 14 (56), 175—268 (1944); Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 61, 193—196 (1948), 89, 608—612 (1953); dies. Zbl. 32, 414; 47, 66. K. Zeller.

### Spezielle Funktionen:

**Mikolás, Miklós:** Über die Beziehung zwischen der Gammafunktion und den trigonometrischen Funktionen. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 4, 143—157 und russische Zusammenfassg. 157 (1953).

Für die logarithmische Ableitung der  $\Gamma$ -Funktion wird die für nicht-ganzzahliges  $z$  gültige neue Integraldarstellung gegeben ( $\gamma$  Eulersche Konstante)

$$(1) \quad \Psi(z) = -\left[ \gamma + \frac{1}{2z} + \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \pi z + \frac{\pi}{2} \int_0^1 \operatorname{tg} \frac{\pi t}{2} \left( \frac{\sin \pi z t}{\sin \pi z} - t \right) dt \right].$$

Sie ergibt sich mit Hilfe der Parsevalschen Formel für das skalare Produkt zweier Funktionen, angewandt auf das Integral  $\int_0^1 \cos \pi z t \cdot \lg \left( 2 \cos \frac{\pi t}{2} \right) dt$ , auf das sich das Integral in (1) durch partielle Integration zurückführen läßt. Als Anwendungen erhält man dann ziemlich leicht a) durch Integration unter dem Integralzeichen eine Darstellung der Differenz  $\gamma - \lg 2$  durch ein Doppelintegral, b) durch wiederholte Differentiation bei  $z = 0$  die Formen

$$(2) \quad \zeta(2\nu + 1) = (-1)^\nu \frac{2^{2\nu} \pi^{2\nu+1}}{(2\nu + 1)!} \int_1^0 B_{2\nu+1} \left( \frac{t+1}{2} \right) \operatorname{tg} \frac{\pi t}{2} dt \quad (\nu = 1, 2, \dots),$$

ein gewiß in dieser Form unerwartetes Gegenstück zu den bekannten geschlossenen Ausdrücken für  $\zeta(2r)$  [für die in (2) das Integral zu streichen,  $2r$  durch  $2r-1$  zu ersetzen ist]. Schließlich erhält man noch c) durch Reihenentwicklung unter dem Integralzeichen die Darstellung des Quotienten  $\zeta(2r+1)/\zeta(2r)$  als Reihe nach den Werten  $\zeta(2k)$ , mit rationalen, bekannten Koeffizienten, sowie die Reihe

$$\lg 2 - \gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k+1)}{4^k(2k+1)}.$$

Diese Entwicklungen sind auch zur numerischen Berechnung geeignet.

Hermann Schmidt.



**Picone, Mauro:** Una semplicissima formola di maggiorazione per i polinomi di Legendre e per le loro derivate. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 8, 1—2 (1953).

Es sei  $P_n^{(k)}(z)$  die  $k$ -te Ableitung des Legendreschen Polynoms ( $z$  komplex). Unter Heranziehung der bekannten Rekursionsformel für die  $P_n(z)$  wird mittels vollständiger Induktion die Ungleichung bewiesen:  $|P_n^{(k)}(z)| \leq (n, k) q_n (|z| + 1)^{n-k}$ ,  $(n, k) = n(n-1) \cdots (n-k+1)$ ,  $q_n = (2n-1)(2n-3) \cdots 3 \cdot 1/n!$ ,  $n \geq 1$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . [Anmerkung des Ref. Auf der rechten Seite der Formel (2) fehlt in der eckigen Klammer der Faktor  $k$  vor  $(n, k-1)$ .] O. Volk.

**Picone, Mauro:** Maggiorazione di un polinomio di Legendre e delle derivate in un'ellisse a quello confocale. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 8, 237—242 (1953).

Verf. gibt für das Legendresche Polynom  $P_n(z, a, b) = (1/n! (a-b)^n) \cdot d^n [(z-a)^n (z-b)^n] dz^n$  im Inneren der Ellipse  $E(a, b, \varepsilon)$  mit den Brennpunkten  $a$  und  $b$  und der Exzentrizität  $\varepsilon$  die beachtenswerte Abschätzung:

$$|P_n| \leq \sqrt{2} q_n / \varepsilon^n < \sqrt{2/\pi} n (2/\varepsilon)^n,$$

wo  $q_n = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)/n!$ , sowie eine analoge für die  $k$ -te Ableitung, und zeigt, daß für  $n > 0$ ,  $1 \leq k < n$  ( $k$  ganz)  $P_n(z, a, b)$  und  $P_n^{(k)}(z, a, b)$  innerhalb der Ellipse  $E(a, b, \varepsilon)$  die größten absoluten Werte in den Scheitelpunkten und nur in diesen annehmen. O. Volk.

**Ossicini, Alessandro:** Funzioni di Legendre di seconda specie e polinomi ultrasferici. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 8, 304—309 (1953).

L'A. trova le funzioni generatrici delle serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+\lambda)n!}{\Gamma(2\lambda+n)} Q_{n+\lambda-1/2}(z) P_n^{(\lambda)}(x) P_n^{(\lambda)}(y),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(n+\lambda+\beta+1) (2n+\lambda+\beta+1)}{\Gamma(1/2) \Gamma(n+\lambda+1)} Q_{2n+\alpha+\beta+1/2}(y) P_n^{(\alpha, \beta)}(x),$$

dove  $Q$ ,  $P^{(\lambda)}$ ,  $P^{(\alpha, \beta)}$  indicano rispettivamente le funzioni di Legendre di seconda specie, i polinomi ultrasferici ed i polinomi ipergeometrici di Jacobi, e ne fa alcune applicazioni. G. Sansone.

**Ossicini, Alessandro:** Funzione generatrice dei prodotti di due particolari polinomi di Jacobi. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 8, 45—52 (1953).

Essendo  $P_m^{(\alpha, \beta)}$  l' $m$ -esimo polinomio di Jacobi e  $B(a, b)$  la funzione eulariana di prima specie, l'A. trova, per  $|x| \leq 1$ ,  $|y| \leq 1$ ,  $|z| \leq |x+y-1| - \sqrt{(x+y)(x+y-z)}$ , la somma della serie  $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{B(m+1, \frac{1}{2})}{B(m+\nu+1, \frac{1}{2})} z^m P_m^{(\nu, 1/2)}(x) P_m^{(\nu, 1/2)}(y)$

e ne fa alcune applicazioni. G. Sansone.

**Schubert, Andreas:** Beiträge zur Integration von Funktionen, in denen Produkte von Zylinderfunktionen auftreten. Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden 2, 437—440 (1953).

In dieser Arbeit werden Rekursionsformeln für einige Integrale abgeleitet, in deren Integranden Produkte von Zylinderfunktionen auftreten. Wie üblich werden  $Z_p$  und  $\bar{Z}_p$  als Abkürzungen für

$$Z_p(x, x) = c_1 J_p(x, x) + c_2 N_p(x, x), \quad \bar{Z}_p(x, x) = \bar{c}_1 J_p(x, x) + \bar{c}_2 N_p(x, x)$$

verwendet, wobei die (reellen oder komplexen) Konstanten  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $\bar{c}_1$ ,  $\bar{c}_2$  als vom Index  $p$  unabhängig angenommen werden. Es werden Rekursionsformeln für die Integrale

$$A_{n, p, q} = \int x^{2n+1} Z_{p-q} \bar{Z}_{p+q} dx, \quad B_{n, p, q} = \int x^{2n+2} Z_{p-q} \bar{Z}_{p+q+1} dx$$

hinsichtlich  $q$  sowie für die Integrale  $A_{n, p, 0}$  und  $B_{n, p, 0}$  hinsichtlich  $n$  angegeben. Es ergeben sich Summen von Ausdrücken nach Art der Integranden. Verf. weist noch auf die Arbeit von J. Picht hin (dies. Zbl. 35, 166). R. Gran Olsson.

**Dörr, Johannes:** Untersuchung einiger Integrale mit Bessel-Funktionen, die für die Elastizitätstheorie von Bedeutung sind. *Z. angew. Math. Phys.* **4**, 122—127 (1953).

In der Theorie der Elastizität der elastisch unterstützten, dicken Kreisplatte (I. Szabó, dies. Zbl. **44**, 394) treten gewisse Integrale auf, die zwischen den Grenzen Null und Unendlich ausgewertet werden müssen. Die Integrale bestehen aus dem Quadrat einer Besselfunktion, die mit einer gebrochenen rationalen Funktion multipliziert wird. Diese Integrale werden in andere Integrale mit einem endlichen Integrationsweg und regulären Integranden übergeführt, wobei die Funktionen nullter und erster Ordnung von Struve die Quadrate der Besselfunktion ersetzen.

*R. Gran Olsson.*

**Bromberg, J.:** New representations of Whittaker's confluent hypergeometric function. *Revista Un. mat. Argentina* **15**, 157—172 (1953).

Es wird eine Integraldarstellung für die konfluente hypergeometrische Funktion  $M_{k,m}(z)$  hergeleitet, die als eine Verallgemeinerung der Poissonschen Integraldarstellung für die Besselsche und die mit ihr verwandte Struwesche Funktion aufgefaßt werden kann. Die Umformung geht von der reinen Potenzreihe für  $M_{k,m}(z)$  aus und basiert auf der Möglichkeit, die Entwicklungskoeffizienten teilweise als Beta-Funktionen zu schreiben. Indem hierfür die bekannte Eulersche Integraldarstellung benutzt wird, läßt sich dann durch mehrfache Vertauschung der Reihenfolge von Summation und Integration das oben erwähnte Ergebnis beweisen. Ferner werden auch für  $M_{k,m}(z)$  Reihenentwicklungen angegeben, die nach Besselschen und Struweschen Funktionen zunehmender Ordnung fortschreiten.

*H. Buchholz.*

**Ragab, Fouad M.:** Recurrence formulae for the  $E$ -functions. *Proc. math. phys. Soc. Egypt* **4**, Nr. 4, 127—136 (1953).

L'A. dimostra alcune relazioni lineari per la funzione  $E(p; \nu_r; q; \rho_s; x)$  di Th. M. MacRobert col procedimento di induzione completa o partendo dall'espressione di questa funzione mediante un integrale curvilineo.

*G. Sansone.*

**Kreis, H.:** Über die Orthogonalpolynome. *Mitt. Verein. schweiz. Versicherungs-math.* **53**, 46—56 (1953).

Nel presente lavoro l'A. espone alcune proprietà dei polinomi ortogonali  $\{p_n(x)\}$ , introdotti da Tehebycheff, che sono associati ad una distribuzione  $d\lambda(x)$  di tipo di Stieltjes (ved. G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, New York 1939, questo Zbl. **23**, 215) essendo  $\lambda(x)$  una funzione costante a tratti; con particolare riguardo viene considerato il caso in cui  $\lambda(x)$  aumenta di una unità nei punti  $n; n = 0, 1, 2, \dots, N-1$  ( $N$  intero  $> 0$ ) e quello in cui  $\lambda(x)$  aumenta di una unità nei punti  $n = (N+1)/2; n = 1, 2, \dots, N$  ( $N$  intero  $> 0$ ). In questo caso l'A. da una dimostrazione della formula di ricorrenza per i  $\{p_n(x)\}$ , già stabilita da Tehebycheff, pervenendo al calcolo dei coefficienti che ivi intervengono.

*J. Ceccconi.*

**Riekstynš, E. Ja.:** Über spezielle Funktionen, angewandt auf die Lösung von Telegraphengleichungen. *Priklad. Mat. Mech.* **17**, 125—132 (1953) [Russisch].

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **44**, 293) hat der Verf. spezielle Funktionen betrachtet, die man aus Lommelschen Funktionen mit zwei imaginären Argumenten als unabhängige Variable erhält und mit denen es möglich ist, die Lösung des Systems von Telegraphengleichungen für verschiedene Grenzbedingungen aufzustellen. Da es in manchen Fällen erforderlich ist, diese Funktionen mit komplexen Argumenten zu betrachten, werden in der vorliegenden Arbeit die Eigenschaften dieser von komplexen Variablen abhängigen Funktionen näher untersucht. Es werden Formeln angegeben, mit denen man leicht die Lösungen von Telegraphengleichungen für verschiedene Grenz- und Anfangsbedingungen erhalten kann. Ferner wird das System der Telegraphengleichungen für halbunendliche Leiter mit sinusförmiger Spannungsverteilung behandelt. Es werden mit  $\psi_\nu(x, y) = (|x/y|)^\nu I_\nu(2\sqrt{xy})$  folgende Funktionen betrachtet:

$$\text{ch}_\nu(x, y, \varphi, \epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{\nu+2k}(x, y) \cos(2k + \nu + \epsilon)\varphi, \text{sh}_\nu(x, y, \varphi, \epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{\nu+2k}(x, y) \sin(2k + \nu + \epsilon)\varphi.$$



Mit  $u_\nu(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sqrt{\frac{x}{y}} \right)^{\nu+2k} I_{\nu+2k}(2\sqrt{xy})$  gilt dann

$$\text{cb}_\nu(x, y, 0, \varepsilon) = u_\nu(x, y), \text{sb}_\nu(x, y, 0, \varepsilon) = 0, \text{cb}_\nu(x, y, \varphi, 0) = (1/2)[u_\nu(e^{i\varphi}x, e^{-i\varphi}y) + u_\nu(e^{-i\varphi}x, e^{i\varphi}y)], \\ \text{sb}_\nu(x, y, \varphi, 0) = (1/2i)[u_\nu(e^{i\varphi}x, e^{-i\varphi}y) - u_\nu(e^{-i\varphi}x, e^{i\varphi}y)], \text{cb}_\nu(x, y, \varphi, \varepsilon) = \text{sb}_\nu(x, y, \varphi, \varepsilon + \pi/2\varphi) \quad (\varphi \neq 0).$$

Es folgen weitere charakteristische Eigenschaften usw. der genannten Ausdrücke, z. T. unter Benutzung der in der früheren Arbeit abgeleiteten Beziehungen. Anschließend bringt Verf. Anwendungen auf die Telegraphengleichungen, bei denen vorteilhaft zwei der angegebenen Funktionen, die sich nur im Argument  $\varepsilon$  voneinander unterscheiden, additiv zusammengefaßt sind. Ferner wird auf Laplace-Transformationen der Funktionen  $\text{cb}_\nu$  und  $\text{sb}_\nu$  eingegangen. Weitere Fragen — auch bez. der Berechnung der Formelausdrücke — werden behandelt.

J. Picht.

## Funktionentheorie:

**Humbert, Pierre et Paul Delerue:** Sur une extension à deux variables de la fonction de Mittag-Leffler. C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 1059—1060 (1953).

En étudiant les fonctions  $E_{\alpha, \beta}(x) = x^{(\beta-1)/\alpha} \sum_m \frac{x^m}{\Gamma(m\alpha + 1)}$  et  $\mathcal{L}_{\alpha, \beta}(x, y) =$

$\sum_n \frac{y^n}{\Gamma(n\beta + 1)} E_{\alpha, (n+1)\beta}(x)$  à l'aide du calcul symbolique, on obtient  $E_\alpha(x) + E_\alpha(-x) = 2 E_{2\alpha}(x^2)$  (évident) et d'autres propriétés non précisées. M. Hervé.

**Bertolini, Fernando:** Una generalizzazione del teorema di Abel sulle serie di potenze. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **14**, 483—488 (1953).

Der Abelsche Stetigkeitssatz läßt sich nach Transformation durch reziproke Radian so formulieren: Wenn  $\sum a_\nu$  konvergiert, so ist mit jedem  $\omega \geq 1$  die Reihe  $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu z^{-\nu}$  in  $|z-1| \leq \omega(|z|-1)$  gleichmäßig konvergent. — Verallgemeinert:

Wenn die Reihe  $Q(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n a_{i\nu} (z - \alpha_i)^{-\nu}$  an den Stellen  $z_1, \dots, z_n$  konvergiert, so ist mit  $\omega_1 \geq 1, \dots, \omega_n \geq 1$  die Reihe  $Q(z)$  im Durchschnitt der Bereiche  $|z - z_i| \leq \omega_i (|z - \alpha_i| - |z_i - \alpha_i|)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) gleichmäßig konvergent.

Robert Schmidt.

**Suetin, P. K.:** Fabersche Polynome für Gebiete mit nicht-analytischer Begrenzung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **88**, 25—28 (1953) [Russisch].

$G$  sei ein Gebiet der Zahlenkugel mit einfach-zusammenhängendem Komplement, dann ist eine zu  $G$  gehörige Folge von Faberschen Polynomen bestimmt. Die Frage, ob sich eine in  $G$  reguläre Funktion  $f(z)$  nach Faberschen Polynomen entwickeln läßt, wurde von Faber bejaht für die beiden Fälle, daß der Rand  $\Gamma$  von  $G$  die Bedingung erfüllt, analytisch zu sein, während über das Verhalten von  $f(z)$  keine Einschränkungen bestehen, bzw. daß  $\Gamma$  keine Bedingung zu erfüllen braucht, dafür aber  $f(z)$  auf  $\Gamma$  noch regulär ist. Zwischen diesen beiden Grenzfällen stellt Verf. die Möglichkeit der Faber-Entwicklung von  $f(z)$  auf, falls die primitive Funktion  $p$ -ter Ordnung von  $f(z)$  in  $G$  durch ein Cauchy-Integral darstellbar ist und falls  $\Gamma$  einen gewissen Glättegrad aufweist; dieser ist bestimmt durch die Existenz und gleichmäßige Beschränktheit auf  $\Gamma$  der  $(p+2)$ -ten Ableitung derjenigen Funktion, die das Komplement von  $G$  auf das Äußere des Einheitskreises abbildet. — Zwei weitere, speziellere Sätze schließen sich an.

H. Tietz.

**Suetin, P. K.:** Abelsche und Taubersche Sätze für Reihen nach Faberschen Polynomen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **91**, 27—30 (1953) [Russisch].

$K$  sei ein Kontinuum der  $z$ -Ebene mit einfach-zusammenhängendem Komplement  $G_\infty$ ; die Menge der inneren Punkte von  $K$  sei  $G$ , die Grenzkurve  $\Gamma$ . Durch  $z = \varphi(w)$  werde  $|w| > 1$  konform auf  $G_\infty$  abgebildet. In bekannter Weise ist dann  $K$  eine Folge von Faberpolynomen  $\Phi_n(\lambda)$  zugeordnet. Verf. untersucht Konvergenz und analytisches Verhalten der Faber-Reihen

$\sum a_n \Phi_n(z)$ ; es sei  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = L$ . Für  $l = 1$  konvergiert die Faberreihe absolut und gleichmäßig in einem  $K$  umfassenden Gebiet, und es gelten die Abelschen und Tauberschen Sätze. Die Fälle  $l = 1$  und  $l = 1$  sind analog, so daß für das folgende  $l = 1$  vorausgesetzt wird. Es gibt Fälle, für welche eine Faberreihe in einem Punkt von  $\Gamma$  konvergiert, aber in einem Punkt aus  $G$  divergiert; diese Möglichkeit fällt fort, falls  $\Gamma$  eine gewisse Glätte (s. vorangeh. Referat) und endliche Krümmung besitzt. Es folgt eine Reihe von Sätzen, die aus verschiedenen Voraussetzungen zu folgern gestatten, daß sich die durch eine Faberreihe dargestellte Funktion in einem Punkt von  $\Gamma$  stetig verhält, wenn dort die Reihe konvergiert; umgekehrt kann die Konvergenz einer Faberreihe in einem solchen Punkte erschlossen werden aus  $a_n = O(1/n)$  und der Existenz des Grenzwertes der dargestellten Funktion längs gewisser Wege zu diesem Grenzpunkt. *H. Tietz.*

**Erwe, Friedrich:** Über die Lücken bei Laurentreihen. Arch. der Math. 4, 28—30 (1953).

Les degrés des termes à coefficients non nuls dans un développement de Laurent „polaire“ sont mis en évidence par un calcul purement algébrique, sans hypothèse de convergence [Note du réf.: le caractère entier des exposants n'intervient pas et le calcul s'applique à une série formelle de Dirichlet.] *G. Bourlion.*

**Delange, Hubert:** Sur un théorème de Pólya. Bull. Sci. Math., II. Sér. 77, 56—62 (1953).

Die Dirichlet-Reihe  $f(s) = \sum_0^\infty a_n e^{-\lambda_n s}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = \delta > 0$  besitze eine endliche Konvergenzabszisse. Nach G. Pólya gilt Satz A: Jede Strecke auf der Konvergenzgeraden, deren Länge  $2\pi D$  übersteigt ( $D$  die Maximaldichte der Folge  $\lambda_n$ ), enthält mindestens eine singuläre Stelle von  $f(s)$ . [Vgl. V. Bernstein, Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet, Paris 1933, dies. Zbl. 8, 115; N. Levinson, Gap and density theorems, New York 1941; L. Schwartz, Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse 6, 111—175 (1942)]. Wegen  $D \leq 1/\delta$  gilt insbesondere der Satz B, der entsteht, wenn  $2\pi D$  in A durch  $2\pi \delta$  ersetzt wird. Einen von A unabhängigen Beweis für B gab A. E. Ingham (dies. Zbl. 14, 215). Verf. gibt einen anderen Beweis von B, wobei der Satz von Cramér-Pólya (vgl. Bernstein, a. a. O.) und eine in neuartiger Weise definierte ganze Funktion von Exponentialtyp verwendet werden.

*W. Meyer-König.*

**Tanaka, Chuji:** Note on Dirichlet series. IV. On the singularities of Dirichlet series. Proc. Amer. math. Soc. 4, 308—309 (1953).

(Teil III, dies. Zbl. 48, 54). Bekanntlich gilt für Dirichletsche Reihe  $F(s) = \sum a_n \exp(-\lambda_n s)$  mit  $(\lg n) \lambda_n \rightarrow 0$  und der endlichen Konvergenzabszisse  $\sigma$  der Satz (von Hurwitz-Pólya-Szász), daß für eine geeignete Folge von Faktoren  $\varepsilon_n$ , die nur die Werte 1, -1 annehmen, die Dirichletsche Reihe  $f(s) = \sum a_n \varepsilon_n \exp(-\lambda_n s)$  die Konvergenzgerade von  $F(s)$  zur natürlichen Grenze hat. Der Verf. beweist, daß die Faktoren  $\varepsilon_n$  auch so gewählt werden können, daß  $\varepsilon_n = 1$  und  $\arg \varepsilon_n \rightarrow 0$  gilt, und die neue Dirichletsche Reihe wiederum die Konvergenzgerade von  $F(s)$  zur natürlichen Grenze hat.

*A. Ostrowski.*

**Rogosinski, W. W. and H. S. Shapiro:** On certain extremum problems for analytic functions. Acta math. 90, 287—318 (1953).

Let  $H^p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , be the class of analytic functions  $q(z)$  in  $|z| < 1$  such that  $M_p(q) = \lim_{r \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |q(re^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{1/p} < \infty$ .  $H^p$  is a Banach space under the norm  $M_p$ . Any linear functional on  $H^p$ ,  $p < \infty$ , has a representation  $I(q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(e^{it}) \kappa(t) dt$ ,  $\kappa(t) \in L^q(0, 2\pi)$ ,  $p^{-1} + q^{-1} = 1$ . In the case  $p = \infty$ , only functionals which admit such a representation, are considered.  $\kappa^* \kappa$  signifies that  $\kappa^*$  and  $\kappa$  yield the same functional. The main result of the paper is the equality,  $M_p(q) = 1$ ,

$$(*) \quad \sup_q |I(q)| = \inf_{\kappa^* || \kappa} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\kappa^*(t)|^q dt \right\}^{1/q}.$$



Furthermore, if  $p > 1$ , then extremal functions  $q$  and  $\kappa^*$  exist and are unique. — Except for the case  $p = \infty$ . (\*) follows in a few lines from general Banach space theorems, the involved spaces being uniformly convex. Examples are given which show that existence and uniqueness fail in general for  $p = 1$ . Finally a new proof of a closely related result of Macintyre and Rogosinski (this Zbl. 36, 45) is given.

*L. Carleson.*

**Noble, M. E.: Non-measurable interpolation sets. (III). A theorem of B. J. Maitland.** Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 4, 11–18 (1953).

Mit Methoden, die Verf. in früheren Arbeiten (Teil I, II, dies. Zbl. 44, 294, 295) verwendet hat, gewinnt er Resultate von der folgenden Art: Ist die ganze Funktion  $f(z)$  von der Ordnung  $\rho > 1$  und dem Typus  $\kappa > 0$ , sind  $\mu < \kappa$ ,  $d = (\pi/2 \kappa \rho^2)^{1/2}$  und  $E$  die Menge der  $r$ -Werte, für die ein  $\lambda$  existiert mit  $\log |f(z)| \geq \mu \cdot r^\rho$  im Kreis  $|z - r e^{i\lambda}| \leq d r^{1-\rho/2}$ , so ist die obere Dichte der Menge  $E$  nicht kleiner als eine nur von  $\rho$ ,  $\kappa$ ,  $d$  und  $\mu$  abhängige positive GröÙe. Ähnliches gilt für  $0 < \rho \leq 1$ . Dies verallgemeinert ein Ergebnis von B. J. Maitland [Quart. J. Math., Oxford I. Ser. 15, 84–96 (1944)].

*A. Pfluger.*

**Klimeczak, W. J.: Differential operators of infinite order.** Duke math. J. 20, 295–319 (1953).

$G(w)$  sei eine ganze Funktion und  $D_s$  ein linearer Differentialoperator der endlichen Ordnung  $s$ , dessen Koeffizienten in einem Gebiet  $J$  analytische Funktionen sind. Verf. untersucht die gleichmäßige Anwendbarkeit des Operators  $G(D_s)$  auf die Funktionenklasse  $\mathfrak{F}(J_1)$  aller in  $J_1 \subset J$  analytischen Funktionen. Dabei heißt  $G(D_s)$  gleichmäßig anwendbar auf  $\mathfrak{F}(J_1)$ , wenn für alle  $f(z) \in \mathfrak{F}(J_1)$  die Reihe  $G(D_s)f(z)$  auf jeder beschränkten und abgeschlossenen Teilmenge von  $J_1$  gleichmäßig konvergiert. Eingehendere Resultate werden für den Fall  $s = 2$  gewonnen. Insbesondere werden diejenigen Operatoren untersucht, bei denen die Koeffizienten von  $D_s$  Polynome sind. Ähnliche Untersuchungen wurden durchgeführt von E. Hille (dies. Zbl. 25, 257), H. Muggli (dies. Zbl. 19, 346) u. a. —  $\mathcal{G}(\sigma)$  bezeichne die Klasse aller ganzen Funktionen einer Ordnung  $\leq \sigma$ , und entsprechend bedeute  $\mathcal{G}(\sigma, \beta)$  die Teilklasse aller Funktionen, die höchstens vom Typ  $\beta$  sind. Entsprechend sind die Bezeichnungen  $\mathfrak{F}(\rho)$  und  $\mathfrak{F}(\rho, \alpha)$  für Funktionenklassen im Operandenbereich aufzufassen. Für den Fall  $s = 2$ , in dem die Koeffizienten von  $D_s$  Polynome sind, wird der Begriff der konjugierten Ordnungen von Klassen  $\mathfrak{F}(\rho, \alpha)$  und  $\mathcal{G}(\sigma, \beta)$  eingeführt. Es ergeben sich für den Fall  $s = 2$  folgende Resultate:  $G(D_s)$  ist genau dann auf die Klasse  $\mathfrak{F}(J_1)$  gleichmäßig anwendbar, wenn  $G(w) \in \mathcal{G}(\frac{1}{2}, 0)$ . Mit  $mD_s$  werde derjenige Fall gekennzeichnet, in dem die Koeffizienten Polynome sind, wobei der höchste Koeffizient den Grad  $m$  besitzt.  $G_0(D_s)$  ist genau dann auf die Klasse  $\mathfrak{F}(\rho)$  gleichmäßig anwendbar, wenn die Ordnung von  $G(w)$  höchstens gleich der zu  $\rho$  konjugierten Ordnung  $\sigma$  ist. Und derselbe Satz gilt auch unter einer geringfügigen Zusatzvoraussetzung für  $G_1(D_s)$ . Für  $G_2(D_s)$  wird lediglich eine hinreichende Bedingung dafür angegeben, wann diese Operatoren auf die Klasse aller ganzen Funktionen gleichmäßig angewandt werden können; nämlich  $G(w) \in \mathcal{G}(\frac{1}{2}, \beta)$  mit  $0 \leq \beta < \infty$ . Zu den meisten dieser Sätze werden Verschärfungen bewiesen, die auch den Typ der Klasse berücksichtigen. Ein letzter Abschnitt behandelt schließlich den Fall beliebiger Ordnung  $s$ .

*H.-J. Kowalsky.*

**Bieberbach, Ludwig: Über einen Satz Pólyascher Art.** Ernst Jacobsthal zur Vollendung des siebzigsten Lebensjahres zugeeignet. Arch. der Math. 4, 23–27 (1953).

Theorem. If a transcendental integral function of order  $\rho$ , type  $\sigma$ , and all its derivatives assume integral values at the points  $z = 0, 1, \dots, (m-1)$ , then either  $\rho > m$  or  $\rho = m$  and  $\sigma \geq 1$ . This bound cannot be bettered, as the example  $f(z) = \exp \{z(z-1) \cdots (z-m+1)\}$  shows. This theorem is proved in the author's „Theorie der geometrischen Konstruktionen“ (Basel 1952, this Zbl. 46, 378). A proof is given here for the case  $m = 1$  and, by means of results due to Carlson and Pólya, and to Fatou, it is shown how to express the function as a finite sum of exponentials having polynomial coefficients.

*N. A. Bowen.*

**Sunyer i Balaguer, Ferran: Sur le théorème de Denjoy-Carleman-Ahlfors.** C. r. Acad. Sci., Paris 237, 548–550 (1953).

L'A. précise le théorème de Denjoy-Carleman-Ahlfors sur les valeurs asymptotiques d'une fonction entière d'ordre fini, en introduisant la notion de type d'une valeur asymptotique qui fait intervenir la rapidité de convergence de la

fonction vers cette valeur. L'A. indique aussi que toute valeur asymptotique de type positif est une valeur déficiente. *J. Dufresnoy.*

**Hayman, W. K.: An integral function with a defective value that is neither asymptotic nor invariant under change of origin.** J. London math. Soc. 28, 369—376 (1953).

Verf. gibt eine ganze Funktion  $f(z)$  (von unendlicher Ordnung) an mit einem defekten Wert, der nicht asymptotischer Wert ist und dessen Defekt sich bei Nullpunktverschiebungen ( $f(z+a)$  statt  $f(z)$ ) ändert. Meromorphe Funktionen mit solchem Verhalten sind von Mme Laurent Schwartz und O. Teichmüller bzw. D. Dugué angegeben worden. Verf. bemerkt, daß es auch ganze Funktionen endlicher Ordnung gibt mit defekten Werten, die nicht asymptotische Werte sind.

*A. Pfluger.*

**Boas jr., R. P.: A Tauberian theorem for integral functions.** Proc. Cambridge philos. Soc. 49, 728—730 (1953).

Die Arbeit handelt von kanonischen Produkten  $f(z)$  vom Geschlecht 1 mit Nullstellen  $z_n$ , die der Bedingung  $\sum |\operatorname{Im} 1/z_n| < \infty$  genügen, sowie den Aussagen: (A)  $\lim_{y \rightarrow \infty} y^{-1} \log |f(iy)|$  existiert und (B)  $\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-1} n(r)$  existiert, wo  $n(r)$  die Nullstellenzahl in  $|z| < r$  bezeichnet. Verf. zeigt: (B) gilt dann und nur dann, wenn (A) gilt unter der Modifikation, daß die  $y$  eine offene Menge von endlichem logarithmischem Maß auslassen.

*A. Pfluger.*

**Boas jr., R. P.: Asymptotic properties of functions of exponential type.** Duke math. J. 20, 433—448 (1953).

Soit  $f(z)$  une fonction holomorphe de type exponentiel dans  $y \geq 0$ . Ahlfors et Heins ont montré que, si  $|f(x)| \leq 1$ , il existe une constante  $c$  telle que  $\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-1} \log |f(re^{i\vartheta})| = c \sin \vartheta$  pour  $0 < \vartheta < \pi$  avec exception au plus d'un ensemble de capacité extérieure nulle; uniformément dans tout angle fermé intérieur si l'on exclut un ensemble de  $r$  de longueur logarithmique finie; sans exception dans tout angle fermé intérieur ne contenant aucun zéro de  $f(z)$ . L'A. établit que l'hypothèse  $|f(x)| \leq 1$  peut être remplacée par l'une des suivantes:

- 1°  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log^+ |f(x)|}{1+x^2} dx < \infty$ ;      2°  $\int_i^\infty x^{-2} \log |f(\frac{1}{x})| dx$  existent;
- 3°  $\int_1^\infty x^{-2} \log |f(x)f(-x)| dx$  existe et  $\int_r^{2r} t^{-1} \log |f(\frac{1}{t})| dt = o(r)$ .

L'A. relie ces différentes hypothèses entre elles; il montre que, sous l'une quelconque de ces hypothèses,  $\lim_{R \rightarrow \infty} R^{-1} \log M(R)$  existe et n'est pas négative. Si  $\int_1^\infty x^{-2} \log |f(x)f(-x)| dx$  est bornée supérieurement,  $R^{-1} \log |f(z)|$  est bornée. Ces propriétés sont ensuite appliquées aux fonctions entières de type exponentiel. Dans le présent travail, des résultats connus dus à de nombreux auteurs sont rattachés les uns aux autres et très souvent étendus ou améliorés. *J. Dufresnoy.*

**Singh, S. K.: A note on a paper of R. C. Buck.** Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 38, 120—121 (1953).

Let  $f(z)$  be an entire function of order  $\varrho$  ( $0 < \varrho < \infty$ ) and let

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sup \inf r^{-\varrho} \log M(r) = \frac{T}{t}, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \sup \inf r^{-\varrho} n(r) = \frac{L}{l}.$$

Theorem. (i) If  $l = \varrho T$ , then  $L = \varrho T$ ; (ii) equality cannot hold at the same time in the results [due to R. P. Boas, Ann. of Math., II. Ser. 47, 21—32 (1946) and S. M. Shah, Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 28, 1—8 (1948) respectively],  $l < \varrho T$  and  $L \neq l = \varrho T$ . The conclusions are sharper than those given by R. C. Buck (this Zbl. 47, 315).

*N. A. Bowen.*



**Shah, S. M. and Girja Khanna:** On entire functions of infinite order. *Math. Student* **21**, 47—48 (1953).

Let  $f(z) = \sum a_n z^n$  be an entire function of infinite order, let  $\nu(r) = \nu(r, f)$  be the rank of the maximum term on  $|z| = r$ , let  $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ ,  $M^{(k)}(r) = \max_{|z|=r} |f^{(k)}(z)|$ . It is proved that

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} [\log M(r)] / \nu(r, f^{(k)}) = 0, \quad \liminf_{r \rightarrow \infty} [\log \{r^k M^{(k)}(r)\}] / \nu(r, f) = 0.$$

Part of the proof consists of the argument by which  $\liminf_{r \rightarrow \infty} [\log M(r)] / \nu(r, f) = 0$  was obtained (this *Zbl.* **37**, 180).

*N. A. Bowen.*

**Hiong, King-Lai:** Sur les fonctions holomorphes admettant des valeurs exceptionnelles. *Ann. sci. Ecole norm. sup.*, III. Sér. **70**, 149—180 (1953).

Let  $f(z)$  be holomorphic in the unit circle where it vanishes only  $p$  times and has unity for exceptional value (Picard-Borel). An upper bound, depending only on  $f(0)$  and  $|z|$ , and valid throughout the (possibly punctured) interior of the unit circle, is sought. (Compare Schottky's theorem.) The main tool is a form of Nevanlinna's second fundamental inequality. The results are shown to have close connections with criteria for normal and quasi-normal families, by appealing to theorems due to Montel. Extensions are made to the cases of (i) meromorphic functions, (ii) Nevanlinna exceptional value. Typical theorems are: **A.** If the  $f(z)$  defined above has the expansion  $f(z) = c_0 + c_h z^h + \dots$  ( $c_0 \neq 0, 1$ ;  $c_h \neq 0$ ), then

$$\log |f(z)| < (1-r)^{-3} [H \Omega(c_0, \delta, \delta_v) + K \log \{2(1-r)^{-1}\}]$$

for every  $z$  in  $|z| = r$  with  $0 < \delta \leq r < 1$ , where  $H, K$  are constants, and  $\Omega \rightarrow \infty$  as  $\delta$  and/or  $\delta_v \rightarrow 0$ ,  $\delta_v$  being the distance from the zero  $a_v$ ,  $v = 1, 2, \dots, p$ . **B.** Every family of functions holomorphic in the unit circle, each vanishing  $p$  times at most and having unity for exceptional value (Picard-Borel), is quasi-normal of order  $p$  at most in the unit circle. Finally, the following extension of a theorem of Landau is proved. **C.** In theorem **A** let  $h = 1$  and any exceptional value be assumed. Then  $|c_1| < K e^{H \Omega(c_0, c_1)}$ , where  $\Omega(c_0, c_1) = \Omega(c_0) + \log |c_1|^{-1}$ , and  $H, K$  are constants.

*N. A. Bowen.*

**Hiong, King-Lai:** Un théorème général relatif à la croissance des fonctions holomorphes et privées de zéros dans le cercle unité et un nouveau critère de normalité pour une famille de fonctions holomorphes ou méromorphes. *C. r. Acad. Sci.*, Paris **236**, 1322—1324 (1953).

**Hiong, King-Lai:** Sur les fonctions holomorphes dans le cercle unité ne prenant une valeur que  $p$  fois et admettant une valeur exceptionnelle au sens de Picard-Borel ou au sens de R. Nevanlinna. *C. r. Acad. Sci.*, Paris **236**, 1628—1630 (1953).

**Hiong, King-Lai:** Sur la théorie des défauts relative aux fonctions holomorphes dans le cercle-unité; un nouveau critère de familles normales ou quasi normales. *C. r. Acad. Sci.*, Paris **236**, 1939—1941 (1953).

The theorem of Schottky easily yields that a family of functions  $f(z)$ , holomorphic and  $\neq 0, 1$  in the unit-circle, is normal. The author is interested in weakening the assumption  $f(z) \neq 0, 1$ . With the aid of Nevanlinna's theory on meromorphic functions, he obtains different analogues of Schottky's theorem. From these, criterions on normal families are deduced. As a typical exemple we mention that the assumption  $f(z) \neq 0, 1$  can be replaced by the condition  $\sum_1^\infty \delta_f(a_n) > k > 1$ , where  $\delta_f(a_n)$  denotes the defect in Nevanlinna's sense of the given point  $a_n$ . — Some theorems of the first paper have apparently got an incomplete formulation. — No proofs are given.

*L. Carleson.*

**Lehto, Olli:** A majorant principle in the theory of functions. *Math. Scand.* **1**, 5—17 (1953).

Let  $w = f(z)$  be a meromorphic function in the unit circle and denote by  $n(r, a)$  the number of zeros of  $f(z) - a$  in the circular disc  $|z| \leq r < 1$ , multiple zeros being counted with their multiplicity. By an easy reasoning, the author proves the well-known function  $N(r, a) =$

$\int_0^r n(t, a) dt$  is subharmonic in  $a$ , except for the logarithmic singularity at  $a = f(0)$ . Starting

from this important property of  $N(r, a)$ , the author establishes the following majorant principle: Let  $w = f(z)$  be a meromorphic function in the unit circle whose values lie in a plane domain  $G$  with at least three boundary points. Let the  $w$ -plane be covered with a non-negative mass  $\mu$ , and let  $\Omega(r)$  denote the total mass on the Riemann surface  $F_r$  onto which  $f(z)$  maps the disk

$|z| \leq r$ . Then the integral  $\int_0^r \frac{\Omega(t)}{t} dt$  belonging to  $f(z)$  is at most equal to the corresponding

integral of the function  $x(z)$  which maps the unit circle onto the universal covering surface of  $G$  and satisfies  $x(0) = f(0)$ . Owing to the arbitrariness of the mass distribution  $\mu$ , this principle admits many interesting applications [an improvement of Lindelöf's principle, an estimate of Nevanlinna's characteristic function  $T(r)$  and so on]; in particular, a very simple proof is obtained of the fact that a function is of bounded characteristic if it is meromorphic in the unit circle and omits a set of values of positive capacity. K. Noshiro.

**Ladegast, Konrad:** Beiträge zur Theorie der schlichten Funktionen. Math. Z. 58, 115—159 (1953).

Extending the well-known area theorem of Bieberbach, the author proves the following theorem: Let  $F(z)$  be a univalent (schlicht) meromorphic function in the circle  $|z| < R$ . Then, there holds

$$|F'(z_1) F'(z_2) / [F(z_2) - F(z_1)]^2 - 1| (z_2 - z_1)^2 \leq R^2 [(R^2 - z_1^2)(R^2 - z_2^2)].$$

This inequality is sharp. Starting from this fundamental theorem, the author obtains systematically a number of useful properties known or unknown of univalent functions. Some of his results are related closely to those of R. Nevanlinna (this Zbl. 14, 163), A. J. Macintyre (this Zbl. 13, 271), Grunsky (this Zbl. 5, 362), G. M. Golusin [Mat. Sbornik, n. Ser. 19, 61, 183—202 (1946)], Iliev (this Zbl. 38, 51), Kössler (this Zbl. 7, 312), Kraus (this Zbl. 5, 301), W. Fenchel (this Zbl. 2, 269), Bieberbach (this Zbl. 18, 29), Szegő (Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie II, 2. Aufl., Berlin 1931, S. 75; this Zbl. 1, 211) and Löwner [Math. Ann. 89, 103—125 (1923)]. K. Noshiro.

**Umezawa, Toshio:** On the coefficients of multivalent functions. J. math. Soc. Japan 5, 137—144 (1953).

Die Funktion  $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$  sei für  $|z| < 1$  regular analytisch und gehöre zur Klasse  $D(p)$  (s. T. Umezawa, dies. Zbl. 48, 313). Dann ist

$$|a_{p+1}| \leq \sum_{k=1}^p \frac{2(2p)! (p^2 + p + k^2)}{(p-k+1)! (p-k+1)!} |a_k|.$$

Auch andere Abschätzungen werden für die Klasse  $D(p)$  oder sich an  $D(p)$  anschließende Klassen gegeben. V. Paatero.

**Verblunsky, S.:** On the curvature of level curves. Math. Ann. 125, 472—476 (1953).

Let  $f(z) = \alpha + i\beta$  be regular inside and on the unit circle  $|z| = 1$  and  $w(z)$  a function defined by the equation  $w'(z) = \exp f(z)$ . The image of  $|z| = r = \text{const}$  by the function  $w = w(z)$ ,  $|z| < 1$ , is a closed curve  $C$ . The curvature of  $C$  at  $w(z)$  is  $K = r^{-1} e^{-\alpha} [1 + R(z f')]$ . Put  $\delta = e^{\alpha} (1 - r^2)$ . The author gives a simple proof of two inequalities proved by E. Peschl (this Zbl. 4, 300) and shows that if  $K(e^{-\alpha}) \geq k$ , where  $k$  is a given real constant, then  $K \geq 2k [1 - \sqrt{1 - k\delta}]^{-1}$ . J. Górski.

**Beurling, Arne:** An extension of the Riemann mapping theorem. Acta math. 90, 117—130 (1953).

Si ce mémoire apporte une contribution au problème général de Riemann, qui consiste à trouver une fonction harmonique  $u$  dans un cercle  $|z| < 1$  pour laquelle est vérifiée sur le cercle une relation donnée entre  $u$ , sa conjuguée  $v$ , et les dérivées de  $u$  et  $v$ ,

$$\Psi(u, v, \partial u / \partial x, \partial u / \partial y, \partial v / \partial x, \dots, \partial^2 u / \partial x^2, \dots) = 0,$$



il perfectionne surtout la technique des limites des suites de domaines et des suites d'applications. On se donne une fonction  $\Phi(w)$  continue positive bornée de la variable complexe  $w$ , définie pour  $|w| < \infty$ , et un nombre  $w_0$ . On considère uniquement les fonctions holomorphes  $f(z)$  définies pour  $|z| < 1$  et vérifiant  $f(0) = w_0$ ,  $f'(0) > 0$ . Le problème étudié  $P$  consiste à trouver une  $f(z)$  univalente telle que  $\lim_{|z| \uparrow 1} |f'(z)| - \Phi(f(z)) = 0$ . Soit  $A_\Phi$  la classe des  $f(z)$  telles que

$\limsup_{|z| \uparrow 1} (|f'(z)| - \Phi(f(z))) \leq 0$  et  $B_\Phi$  la classe des  $g(z)$  telles que  $\liminf_{|z| \uparrow 1} (|g'(z)| - \Phi(g(z))) \geq 0$ .

Le résultat démontré est le suivant: I. L'ensemble  $A^*$ , réunion des domaines des valeurs des fonctions de  $A_\Phi$ , est simplement connexe et la fonction  $f^*$  qui représente  $|z| < 1$  sur  $A^*$  est une solution du problème  $P$ . II. L'ensemble  $B^*$ , intersection des domaines des valeurs des fonctions de  $B_\Phi$ , est un domaine simplement connexe, et la fonction  $g^*$  qui représente  $|z| < 1$  sur  $B^*$  est une solution de  $P$ . III. Toute autre solution de  $P$  représente  $|z| < 1$  sur un domaine contenu dans  $A^*$  et contenant  $B^*$ . IV. Si  $\log 1/\Phi$  est sous-harmonique,  $A^*$  et  $B^*$  coïncident, et  $P$  a une solution unique. — L'A. donne d'abord quelques définitions et propriétés relatives à la convergence des domaines. Il introduit le domaine „du type de Schoenflies“; c'est un domaine  $D$  tel que le complémentaire de  $\bar{D}$  ait même frontière que  $D$ . Il démontre ensuite que les classes  $A_\Phi$ ,  $B_\Phi$  sont compactes pour des topologies convenables. Il donne des définitions et propriétés relatives aux réunions et intersections d'applications. Il démontre alors que  $f^*$  appartient à  $A_\Phi$  et constitue une solution de  $P$ , puisque  $g^*$  appartient à  $B_\Phi$ . Il est plus difficile de démontrer que  $g^*$  est solution de  $P$ . — Enfin la partie IV du théorème est immédiate. R. de Possel.

**Heins, Maurice:** Studies in the conformal mapping of Riemann surfaces, I. Proc. nat. Acad. Sci. USA **39**, 322—324 (1953).

$f$  bezeichne eine analytische Abbildung einer Riemannschen Fläche  $F$  in eine Riemannsche Fläche  $H$ , die je eine Greensche Funktion  $G_F$  bzw.  $G_H$  besitzen, und  $n(p)$  die Vielfachheit von  $f$  im Punkte  $p \in F$ . Dann ist die Gleichung

$$G_H(f(p), q) = \sum_{f(r)=q} n(r) G_F(p, r) + u_q(p), \quad p \in F, q \in H,$$

wo  $u_q$  die größte harmonische Minorante von  $G_H(f(p), q)$  ist, eine Verallgemeinerung der Darstellung einer im Einheitskreis beschränkten analytischen Funktion mittels eines Blaschke-Produktes und Poissonschen Integrals. Verf. gibt einige interessante und tiefliegende Eigenschaften von  $u_q$  bekannt: Die quasibeschränkte Komponente  $v_q$  von  $u_q$  (M. Parreau, Thèse Paris 1952) verschwindet entweder für alle  $q \in H$  oder für keines. Die Menge der  $q$  mit  $u_q - v_q > 0$  ist ein  $F_\sigma$  von der Kapazität 0. Ist  $v_q = 0$ , so heißt  $f$  vom Blaschke-Typus. Solche Abbildungen  $f$  führen positive singuläre harmonische Funktionen (vgl. M. Parreau, loc. cit.) auf  $F$  in ebensolche auf  $H$  über. Daraus folgt insbesondere, daß bei einem unendlichen Blaschke-Produkt jeder Wert  $e^{i\alpha}$  als Fatouscher Grenzwert auftritt und sogar unendlich oft. A. Pfluger.

**Sario, Leo:** Modular criteria on Riemann surfaces. Duke math. J. **20**, 279—286 (1953).

The author gives a detailed exposition to his results outlined in his previous papers (this Zbl. **35**, 50; **37**, 56). Let  $R$  be an arbitrary open Riemann surface and  $\{R_n\}$  an exhaustion of  $R$ , each  $R_n$  being bounded by a finite set  $\beta_n$  of closed analytic Jordan curves with  $\beta_n \cap \beta_{n+1} = 0$ . Let  $s_n$  be the harmonic function in the difference  $R_n - R_{n-1}$  with  $s_n = 0$  on  $\beta_{n-1}$ ,  $s_n = \log \sigma_n$  on  $\beta_n$  where  $\sigma_n (> 1)$  is a constant such that  $\int_{\beta_n} ds_n = 2\pi$ ; here  $s_n$  denotes the conjugate harmonic function of  $s_n$ . Then, the quantity  $\sigma_n$  is called the modulus of  $R_n - R_{n-1}$ . First, the author proves: If there exists an exhaustion  $\{R_n\}$  of  $R$  such that  $\prod_{n=1}^{\infty} \sigma_n = \infty$ , then  $R$  is of parabolic type; this condition is also necessary (cf. Kuroda, this Zbl. **44**, 83; Noshiro, this Zbl. **43**, 301). Next, using two interesting simple lemmas on conformal mapping, he proves: If  $R$  is simply connected, there always exists an exhaustion  $\{R_n\}$  of  $R$  such that  $\prod_{n=1}^{\infty} \sigma_n < \infty$ . Furthermore, as applications of the first theorem, he reestablishes type criteria of Ahlfors (this Zbl. **11**, 407), Laasonen (this Zbl. **27**, 397) and Nevanlinna (this Zbl. **24**, 221). This paper is concluded with a simplified proof of his important modular criterion (this Zbl. **32**, 204) for an  $AD$ -removable boundary. K. Noshiro.

**Röhl, Helmut:** Fabersche Entwicklungen und die Sätze von Weierstraß und Mittag-Leffler auf Riemannschen Flächen endlichen Geschlechts. Arch. der Math. **4**, 298—307 (1953).

Verf. entwickelt die Theorie eines erweiterten Divisorenbegriffes für geschlossene Riemannsche Flächen für den Fall, daß den Stellen feste lokale Parameter zugeordnet sind. Das hierzu gehörige Analogon des Riemann-Rochschen Satzes er-

möglichst eine Fassung des Begriffes der Elementarfunktionen (immer relativ zu den bei den Singularitäten fest vorgegebenen Parametern), der einer Theorie der Faber-Entwicklungen von Funktionen in Gebieten mit analytischem Rand und einfach-zusammenhängendem Komplement angepaßt ist. Durch geeignete Ausschöpfung einer beliebigen offenen zusammenhängenden Punktmenge kommt Verf. zu einem allgemeinen Approximationssatz für Funktionen auf Riemannschen Flächen endlichen Geschlechtes, da diese sich in geschlossene Flächen einbetten lassen. Hieraus ergeben sich in bekannter Weise für Flächen endlichen Geschlechtes die Sätze von Weierstraß und Mittag-Leffler, Funktionen und Differentiale betreffend, deren Pole bzw. Nullstellen sich nirgends auf der Fläche häufen. *H. Tietz.*

**Tôki, Y.: On the examples in the classification of open Riemann surfaces. I.** Osaka math. J. 5, 267—280 (1953).

Zwischen den Flächenklassen  $O_G$  (Flächen ohne Greensche Funktion),  $O_{HP}$  (Flächen ohne nicht-konstante positive harmonische Funktionen) und  $O_{HB}$  (Flächen ohne nichtkonstante beschränkte harmonische Funktionen) bestehen die Inklusionen  $O_G \subset O_{HP} \subset O_{HB}$ . Verf. zeigt, daß sie echt sind. Er gibt ferner eine Riemannsche Fläche an mit einer nichtkonstanten eindeutigen und beschränkten analytischen Funktion, aber ohne nichtkonstante harmonische Funktion mit endlichem Dirichletintegral. Zwischen den Flächenklassen  $O_{AB}$  und  $O_{HD}$  besteht also keine Inklusion. *A. Pfluger.*

**Royden, H. L.: Some counter-examples in the classification of open Riemann surfaces.** Proc. Amer. math. Soc. 4, 363—370 (1953).

Es werden folgende Beispiele von Riemannschen Flächen konstruiert: 1. Für jede ganze Zahl  $n > 0$  gibt es eine Riemannsche Fläche  $W_n$ , auf der die Funktionenräume  $HD(W_n)$  (harmonische Funktionen mit endlichem Dirichletintegral  $D$ ) und  $HBD(W_n)$  (beschränkte harmonische Funktionen mit  $D < \infty$ )  $n$ -dimensional sind. 2. Es gibt relativberandete Flächen, auf denen es nicht-konstante harmonische Funktionen mit  $D < \infty$  gibt, deren Normalableitung längs des Relativrandes verschwindet, während jede auf dem Relativrand verschwindende harmonische Funktion mit  $D < \infty$  identisch verschwindet. 3. Ein drittes Beispiel zeigt, daß die Inklusion  $O_{HB} \subset O_{HD}$  echt ist (vgl. auch Y. Tôki (dies. Zbl. 48, 59)). *A. Pfluger.*

**Block, I. Edward: Kernel functions and class  $L^2$ .** Proc. Amer. math. Soc. 4, 110—117 (1953).

Soit  $B$  un domaine plan borné par un nombre fini des courbes analytiques. S. Bergman et M. Schiffer ont introduit (ce Zbl. 43, 84) des fonctions  $K(z, \bar{\zeta})$  et  $L(z, \bar{\zeta})$  définies dans  $B$  dites „Kernel functions“, dont p. e.  $L(z, \bar{\zeta})$  est définie par la formule  $L(z, \bar{\zeta}) = -2\pi^{-1} \bar{\partial}^2 g(z, \bar{\zeta}) / \partial z \partial \bar{\zeta}$  où  $g(z, \bar{\zeta})$  est la fonction de Green de  $B$  et de pôle  $\zeta$  et  $\partial / \partial \bar{z} = \frac{1}{2}(\partial / \partial x + i \partial / \partial y)$  où  $z = x + iy$ . L'A. étudie des propriétés des operateurs  $K(f) = \iint_B f(\zeta) K(z, \bar{\zeta}) d\bar{\zeta} d\eta$  et  $L(f) = \iint_B f(\zeta) L(z, \bar{\zeta}) d\bar{\zeta} d\eta$  où  $f(z)$  est définie dans  $B$  et  $\zeta = \xi + i\eta$ . *F. Leja.*

**Bilimovitch, Anton: Sur la mesure de déflexion d'une fonction non analytique par rapport à une fonction analytique.** C. r. Acad. Sci., Paris 237, 694—695 (1953).

Ist  $P(x, y) + iQ(x, y)$  eine analytische Funktion der komplexen Variablen  $z = x + iy$ , so gilt  $\text{grad } Q = [k \text{ grad } P]$ , wo  $k$  den positiven Einheitsvektor senkrecht zur  $z$ -Ebene bedeutet. Als vektorielle „Abweichung“ einer nicht-analytischen Funktion von der Analytizität (mesure de déflexion) wird der Vektor  $\vec{b} = \text{grad } Q - [k \text{ grad } P]$  eingeführt. Spezialfälle sind  $\vec{b} \parallel \text{grad } P$  und  $\vec{b} \perp \text{grad } P$ ; zum ersteren gehört die Klasse der Funktionen  $D$ , zur letzteren diejenige der Funktionen  $P$ , die von Fréchet definiert wurden (dies. Zbl. 47, 322). *A. Kriszten.*

**Poor, Vincent C.: On residues of polygenic functions.** Trans. Amer. math. Soc. 75, 244—255 (1953).



Für eine, in einem endlichen Bereich  $B$  mit regulärem Rand  $C$  stetige, polygene Funktion  $f(z)$  der komplexen Variablen  $z = x + iy$ , die in  $B + C$  stetige partielle Ableitungen nach  $x$  und  $y$  besitzt, gilt  $\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz - \frac{1}{\pi} \iint_B \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\sigma = 0$ , wo  $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} \{[u_x - v_y] + i(v_x + u_y)\}$  die areolare Ableitung ist. Als Residuum der im Punkte  $P$  singulären Funktion  $f(z)$  wird definiert  $\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz - \frac{1}{\pi} \iint_B \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\sigma$  ( $P \in B$ ), falls diese Differenz existiert, und der erhaltene Wert wird mit dem Limes des ersten Integrals verglichen, wenn die Kurve  $C$  auf den Punkt  $P$  zusammengezogen wird.

A. Kriszten.

Fréchet, Maurice: Les fonctions hypercomplexes à  $n$  dimensions d'une variable hypercomplexe à  $p$  dimensions. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 1053–1055 (1953).

Die Funktion  $F(w) = \sum_{h=1}^n f_h X_h(x_1, \dots, x_p)$  der Variablen  $w = \sum_{h=1}^p e_h x_h$  besitzt eine Ableitung  $F'(w)$ , falls  $dF = F' dw$  und  $F' = \sum_{h=1}^n f_h Y_h$  unabhängig von  $dw$  ist. Die hyperkomplexen Einheiten  $f_h$  und  $e_k$  haben den Rechenregeln  $f_k e_h = \sum_{r=1}^n a_{khr} f_r$  zu genügen, d. h. das System der  $f_k$  wird durch Rechtsmultiplikation mit den  $e_h$  in sich transformiert. Eine derartige Funktion heißt para-analytisch in einem Punkt, wenn sie in diesem Punkt Ableitungen beliebig hoher Ordnung besitzt. Der Fall  $n = 3$ ,  $p = 2$  wird ausführlicher diskutiert.

A. Kriszten.

Rothstein, Wolfgang: Zur Theorie der Singularitäten analytischer Funktionen und Flächen. Math. Ann. 126, 221–238 (1953).

Dans l'espace  $C^2$  rapporté à 2 variables complexes  $w, z$ , on considère certaines classes d'ensembles  $M$  fermés et sans points intérieurs:  $M \in (H)$  si,  $H(G)$  étant l'enveloppe d'holomorphie d'un domaine  $G$ , on a  $H(G - M) \supset H(G) - M$  pour tout domaine  $G$ ;  $M \in (B)$  [resp.  $M \in (F)$ ] si à tout point  $P$  de  $M$  correspondent une boule  $U$  de centre  $P$  et une fonction  $b(w, z)$  bi-harmonique sur  $U - M$ , tendant vers  $+\infty$  quand  $(w, z)$  tend vers un point de  $M$  [resp. une fonction  $\varphi(w, z)$  holomorphe sur  $U$  et dont les valeurs sur  $U \cap M$  appartiennent à un ensemble de capacité nulle]. On a  $(F) \subset (B) \subset (H)$ , un théorème classique de Hartogs se généralise ainsi:  $Z$  étant le bicercle  $|w| < 1$ ,  $|z| < 1$  et  $R$  le domaine  $1/2 < |w| < 1$ ,  $|z| < 1$ , si  $M \in (B)$ , si  $P \subset (|z| < 1)$  est un compact de capacité positive tel que  $M \cap (z = d)$  soit de capacité nulle pour  $d \in P$ , si  $f(w, z)$  est holomorphe (resp. méromorphe) d'une part sur  $R - M$ , d'autre part pour  $z \in P$ ,  $|w| < 1$ ,  $w \notin M$ , alors  $f(w, z)$  est aussi holomorphe (resp. méromorphe) sur  $Z - M$ ; de là résulte, sous des hypothèses plus larges, un théorème de Noshiro [Proc. Japan. Acad. 22, Nr. 8 (1946)]: si  $G \subset Z$  est défini par  $z$  fonction algébrique de  $w$ , sauf pour un ensemble de capacité nulle de valeurs de  $w$ , alors l'ensemble des  $d$  tels que  $G \cap (z = d)$  soit fini est lui-même de capacité nulle.

M. Hervé.

Remmert, Reinhold und Karl Stein: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen. Math. Ann. 126, 263–306 (1953).

Le premier paragraphe est une étude très précise des propriétés locales d'un ensemble analytique  $M$  dans un domaine  $G$  de l'espace  $C^n$  rapporté à  $n$  variables complexes  $z_1, \dots, z_n$ . Pour cette étude, à tout point  $P_0 \in M$  est associé un ensemble analytique  $M'$  dans un voisinage  $U(P_0)$ , appelé ensemble d'immersion de  $M$  dans  $U(P_0)$  parce que  $M' \supset M \cap U(P_0)$ , qui est (après un changement de coordonnées convenable ramenant  $P_0$  à l'origine) le lieu des zéros communs, d'une part d'un nombre fini de fonctions  $\varphi_i(z_1, \dots, z_k)$ , d'autre part, pour chaque  $j$  ( $k+1 \leq j \leq n$ ), d'un polynôme distingué  $\omega_j$  en  $z_j$  sans facteur multiple, les coefficients de ces  $n-k$  polynômes étant, comme les  $\varphi_i$ , des fonctions de  $z_1, \dots, z_k$  holomorphes sur un voisinage  $Z^k$  de l'origine dans  $C^k$  et nulles à l'origine; à tout point  $(z'_1, \dots, z'_k) \in Z^k$  qui annule toutes les  $\varphi_i$  doit correspondre au moins un point  $(z'_1, \dots, z'_k, z_{k+1}, \dots, z_n) \in M \cap U(P_0)$ ; si  $M$  est de dimension  $k$  au point  $P_0$  (c'est-à-dire si  $n-k$  est la dimension maxima d'un plan  $P$  passant par  $P_0$  et tel que  $P_0$  soit point isolé de  $M \cap P$ ), les  $\varphi_i$  disparaissent et à tout point  $(z'_1, \dots, z'_k) \in Z^k$  qui n'annule aucun des discriminants des  $\omega_j$  correspond au moins un point  $(z'_1, \dots, z'_k, z_{k+1}, \dots, z_n) \in M \cap U(P_0)$  au voisinage duquel  $M$  et  $M'$  coïncident; si  $M$  est de dimension pure  $k$  dans un voisinage de  $P_0$  (c'est-à-dire si  $M$  est de dimension  $k$  en tout point commun à  $M$  et à ce voisinage), on peut choisir  $U(P_0)$  et  $M'$  de manière que  $M$  et  $M'$  coïncident au voisinage de tout point de

$M \cap U(P_0)$  dont les  $k$  premières coordonnées n'annulent aucun des discriminants des  $\omega_j$ . Parmi les nombreuses propriétés locales démontrées à l'aide de cette méthode, citons l'invariance de la dimension de  $M$  en chaque point par une transformation analytique localement biunivoque, qui permet de définir la dimension d'un ensemble analytique dans une variété analytique. — Un point-frontière  $P$  de  $G$  est dit point singulier essentiel de  $M$  si, pour aucun voisinage  $U'(P)$ , on ne peut trouver un ensemble analytique  $M'$  dans  $G \cup U'(P)$  tel que  $M = M' \cap G$  (il faut pour cela que  $P \in M$ ). Un théorème dû à Thullen (ce Zbl. 11, 124) dans le cas  $k = l = n - 1$  est ainsi généralisé: Si  $F$  est un ensemble analytique irréductible de dimension  $l$  dans  $G$  et  $M$  un ensemble analytique de dimension pure  $k$  dans  $G - F$  ( $0 \leq l \leq k \leq n - 1$ ), alors, ou bien  $\bar{M} \cap G$  est un ensemble analytique de dimension pure dans  $G$ , ou bien, et ceci seulement si  $k = l$ , tout point de  $F$  est point singulier essentiel de  $M$ . Application: un ensemble analytique  $M$  dans l'espace compact projectif  $C^n$  peut être représenté dans  $C^{n-1}$  par un cône analytique de sommet  $O$ , c'est-à-dire un ensemble analytique  $K$  dans  $C^{n-1}$  qui contient, avec le point  $(z_1, \dots, z_{n-1})$ , tous les points  $(\lambda z_1, \dots, \lambda z_{n-1})$ , où  $\lambda$  est complexe; puisque  $K$  est le lieu des zéros communs à un nombre fini de polynômes homogènes,  $M$  est algébrique (théorème de Chow, ce Zbl. 41, 483).

M. Hervé.

**Thimm, Walter:** Über die Menge der singulären Bildpunkte einer meromorphen Abbildung. Math. Z. 57, 456—480 (1953).

Es sei  $A$  eine analytische Mannigfaltigkeit im  $x$ -Raum,  $A(1)$  eine meromorphe Abbildung von  $A$  in den  $z$ -Raum. Untersucht wird die Menge  $\mathfrak{A}$  der Bilder  $\tilde{z}$  eines einzelnen Unbestimmtheitspunktes  $\xi$  der Abbildung ( $\tilde{z}$  ist „singulärer Bildpunkt“). Die Ergebnisse werden im Raum der Funktionentheorie abgeleitet und auf den projektiven  $C^n$  übertragen. Verf. zeigt, daß — wie schon von Autonne [Acta math. 21, 249—264 (1897)] vermutet —  $\mathfrak{A}$  eine algebraische Mannigfaltigkeit ist. Das folgt sehr einfach mit Hilfe eines Satzes von Chow (dies. Zbl. 41, 483; vgl. auch: H. Kneser, dies. Zbl. 42, 154; R. Remmert und K. Stein, vorsteh. Referat). Der wesentliche Inhalt der Arbeit ist jedoch ein von diesem Satz unabhängiger Beweis, der eine tiefere Einsicht in die Struktur von  $\mathfrak{A}$  gewährt. Die Hauptpunkte sind: 1. Erzeugung der singulären  $\tilde{z}$  durch analytische Kurven  $C$  auf  $A$ . 2. Kennzeichnung der  $C$  durch ihre „Anfänge“  $I'$ , gegeben durch Polynome  $x(t)$ . 3. Übergang zu „formalen singulären Bildpunkten“, welche von den  $I'$  erzeugt werden. 4. Algebraische Berechnung der formalen singulären Bildpunkte. Ihre Gesamtheit ist mit  $\mathfrak{A}$  identisch. 5. Das Hauptergebnis: Es gibt eine algebraische Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{B}$  mit folgenden Eigenschaften: (a) Die Koordinaten der Punkte von  $\mathfrak{B}$  sind die Koeffizienten von Polynomen  $x(t)$ , welche Anfänge  $I'$  analytischer Kurven auf  $A$  definieren; und so bekommt man auch alle Anfänge  $I'$ . (b)  $\mathfrak{A}$  ist rationales Bild von  $\mathfrak{B}$ . — Es werden noch weitere Sätze bewiesen, welche die singulären Bildpunkte von  $A(1)$  mit denen rationaler Abbildungen verbinden.

W. Rothstein.

**Peschl, Ernst und Friedhelm Erwe:** Über beschränkte Systeme von Funktionen. Math. Ann. 126, 185—220 (1953).

(Les lettres gothiques désignent les points de l'espace à  $n$  dimensions complexes, c'est-à-dire les matrices à  $n$  lignes, une colonne; les majuscules désignent les matrices carrées à  $n$  lignes,  $n$  colonnes;  $\tilde{z}^2$  est la somme des carrés des modules des coordonnées du point  $\tilde{z}$ ;  $\tilde{z}$  est la matrice transposée et conjuguée de  $\tilde{z}$ .) Pour  $\alpha \in \mathbb{C}$ , on pose  $I'(\alpha) = \alpha \tilde{\alpha} \begin{pmatrix} 1 & \vdots & 1 \\ 1 & \alpha^2 \end{pmatrix} \in E \begin{pmatrix} 1 & \alpha^2 \end{pmatrix}$ ; la formule  $\tilde{z}_1 = A I'(\alpha) (\tilde{z} - \alpha) (1 - \tilde{\alpha} \tilde{z})$ , où  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $A = A^{-1}$ , donne alors le groupe de tous les automorphismes de la boule  $\tilde{z}^2 < 1$ , et  $\delta(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) = I'(\tilde{z}_1) (\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1) (1 - \tilde{z}_1 \tilde{z}_2)$  est, dans cette boule, une métrique invariante par les automorphismes. Application aux transformations analytiques  $\tilde{z} = \tilde{f}(z)$  du cercle-unité  $|z| < 1$  dans la boule  $\tilde{z}^2 < 1$ : principe du maximum, lemme de Schwarz, algorithme de Schur pour la solution du problème des coefficients, majorations de  $\tilde{f}'(z)$ , rayon d'univalence, dérivée angulaire.

M. Hervé.

## Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

●Rothe, R. und István Szabó: Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker, Ingenieure. Teil VI. (Teubners Mathematische Leitfäden, Bd. 45). Stuttgart: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1953. 251 S. mit 54 Abb. DM 17,60.

Table des matières: I. Quelques théorèmes de théorie des fonctions et applications à des fonctions spéciales: §1 Intégrations et développements en séries dans le domaine complexe. §2 Intégrale d'Euler. §3 Séries asymptotiques et autres fonctions transcendentes. II. Suite de la théorie des équations différentielles linéaires. §4 Compléments. §5 Equations différentielles linéaires d'ordre supérieur. §6 Le comportement des intégrales autour d'une singularité



isolée. § 7 Intégration d'équations différentielles linéaires par des intégrales définies. III. Equations différentielles linéaires spéciales. § 8 Equation hypergéométrique, équation de Legendre. § 9 Equation hypergéométrique confluyente et cas particuliers. § 10 Equation de Bessel. § 11 Equation différentielle linéaire du second ordre à coefficients périodiques. IV. Equations aux dérivées partielles. § 12 Equations du premier ordre. § 13 Equations du second ordre. Nombreux exercices après chaque paragraphe, avec une brève solution. — Les AA. ont su trouver un compromis très heureux entre les diverses exigences d'un tel ouvrage. Certaines parties sont condensées à l'extrême, mais restent cependant à la portée d'un étudiant doué. Le § 11 (35 pages) mérite une mention spéciale; il est sans doute le plus détaillé de l'ouvrage, le plus original aussi: de l'avis du réf., on ne trouve actuellement dans aucun ouvrage de ce genre un exposé aussi clair et aussi complet de la théorie des équations à coefficients périodiques. *Ch. Blanc.*

**Popov, B. S.: On Weber's differential equation.** Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 38, 64—66 (1953).

Verf. gibt eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß der Differentialoperator

$L(x, D) = y'' + P_1 y' + P_2 y$ ,  $D = d/dx$ ,  $P_i(x) = a_{i1} x^2 + a_{i2} x + a_{i3}$ ;  $a_{11} = 0$ , reduzibel ist; als Beispiele werden die Differentialgleichungen  $4y'' - (x^2 + a)y = 0$  und  $y'' + x y' + (n+1)y = 0$  gewählt. *O. Volk.*

**Potter, Ruth Lind: On self-adjoint differential equations of second order.** Pacific J. Math. 3, 467—491 (1953).

Es wird im Anschluß an Arbeiten von Leighton (dies. Zbl. 48, 65) das Verhalten der Lösungen von (1)  $[r(x)y']' + p(x)y = 0$  für große positive  $x$  untersucht, wobei  $p(x)$ ,  $r(x)$  für  $a \leq x < \infty$  stetig und  $r(x) > 0$  sei. Eine Lösung wird oszillatorisch genannt, wenn sie keine größte Nullstelle besitzt. Zunächst wird der Fall  $r = 1$  betrachtet. Bei beliebigen  $r$  erweist sich eine Hilfsfunktion  $R(x) = r(x) d[r(x)p(x)]^{-1/2}/dx$  als wichtig. Es sei  $\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = L$

vorhanden. Im Falle  $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x r^{-1}(x) dx = \infty$  sind die Lösungen von (1) für  $L < 2$  oszillatorisch,

für  $L > 2$  sind sie es nicht. Im Falle  $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x p(x) dx = \infty$  und  $p(x) > 0$  für große  $x$  sind die Lösungen für  $L > -2$  oszillatorisch und für  $L < -2$  sind sie es nicht. Für die Anzahl  $N(a, x)$  der Nullstellen einer Lösung von  $y'' + h^{-2}y = 0$  wird, falls  $g(x) = (x^2 h^{-2} - 1/4)^{1/2}$  reell

ist und  $\lim_{x \rightarrow \infty} x(g^{-1})' = 0$  gilt, die asymptotische Formel  $N(a, x) \sim \frac{1}{\pi} \int_a^x \frac{g(x)}{x} dx$  aufgestellt.

Die Lösungen von (1) lassen sich im Falle  $p(x) < 0$  und  $r'$  stetig in der Form  $c_1 u(x) \exp v(x) + c_2 u(x) \exp(-v(x))$  schreiben, wobei  $r u^2 [(r u')' + p u] = -1$ ,  $r u^2 v = 1$  gilt. Hier kann die

Beschränktheit der Lösungen für großes  $x$  untersucht werden. Wenn  $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x r^{-1} dx = \infty$  und

$r p < 0$  und monoton abnehmend für große  $x$  ist, so gibt es eine Lösung  $y_1(x)$  von (1), welche für  $x \rightarrow \infty$  gegen Null strebt, während keine von  $y_1(x)$  linear unabhängige Lösung beschränkt

bleibt; alle Lösungen sind monoton. Haben  $\int_a^\infty r^{-1} dx$  und  $\int_a^\infty p dx$  endliche Werte, so sind

alle Lösungen von (1) beschränkt, und es gibt eine Konstante  $M$  mit  $|y'| < M r^{-1}$ . Wenn  $r p$

monoton fällt und  $\int_a^\infty r^{-1} dx$  endlich ist, oder wenn  $r p$  monoton wächst und  $\int_a^\infty p dx$  endlich ist,

sind alle Lösungen von (1) nicht oszillatorisch und beschränkt. *L. Collatz.*

**Hartman, Philip and Aurel Wintner: On non-oscillatory linear differential equations.** Amer. J. Math. 75, 717—730 (1953).

Es werden Bedingungen dafür aufgestellt, daß die Differentialgleichung (1)  $x'' + f(t)x = 0$  [ $f(t)$  für große positive  $t$  stetig] die Eigenschaft besitzt: I. Es

gibt ein Paar von Lösungen  $x = x(t)$ ,  $x = y(t)$  mit  $x(t) \rightarrow 1$ ,  $x'(t) \rightarrow 0$ ,  $y(t) \sim t$ ,  $y'(t) = o(t)$  für  $t \rightarrow \infty$ , oder schärfer: II. Es gibt ein Paar von Lösungen  $x(t)$ ,

$y(t)$  mit  $x(t) \rightarrow 1$ ,  $x'(t) = o(t^{-1})$ ,  $y(t) \sim t$ ,  $y'(t) \rightarrow 1$ . Als hinreichend für I. er-

weisen sich die Bedingungen:  $\int_i^\infty f(t) dt$  konvergiert (evt. bedingt), für  $F(t) = \int_i^\infty f(s) ds$

konvergiert (ext. bedingt)  $\int_0^\infty F(t) dt$ , und es gilt  $\int_0^\infty t F(t)^2 dt < \infty$ . Die letzte Forderung ist dabei sogar notwendig, falls die vorangehenden gelten. II. gilt, wenn außerdem noch  $F(t) = o(t^{-1})$  erfüllt ist. Dabei ist für II. die Konvergenz von  $\int_0^\infty f(t) dt$  und  $F(t) = o(t^{-1})$  auch notwendig. — II. gilt ebenfalls unter den Bedingungen:  $\int_0^\infty t f(t) dt$  konvergiert, und mit einem  $p$  ( $1 \leq p \leq 2$ ) gilt  $\int_0^\infty t^{2p-1} |f(t)|^p dt < \infty$ . — Diese Kriterien verschärfen frühere Ergebnisse, insbesondere von A. Wintner. *F. W. Schäfke.*

**Ascoli, Guido:** Sul comportamento asintotico degli integrali dell'equazione  $y'' = (1 + f(t)) y$  in un caso notevole. *Rivista Mat. Univ. Parma* **4**, 11—29 (1953).

Si consideri l'equazione (\*)  $y'' = [1 + f(t)] y$  dove  $f \in L^p$  in  $(0, \infty)$  e  $p \geq 1$ . L'A., riducendo la (\*) ad un'equazione di Riccati, assegna un perspicuo metodo ricorrente per determinare la struttura asintotica dei suoi integrali e ritrova in particolare formule già note [caso  $1 \leq p \leq 2$ , Ph. Hartman (questo Zbl. **31**, 398), caso  $p = 3$  (R. Bellman, questo Zbl. **40**, 194)] e altre nuove. Si ha ad es.: per  $p = 1$ ,  $\log y - t = C + o(1)$  (M. Bôcher): per  $1 < p \leq 2$ ,  $\log y - t = \frac{1}{2} \int_0^t f(\tau) d\tau + C + o(1)$  (Ph. Hartman); per  $2 < p \leq 3$ ,

$$\log y - t = \frac{1}{2} \int_0^t f(\tau) d\tau - \frac{1}{4} \int_0^t f(\tau) d\tau \int_0^\tau e^{-2(\tau-s)} f(s) ds + C + o(1)$$

(R. Bellman, per  $p = 3$ ).

*G. Sansone.*

**Wasow, Wolfgang:** Asymptotic solution of the differential equation of hydrodynamic stability in a domain containing a transition point. *Ann. of Math.*, II. Ser. **58**, 222—252 (1953).

Verf. stellt sich die Aufgabe, für die Differentialgleichung

$$(1) L_0[u] = u^{(4)} + \sum_{j=1}^4 a_j(x) u^{(4-j)} + \lambda^2 \sum_{j=0}^2 b_j(x) u^{(2-j)} = 0 \quad [b_0(0) = 0, b'_0(0) \neq 0, b_2(0) \neq 0]$$

in einer vollen komplexen Nachbarschaft von  $x = 0$  ein Fundamentalsystem mit bekanntem asymptotischen Verhalten für  $\lambda \rightarrow \infty$  zu finden [Durchführung für  $b_1 = 0, b_2(0) = b'_0(0) = 1$ ]. Dies geht über die Resultate einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **31**, 402) hinaus, wo sich solche Funktionen in gewissen Sektoren der  $x$ -Ebene außerhalb einer beliebigen festen Umgebung von  $x = 0$  ergaben. — Der leitende Gedanke der vorliegenden Arbeit ist, ein System von Funktionen  $v_j(x, \lambda)$  ( $j = 1, \dots, 4$ ) zu finden, die zunächst einmal in einem näher präzisierten Sinne als asymptotische Näherungen eines Fundamentalsystems von (1) in Frage kommen, und anschlie-

Bend eine Differentialgleichung (2)  $L_\mu(v) = v^{(4)} + \sum_{\mu=1}^4 c_{\mu j}(x, \lambda) v^{(4-\mu)} = 0$  mit den  $v_j$  als Fundamentalsystem aufzustellen. Der Vergleich von (1) und (2) führt schließlich zu dem gesuchten Lösungssystem von (1), über das sich jetzt strenge weitergehende asymptotische Aussagen bis zu den Ableitungen dritter Ordnung machen lassen, insbesondere auch im Verhalten zu den Lösungen der „reduzierten“ Gleichung  $\sum_{j=0}^2 b_j(x) u^{(2-j)} = 0$ . Die Grundlage zur Konstruktion der  $v_j$  bildet die Untersuchung des Verf. über die spezielle Differentialgleichung  $y^{(4)} + \lambda^2(x y'' + y) = 0$  (dies. Zbl. **38**, 246), die zwar selbst noch nicht zur Vergleichsbetrachtung ausreicht, für die aber eine vollständige asymptotische Analyse vorliegt. *K. Maruhn.*

**Kestin, J. and S. K. Zaremba:** Geometrical methods in the analysis of ordinary differential equations. *Appl. sci. Research*, B **3**, 149—189 (1953).

Gli AA. danno notizia dei principali risultati relativi al comportamento delle curve integrali delle equazioni differenziali  $dy/dx = Y(x, y)$ ,  $X(x, y)$ ; sono richiamati i più noti tipi di punti singolari, le nozioni sui cicli limite e sulla stabilità e il teorema sugli indici di Poincaré. Sette esempi, ben scelti, e 34 figure illustrano la teoria; una bibliografia, abbastanza estesa, chiude l'opuscolo, scritto principalmente per richiamare l'attenzione degli ingegneri sulla teoria delle equazioni differenziali non lineari. *G. Sansone.*



**Minorsky, Nicolas:** Sur l'extinction asynchrone. C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 643—645 (1953).

Bei  $\ddot{x} - (a - c x^2) \dot{x} + x = \gamma \sin \omega t$  (nichtlineare Schwingung bei periodischer äußerer Kraft der Kreisfrequenz  $\omega$ ) seien  $a, c, \gamma$  kleine Größen derselben Größenordnung. In üblicher Weise werden Phasenkoordinaten  $r, \varphi$  in der Phasenebene  $x, \dot{x}$  (mit  $r^2 = x^2 + \dot{x}^2$ ) eingeführt und in der Phasenebene die singulären Punkte des Systems von Differentialgleichungen für  $r$  und  $\varphi$  mit Hilfe von Variationsgleichungen untersucht. Es ist ein stabiler Knotenpunkt als singulärer Punkt vorhanden, der sich mit wachsendem  $\omega$  unbegrenzt der kritischen Grenzkurve nähert, welche die Zone der stabilen Knoten abgrenzt, so daß bei genügend großem  $\omega$  die Stabilität aufhört, indem bei kleiner Störung die Grenzkurve überschritten werden kann. Diese Erscheinung des Aufhörens der Stabilität bei hoher Erregerfrequenz nennt Verf. extinction asynchrone.

*L. Collatz.*

**Minorsky, Nicolas:** Sur l'excitation asynchrone. C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 964—966 (1953).

In  $\ddot{x} - (a + c x^2 - e x^4) \dot{x} + x = \gamma \sin \omega t$  (nichtlineare Schwingung bei periodischer äußerer Kraft der Kreisfrequenz  $\omega$ ) seien  $a, c, e, \gamma$  kleine positive Größen derselben Größenordnung  $\varepsilon$ . Als ein gewisses Gegenstück zur vorangehenden Arbeit wird hier mit den gleichen Methoden das Auftreten einer Schwingung im Falle  $\beta = 8a/\varepsilon < 0$  bei einer äußeren Kraft von irgendeiner Frequenz beschrieben, und zwar die Existenz eines Verzweigungspunktes mit einem Wechsel der topologischen Struktur in der Phasenebene von dem Bilde für  $\gamma = 0$  (ein singulärer stabiler Punkt, umgeben von einem instabilen Zyklus, dieser wieder von einem stabilen Zyklus umgeben, keine Schwingung) zu einem Bild für  $\gamma \neq 0$  (ein singulärer instabiler Punkt umgeben von einem stabilen Zyklus), d. h. die Schwingung tritt auf für  $\gamma \neq 0$ .

*L. Collatz.*

**Castro, Antonio de:** Sopra l'equazione differenziale delle oscillazioni non-lineari. Rivista Mat. Univ. Parma **4**, 133—143 (1953).

Data l'equazione (\*)  $\ddot{x} + f(x, \dot{x}, t) \dot{x} + g(x) = e(t)$ , nelle ipotesi: i) siano  $f(x, v, t), g(x), e(t)$  continue;  $f(x, v, t)$  sia lipschitziana in  $x$  e  $v$  e  $g(x)$  in  $x$ ; ii) esistano due costanti positive  $a, E$  ed una funzione  $q(x, v)$ , anch'essa lipschitziana, tali che  $|e(t)| < E$ ;  $f(x, v, t) > q(x, v)$  con  $q(x, v) > -K$  ( $K > 0$ ),  $0 < \varepsilon \leq q(x, v) \leq A$  per  $|x| > a$ ; iii) sia  $g(-x) = -g(x)$ ,  $g(x) \neq 0$  per  $x \neq 0$ . — L'A., facendo uso del teorema di Brouwer, prova l'esistenza di almeno una soluzione periodica della (\*). L'A. assegna anche un criterio molto generale che assicura per ampie classi di equazioni della forma (\*) l'esistenza di una sola soluzione periodica cui sono asintotiche tutte le altre soluzioni.

*G. Sansone.*

**Castro, Antonio de:** Sulle oscillazioni non-lineari dei sistemi in uno o più gradi di libertà. Rend. Sem. mat. Univ. Padova **22**, 294—304 (1953).

L'A. considera l'equazione differenziale (1)  $\ddot{x} + f(x, \dot{x}, t) \dot{x} + g(x) = 0$  e il sistema di equazioni differenziali:

$$(2) \quad \ddot{x}_1 + f_1(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, t) \dot{x}_1 + g_1(x_1) = 0, \quad \ddot{x}_2 + f_2(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, t) \dot{x}_2 + g_2(x_2) = 0$$

dove  $f(x_1, \dot{x}_1, t), f_1(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, t), f_2(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, t)$  sono funzioni periodiche di periodo  $T$ , rispetto a  $t$ , e prova l'esistenza di soluzioni periodiche, di periodo  $T$ , per l'equazione (1) e per il sistema (2). Dimostra poi l'esistenza di soluzioni periodiche per il sistema indipendente dal tempo:

$$\dot{x}_1 + f_1(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) + g_1(x_1) = 0, \quad \dot{x}_2 + f_2(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) + g_2(x_2) = 0.$$

Questi risultati sono ottenuti in base a diverse ipotesi sulle  $f$  e sulle  $g$ . La più importante consiste nel supporre dissipativo per grandi valori di  $x$  e  $\dot{x}$  o di ambedue (eccettuato il caso  $x \dot{x} < 0$  e  $|\dot{x}|$  limitata) il sistema meccanico rappresentato dalle equazioni (1), (2), (3).

*D. Graffi.*

**Gagliardo, Emilio:** Sul comportamento degli integrali dell'equazione differenziale non lineare  $x'' + f(x) x' + g(x) = 0$  con  $g(x)$  crescente e  $f(x)$  positiva per  $|x| > M > 0$ . Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 8, 309–314 (1953).

L'A. studia il comportamento asintotico degli integrali della equazione (1)  $d^2x/dt^2 + f(x) dx/dt + g(x) = 0$  supposto i)  $f(x)$  continua per ogni  $x$  finito,  $f(x) > 0$  per  $|x| > M > 0$ , ii)  $g(x)$  continua per ogni  $x$  finito, non decrescente,  $g(0) = 0$ ,  $g'(0) > 0$ . Con considerazioni elementari l'A. prova che a) se  $f(0) < 2 \int_0^\infty g'(t) dt$  tutti gli integrali della (1) sono oscillanti; b) se  $f(0) \geq 2 \int_0^\infty g'(t) dt$  tutti gli integrali della (1) tendono a zero senza oscillare. G. Sansone.

**Manaresi, Gabriella:** Sull'equazione di Liénard generalizzata. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 8, 59–64 (1953).

Data l'equazione di Liénard generalizzata  $\ddot{x} + \omega^2 x - \varepsilon g'(x) \dot{x} - \mu f(x) \dot{x} = 0$ , per l'intervallo di tempo  $T$  che intercede fra due massimi successivi della soluzione l'A. assegna l'espressione approssimata

$$(*) \quad T = 2\pi/\omega + \frac{\varepsilon}{c\omega^2} \int_0^{2\pi} \frac{g'(c \cos \vartheta)}{2} \cos \vartheta d\vartheta,$$

dove  $c(t)$  soddisfa l'equazione  $\frac{dc}{dt} = -\frac{\mu c}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(c \cos \vartheta) \sin^2 \vartheta d\vartheta$ . Manca la valutazione dell'errore nella (\*). G. Sansone.

**Volpato, Mario:** Sopra un problema al contorno per l'equazione differenziale  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ . Rend. Sem. mat. Univ. Padova 22, 334–349 (1953).

L'A. dà un teorema di esistenza di una soluzione  $y(x)$ , assolutamente continua insieme con le proprie derivate dei primi  $n-1$  ordini, del problema di valori al contorno

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}); \quad y(x_1) = c_1, \dots, y(x_n) = c_n.$$

Tale proposizione fornisce un'ulteriore estensione (cfr. G. Zwirner, questo Zbl. 48, 69) sia di un teorema di S. Cinquini (questo Zbl. 22, 339), sia di un teorema di G. Zwirner (questo Zbl. 27, 314), il quale costituiva già un'estensione di un altro teorema di S. Cinquini. Per l'enunciato del nuovo teorema, che è alquanto lungo, rinviamo al lavoro in esame. S. Cinquini.

**Doetsch, Gustav:** Die lineare Differentialgleichung im zweiseitig unendlichen Intervall unter Anfangs- und Randbedingungen. Math. Ann. 126, 307–324 (1953).

In dieser grundlegenden Arbeit wird zum ersten Male das Anfangs- und Randwertproblem im Intervall  $-\infty < t < +\infty$  für die Differentialgleichung (1)  $Y^{(n)}(t) + c_{n-1} Y^{(n-1)}(t) + \dots + c_1 Y'(t) + c_0 Y(t) = F(t)$  [F(t) eine beliebige Störfunktion] mit Hilfe der zweiseitigen

Laplace-Transformation  $f(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} F(t) dt = \mathcal{L}_{II}\{F\}$  allgemein behandelt. Das charakteristische Polynom  $p(s) = s^n + c_{n-1}s^{n-1} + \dots + c_1s + c_0$  habe die Nullstellen  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , die als verschieden angenommen werden, und es sei  $\Re \alpha_1 < \dots < \Re \alpha_m = 0 < \Re \alpha_{m+1} < \dots < \Re \alpha_n$ . Verf. zeigt, daß das Anfangswertproblem für  $t \rightarrow -\infty$ , wenn überhaupt, so nur in der Form gestellt werden kann: (2)  $Y(-\infty) =$  beliebiger fester Wert,  $Y'(-\infty) = \dots = Y^{(n-1)}(-\infty) = 0$ , wobei eine Lösung aber keineswegs eindeutig bestimmt zu sein braucht. Da (im Gegensatz zur einseitigen Laplace-Transformation) hier zu einer Bildfunktion i. a. andere und andere Originalfunktionen gehören, je nach den zulässigen Streifen (senkrecht zur reellen Achse der  $s$ -Ebene), in denen man die Rückübersetzung vornimmt, so muß man sich auf einen bestimmten solchen Streifen festlegen, als welchen Verf. den Streifen  $0 < x_1 < x_2 < \Re \alpha_{m+1}$  wählt. Bei dieser Wahl werden nämlich die  $F(t)$  aufzuerlegenden Bedingungen besonders einfach. Das zu Beginn der Arbeit präzise formulierte Differentiationsgesetz ergibt dann u. a.  $\mathcal{L}_{II}\{Y^{(p)}\} = s^p \mathcal{L}_{II}\{Y(t) - Y(-\infty)\}$  ( $p = 1, \dots, n$ ) für  $x_1 < \Re s < x_2$  und mit  $\mathcal{L}_{II}\{Y(t) - Y(-\infty)\} = \hat{y}(s)$ ,  $\mathcal{L}_{II}\{F(t) - c_0 Y(-\infty)\} = \hat{f}(s)$  lautet die Bildgleichung von (1):  $p(s) \hat{y}(s) = \hat{f}(s)$ , woraus sich  $\hat{y}(s) = \hat{f}(s)/p(s)$  ergibt.  $1/p(s)$ , in  $x_1 < \Re s < x_2$  zurückübersetzt, liefert die „Greensche Funktion“  $Q(t)$ , aus der durch Faltung das  $Y(t)$  folgt: (3)  $Y(t) - Y(-\infty) = Q(t) \star_{\infty} [F(t) - c_0 Y(-\infty)]$ . Gemäß einem bekannten allgemeinen Prinzip des Verf. untersucht er nun ganz unabhängig von der Art der Her-



leitung von (3), unter welchen Bedingungen für das als stetig angenommene  $F(t)$  das durch (3) bestimmte  $Y(t)$  eine Lösung des Anfangswertproblems (2) ist, wobei es sich um Bedingungen für das Verhalten von  $F(t)$  für  $t \rightarrow \pm \infty$  handelt. Als solche wählt er (I):  $F(-\infty)$  und  $F(+\infty)$  sollen existieren und (II):  $\int_{-\infty}^{\infty} |F(t)| dt$  soll existieren. Im Falle (I) ergibt sich: notwendig ist,

daß (4)  $\Re \alpha_\mu \neq 0$  ( $\mu = 1, \dots, n$ ), speziell also  $c_0 \neq 0$  und weiter, daß (5)  $Y(-\infty) = F(-\infty)/c_0$  ist; umgekehrt reichen (4) und (5) hin, damit (3) das betr. Anfangswertproblem löst, und es läßt sich die Lösung, wie folgt, einfacher schreiben: (6)  $Y(t) = Q(t) \overset{*}{\underset{\infty}{\int}} F(t)$ . Da für die (spezielle)

Lösung (6) überdies  $Y(+\infty) = F(+\infty)/c_0$ ,  $Y'(+\infty) = \dots = Y^{(n-1)}(+\infty) = 0$  ist, stellt diese auch die jetzt eindeutig bestimmte Lösung des folgenden Randwertproblems dar, bei dem statt der  $n$  Anfangswerte verlangt wird:  $Y(-\infty) = F(-\infty)/c_0$ ,  $Y(+\infty) = F(+\infty)/c_0$  (Sätze 1 und 2). Im Falle (II) ergibt sich: notwendig ist (7)  $Y(-\infty) = 0$  und umgekehrt reicht (7) hin, um eine Lösung von der Gestalt (6) für das Anfangswertproblem:  $Y(-\infty) = Y'(-\infty) = \dots = Y^{(n-1)}(-\infty) = 0$  zu sichern. Fragt man auch hier, wie sich diese spezielle Lösung  $Y(t)$  für  $t \rightarrow +\infty$  verhält, so zeigt sich:  $Y(+\infty)$  existiert im allgemeinen [soll heißen, wenn  $F(t)$  nicht noch weitere Bedingungen erfüllt] nur dann, wenn kein  $\alpha_\mu$  rein imaginär ist;

trifft dies zu, wird umgekehrt (7)  $Y(+\infty) = \frac{1}{p'(0)} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) dt$ , falls  $c_0 = 0$ , und  $= 0$ , falls

$c_0 \neq 0$  ist, und es ist das  $Y(t)$  dann wieder die eindeutige Lösung des Randwertproblems mit dem Randwert  $Y(+\infty)$  von (7) und  $Y(-\infty) = 0$ . (Sätze 3 und 4). — Nimmt man die Rücktransformation in anderen Streifen der  $s$ -Ebene vor, so entstehen Lösungen mit anderen Bedingungen für  $F(t)$ , z. B.  $F(t) - c_0 Y(-\infty) = O(e^{\sigma t})$  für einen Streifen der rechten Halbebene, der  $\sigma > 0$  enthält und frei von Wurzeln  $\alpha_\mu$  ist, wobei jedoch die Lösung jetzt die kompliziertere Gestalt (3) behält. Ist speziell  $\sigma > \text{Max}(\Re \alpha_\mu, 0)$ , so hängt die Lösung nur von den  $F(\tau)$ -Werten ab, für die  $\tau \leq t$  ist. Arbeitet man in einem Streifen der linken Halbebene, so übernimmt  $t \rightarrow +\infty$  die Rolle von  $t \rightarrow -\infty$  und umgekehrt. Schließlich lassen sich nach derselben Methode auch d'Alembertsche Systeme behandeln. *E. Mohr.*

**Abramowitz, Milton:** On the solution of the differential equation occurring in the problem of heat convection in laminar flow through a tube. *J. Math. Physics* **32**, 184—187 (1953).

Zur Bestimmung der Eigenwerte  $\beta_s$  der Randwertaufgabe  $y'' + y'/r + \beta^2(1 - r^2)y = 0$  mit  $y = y(r)$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y(1) = 0$ , wird ein Reihenansatz in Besselfunktionen  $y(r, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\beta) (\beta r)^n J_n(\beta r)$  gemacht, der mit Rücksicht

auf die numerische Bestimmung der  $\beta_s$  einer unmittelbaren Potenzreihe vorzuziehen ist. Die so ermittelten Werte  $\beta_s$  sind für  $s = 0$  bis 4 angegeben, ebenso die zur Berechnung von  $y(r, \beta_s)$  benötigten Größen  $\beta_s^n A_n(\beta_s)$  bis zu  $n = 37$ . Für die höheren Eigenwerte gibt es eine gute asymptotische Formel. *R. Zurmühl.*

**Krejn, M. G.:** Ein Analogon der Čebyšev-Markovschen Ungleichungen beim eindimensionalen Randwertproblem. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **89**, 5—8 (1953) [Russisch].

The author continues his fruitful investigations [cf. i. a. (I) this Zbl. **40**, 202; (II) **42**, 95; (III) *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **87**, 881—884 (1952)] bringing to light further correspondences between Sturm-Liouville theory and the theory of moment-problems; a unified theory of the two has still not been found. Let  $q(x)$  and  $\varrho(x)$ , ( $0 \leq x < l < \infty$ ), be measurable and summable in every interval  $(0, a)$ , ( $0 < a < l$ ), and let  $\varphi(x; \lambda)$ ,  $\psi(x; \lambda)$  be solutions of  $y'' - q(x)y + \lambda \varrho(x)y = 0$  such that  $\varphi(0; \lambda) = 1$ ,  $\varphi'(0; \lambda) = h$ ,  $\psi(0; \lambda) = 0$ ,  $\psi'(0; \lambda) = 1$ . He considers mainly the „indeterminate“ case in which for every  $\lambda$ , real or complex, both  $\varphi$  and  $\psi$  belong to  $\varrho^2(0, l)$ , this including the non-singular

cases. He defines  $D_0(x; \lambda) = -\lambda \int_0^x \varphi(s; \lambda) \varphi(s; 0) \varrho(s) ds$ , and three similar functions  $D_1$

(with a misprint),  $E_0, E_1$  (cf. (I)). Let also  $N(\lambda)$  be any function holomorphic for  $\text{Im } \lambda > 0$  such that  $\text{Im } N(\lambda) \geq 0$  for  $\text{Im } \lambda > 0$ . Theorem 1 asserts without proof the possibility of the representation

$\frac{E_0(l; \lambda) N(\lambda) + E_1(l; \lambda)}{D_0(l; \lambda) N(\lambda) + D_1(l; \lambda)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(\mu)}{(\bar{\mu} - \lambda)}$ , where  $\tau(\mu)$  is non-decreasing, and  $\tau(\mu - 0) =$

$\tau(\mu)$ ,  $\tau(0) = 0$ . The set of all such  $\tau$  for all  $N(\lambda)$ , including  $N(\lambda) \equiv \infty$ , is said to coincide

with the set  $S_h$  of spectral functions for the boundary problem characterised by

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^l f(x) \varphi(x; \lambda) \varrho(x) dx \right|^2 d\tau(\lambda) = \int_0^l |f(x)|^2 \varrho(x) dx;$$

however  $\tau(\lambda)$  is „orthogonal“ [see (III)] only if  $N(\lambda)$  is a real constant. For any real  $\mu$  there is a unique orthogonal  $\tau_\mu(\lambda)$  which has  $\mu$  as a point of its spectrum. If  $\lambda_k$  is a point of this spectrum,

then  $\tau_\mu(\lambda_k + 0) - \tau_\mu(\lambda_k - 0) = \delta(\lambda_k) = 1 \int_0^l |\varphi(x; \lambda_k)|^2 \varrho(x) dx$ . The result referred to in the title is Theorem 2, which asserts the extremal properties

$$\tau(\lambda_m + 0) - \tau(\lambda_0 - 0) \leq \tau_\mu(\lambda_m + 0) - \tau_\mu(\lambda_0 - 0), \tau(\lambda_m - 0) - \tau(\lambda_0 + 0) \geq \tau_\mu(\lambda_m - 0) - \tau_\mu(\lambda_0 + 0),$$

for any  $\tau \in S_h$ . The proof is indicated. There is then a brief discussion of the application of Theorem 2 to the asymptotic behaviour of  $\tau(\lambda)$  as  $\lambda \rightarrow \infty$  (cf. B. M. Levitan, this Zbl. 48, 324). Also discussed is the dependence of  $\tau(\lambda) = \tau(\lambda; l)$  on  $l$ . [Reviewer's remarks: The analogy, which is not fully explained by the author, appears as follows. Taking the Hamburger problem

$\int_{-\infty}^{\infty} t^n d\psi(t) = \mu_n$ , (cf. J. A. Shohat and J. D. Tamarkin, The problem of moments, New York 1943),  $\psi(t)$  corresponds to  $\tau(\lambda)$ . If  $P_n(z) Q_n(z)$  is the  $n$ -th approximant in the continued fraction

development of  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(t)}{z-t}$  (loc. cit. p. 46), then  $P_n(z), Q_n(z)$ ,  $n$  and  $z$  correspond respectively

to  $\varphi(x; \lambda), \varphi(x; \lambda), x$  and  $\lambda$  respectively. The author's functions  $E_0(l; \lambda)$  etc., which for the analogy are better defined as Wronskians, correspond in the moment-problem to functions  $A(z)$  etc. (loc. cit. pp. 51–52). His Theorem 1 corresponds to a result of R. Nevanlinna (loc. cit. pp. 57–60). In comparing his Theorem 2 to the Čebyšev inequalities (loc. cit. p. 43) he equates the boundary problem to the reduced moment-problem; if the boundary problem were made to correspond as in Theorem 1 with the full moment problem Theorem 2 would appear to be analogous to Nevanlinna's extremal property (loc. cit. p. 60)].

F. V. Atkinson.

Chaundy, T. W.: Second-order linear differential equations with polynomial solutions. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 4, 81–95 (1953).

It is required to find all linear differential equations of the second order, of the form  $Fy = \lambda Gy$  such that a polynomial solution  $y = P_n(x)$  of exact degree  $n$  corresponds to the eigenvalue  $\lambda_n$  for every non-negative integer  $n$ . The problem was discussed, incompletely, by the author, this Zbl. 34, 196. Writing  $F = \sum_{r=0}^p x^r f_r(\delta)$ ,  $G = \sum_{r=0}^p x^r g_r(\delta)$  where  $\delta = x \cdot \frac{d}{dx}$ , the possible cases are classified according to the number of non-negative integers  $r$  for which  $f_0(r) = g_0(r) = 0$ . (1) No roots  $r$ ; but for trivial exceptions  $P_n(x)$  must be  $x^n$  simply. (2) A single root  $r = 0$ ; then  $P_n(x) = \sum_{r=0}^n a_{n,r} x^r$  where  $\frac{a_{n,r+1}}{a_{n,r}}$  is a rational function of  $r$ , with numerator and denominator of degree not exceeding 6. (3) Two roots,  $r = 0$  and  $r = m$ ; it is shown  $1 \leq m \leq 5$ . If the algebraic conditions for polynomial solutions  $P_n(x)$  with  $0 \leq n \leq m$  are met, the existence of polynomial solutions for all  $n$  automatically follows, provided only that  $P_m(x)$  is not simply  $x^m$ . (4) Only slight changes are needed in results (2) and (3) if the assumption of a zero root for  $v$  is discarded.

W. W. Sawyer.

Lehmann, N. Joachim: Die asymptotische Verteilung der Eigenwerte bei natürlichen Eigenwertaufgaben. Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden 2, 373–380 (1953).

Als natürliche Eigenwertprobleme beschreiben E. Stiefel und H. Ziegler (dies. Zbl. 35, 344) Variationsprobleme  $\delta[(y|My) - \lambda(y|Ny)] = 0$  ( $y \in \mathfrak{B}$ ) mit Eigenwertparameter  $\lambda$  von folgender Art: Es sind  $m \geq n$  nicht-negative ganze Zahlen;  $\mathfrak{B}$  ist die Gesamtheit aller reellen Funktionen, die im Intervall  $a \leq x \leq b$   $m-1$  stetige und eine stückweise stetige  $m$ -te Ableitung besitzen und  $p$  ( $0 \leq p \leq 2m$ ) (unabhängigen) Randbedingungen  $\sum_{v=0}^{m-1} [\alpha_{\mu v} y^{(v)}(a) + \beta_{\mu v} y^{(v)}(b)] = 0$

genügen ( $\mu=1, 2, \dots, p$ ) ( $\alpha_{\mu v}, \beta_{\mu v}$  reelle Konstante); es ist  $(N|Mr) = \sum_{v=0}^m \int_a^b f_v(x) u^{(v)}(x) v^{(r)}(x) dx \pm$

$\chi'(u)|M\chi(v)$ ,  $(u|Nv) = \sum_{v=0}^n \int_a^b g_v(x) u^{(v)}(x) v^{(v)}(x) dx + \chi'(u)|N\chi(v)$ , dabei sind  $M, N$  reelle symmetrische  $(2m, 2m)$ -Matrizen,  $\chi'(y) = (y(a), y(b), y'(a), y'(b), \dots, y^{(m-1)}(a), y^{(m-1)}(b))$ ;  $f_v(x), g_v(x)$  sind in  $a \leq x \leq b$   $(v-1)$ -mal stetig differenzierbar, die  $v$ -te Ableitung ist zumin-



dest stückweise stetig, es ist  $f_m(x) > 0$ . — Verf. fordert zusätzlich:  $(y N y) > c \int_a^b y^2 dx$  ( $y \in \mathfrak{B}$ ,  $y \not\equiv 0$ ),  $c$  eine positive Konstante;  $g_n(x) > 0$  ( $x \in [a, b]$ );  $f_m(x)$  und  $g_n(x)$  sind  $(2m-1)$ -mal stetig differenzierbar, die  $2m$ -ten Ableitungen sind stückweise stetig. Er beweist das asymptotische

Gesetz für die Eigenwerte:  $\lambda_i = [i \pi \gamma]^{2(m-n)} \left(1 + O\left(\frac{1}{i}\right)\right)$  mit  $\gamma^{-1} = \int_a^b \frac{2^{(m-n)} \overline{g_n(x)}}{f_m(x)} dx$ . —

Der Beweis stützt sich neben der üblichen Variablentransformation allein auf das Courantsche Maximum-Minimum-Prinzip. F. W. Schöpfke.

**McEwen, W. H.:** Spectral theory and its application to differential eigenvalue problems. Amer. math. Monthly **60**, 223—233 (1953).

Nichts Neues: „the treatment will be descriptive and suggestive rather than rigorous; . . . may be of interest to . . . the study of this subject for the first time“. Leider werden auch einige Unklarheiten über den Begriff der Selbstadjungiertheit nahegelegt. F. W. Schöpfke.

**Sternberg, R. L. and H. Kaufman:** Applications of the theory of systems of differential equations to multiple non-uniform transmission lines. J. Math. Physics **31**, 244—252 (1953).

The behaviour of multiple transmission lines depends upon differential equations of the form  $u' = -Yv$ ,  $v' = -Zu$ , where  $u, v$  are vectors, and  $Y, Z$  are given symmetrical, complex, square matrices. All quantities are functions of  $x$ , the distance along the transmission line. It is shown how to obtain the general solution from a continuous symmetric matrix  $H$  satisfying the equation  $H' - HZH + Y = 0$ . It is also shown that, when the line is lossless, no nodes can occur if a purely imaginary solution  $H$  of this equation exists. W. W. Sawyer.

**Viswanatham, B.:** The existence of harmonic vibrations. Proc. Amer. math. Soc. **4**, 371—372 (1953).

A vector is called monotonic if each of its components is monotonic. It follows immediately that if a periodic system of differential equations admits a monotonic vector solution, there exists a harmonic vibration. J. L. Massera.

**Hartman, Philip and Aurel Wintner:** On the behavior of the solutions of real binary differential systems at singular points. Amer. J. Math. **75**, 117—126 (1953).

Gegeben sei das System  $x' = f(x, y)$ ;  $y' = g(x, y)$  bei den Voraussetzungen: 1.  $f, g$  stetig,  $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$ . 2.  $\Omega^*$  sei abgeschlossene, mit  $2\pi$  periodische Menge und enthalte kein Intervall, für  $\theta \in \Omega^*$  existiere  $\lim_{r \rightarrow 0^+} r^{-1} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = F(\theta)$ ,  $\lim_{r \rightarrow 0^+} r^{-1} g(r \cos \theta, r \sin \theta) = G(\theta)$  und gleichmäßig für jedes zu  $\Omega^*$  punktfremde  $\theta$ -Intervall. 3. Für  $\theta \in \Omega^*$  gelte  $F^2 + G^2 > 0$ . 4. Die Menge  $\Omega^0$  der  $\theta$ -Werte, für die  $J(\theta) = G \cos \theta - F \sin \theta = 0$ , sei entweder leer oder habe keinen Häufungspunkt im Komplement von  $\Omega^*$ . Verff. betrachten Lösungen  $\Gamma(x(t), y(t))$ , die für  $t \rightarrow b$  ( $\leq \infty$ ) den Nullpunkt erreichen, und untersuchen, in welchem Fall (\*)  $\lim_{t \rightarrow b} \operatorname{tg} y/x = \theta_0$  existiert und wann zusätzlich (\*\*)  $\lim_{t \rightarrow b} \operatorname{arc} \operatorname{tg} y'/x' = \theta_0$  gilt. Es wird bewiesen: a) Existiert (\*),

so gilt  $\theta_0 \in \Omega^*$  oder  $\theta_0 \in \Omega^0$ . Im zweiten Falle besteht (\*\*). b) Existiert (\*) nicht, so ist  $\Gamma$  eine Spirale, und es gilt  $|\theta(t)| \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow b$ . c) Wechselt  $J(\theta)$  für  $\theta = \theta_0$  das Vorzeichen, so gibt es wenigstens eine Lösungskurve  $\Gamma$ , für die (\*) existiert. d) Nimmt  $J(\theta)$  positive und negative Werte an, so existiert für jedes  $\Gamma$  der Grenzwert (\*). — Bei der Anwendung auf Systeme der Gestalt  $x' = \alpha x + \beta y + f^*(x, y)$ ;  $y' = \gamma x + \delta y + g^*(x, y)$  mit  $f^* = o(r)$ ,  $g^* = o(r)$ ,  $f^*, g^*$  stetig, zeigen die Verff. u. a. im Falle verschiedener reeller Wurzeln der nicht-ausgearteten Matrix  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  den Satz: Jede den Nullpunkt erreichende Lösung besitzt daselbst eine Tangente, und diese ist die Grenzlage von Tangenten. Weiter tangiert jede solche Lösungskurve eine solche des linearen Systems und umgekehrt. — Zum Schluß wird ein hinreichendes Kriterium dafür angegeben, daß keine Lösung des allgemeinen Systems  $x' = f(t, x)$  ( $x, f$   $n$ -reihige Vektoren) den Nullpunkt erreicht: Es soll eine Funktion  $\Phi(s)$  existieren, so daß  $\int_0^s ds |\Phi(s)| < \infty$  und  $|x \cdot f(t, x)| \geq \Phi(x \cdot x) > 0$  gilt (der Punkt bedeutet Skalarmultiplikation). Joachim Nitsche.

**Hartman, Philip and Aurel Wintner:** Linear differential and difference equations with monotone solutions. Amer. J. Math. **75**, 731—743 (1953).

Sei  $A(t)$  eine  $(n, n)$ -Matrix von für  $0 < t < \infty$  stetigen, nicht-negativen Funktionen. Dann besitzt das Differentialgleichungssystem  $x' = -A(t)x$ ,  $x = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ , zumindest eine nicht-triviale Lösung mit  $x_i(t) \geq 0$ ,  $-x_i'(t) \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $0 < t < \infty$ ). Für diesen Hauptsatz wird ein eleganter Beweis gegeben. Als Folgerungen werden hergeleitet zunächst ein Satz über die Existenz total-monotoner Lösungen  $x_i(t)$  für den Fall, daß die Elemente von  $A(t)$  total-monoton sind, und weiter entsprechende Sätze für lineare Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung. — Für alle diese Sätze werden schließlich auch die Analoga bezüglich linearer Differenzengleichungen bewiesen. — Auf diese Weise werden frühere Resultate von A. Kneser, P. Hartman und A. Wintner verallgemeinert und dabei in den Beweisen vereinfacht. *F. W. Schäfke.*

**Wouk, Arthur:** Difference equations and  $J$ -matrices. Duke math. J. **20**, 141—159 (1953).

Für Jacobimatrizen der Form  $J = (j_{ik})$ ;  $j_{ik} = 0$ ,  $i - k > 1$ ;  $j_{i, i-1} = j_{i+1, i} > 0$  kann das Eigenwertproblem  $Jx + \lambda x = 0$  in der Form  $A(p_n, 1)x_n = (q_n + \lambda)x_{n-1} = 0$ ,  $(j_{11} + \lambda)x_1 + j_{12}x_2 = 0$  geschrieben werden mit  $p_n = j_{n, n-1}$ ,  $q_n = j_{n+1, n} + j_{n, n+1} + j_{n+1, n+2}$ ,  $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ . Verf. nutzt die Analogie dieser Differenzenschreibweise zu den singulären Sturm-Liouvilleschen Eigenwertproblemen aus zur Entwicklung einer entsprechenden Spektraltheorie für diese Matrizen. Die bekannten Kriterien von Weyl, Levinson, Hartman-Wintner für das Vorliegen des Grenzpunktfalles liefern analoge Kriterien für die Selbstadjungiertheit der Jacobimatrix. Unter Benützung des Zusammenhangs zwischen Kettenbrüchen und Jacobimatrizen wird die Konvergenz der Abschnittsspektren gegen das Spektrum von  $J$  untersucht. Sind  $j_{i, i}$  und  $j_{i, i+1}$  periodisch, so ergibt sich die Existenz von Stabilitätsintervallen mit Eigenschaften entsprechend denen bei Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten. Es folgt eine Anwendung der Theorie zur Herleitung bekannter Resultate über die Mathiesche Differentialgleichung. *H. O. Cordes.*

**Crandall, Stephen H.:** On a stability criterion for partial difference equations. J. Math. Physics **32**, 80—81 (1953).

Vor einiger Zeit haben O'Brien, Hyman und Kaplan (dies. Zbl. **42**, 132) einen Vorschlag zur Ausdehnung des auf von Neumann zurückgehenden Verfahrens zur Untersuchung der Stabilität linearer partieller Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten auf nichtlineare Gleichungen und solche mit variablen Koeffizienten gemacht. Sie haben zwar die heuristische Natur ihres Verfahrens zugegeben, aber behauptet, daß es in der Praxis gute Resultate liefere. Verf. zeigt in der vorliegenden Note, daß es im allgemeinen nicht möglich ist, solche Stabilitätsuntersuchungen in der vorgeschlagenen Weise durchzuführen, indem er ein Beispiel einer linearen partiellen Differenzengleichung mit fast konstanten Koeffizienten angibt, deren Lösungen exponentiell anwachsen, obwohl von Neumanns Stabilitätskriterium in jedem Punkte erfüllt ist. Als Beispiel wird die der Differentialgleichung  $(1 - 2\varepsilon \cos 2t) \psi_{xx} = \psi_{tt}$  mit  $0 < \varepsilon < 1$  entsprechende Differenzengleichung gewählt. *F. Reutter.*

**Duffin, R. J.:** Discrete potential theory. Duke math. J. **20**, 233—252 (1953).

Die Funktion  $u(P)$  sei für die Punkte des  $R^3$  mit ganzen Koordinaten definiert. Der Differenzenoperator  $Du(P) = \sum_{n=1}^6 u(P_n) - 6u(P)$  ( $P_1, P_2, \dots, P_6$  = Nachbarpunkte zu  $P$ ) gibt Anlaß zu einer „diskreten“ Potentialtheorie. Für diese untersucht Verf. das asymptotische Verhalten der Fundamentallösung  $g(P)$  (Definition:  $Dg = -1$  im Ursprung,  $Dg = 0$  sonst,  $g \rightarrow 0$  für  $P \rightarrow \infty$ ) im Unendlichen. Ferner werden Analoga zum Gaußschen Mittelwertsatz und zur Harnackschen Ungleichung für positive harmonische Funktionen bewiesen. Als Korollar ergibt sich u. a. ein Satz von J. Capoulade (vgl. dies. Zbl. **5**, 17). — In einem Anhang wird das asymptotische Verhalten gewisser dreifacher Fourierintegrale diskutiert. *A. Huber.*



# Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Herbst, Robert Taylor: Reduction of differential systems to first order. Duke math. J. **20**, 481—487 (1953).

Si riducono certi sistemi passivi di equazioni differenziali a derivate parziali di ordine arbitrario a sistemi del primo ordine, nell'ipotesi che le funzioni considerate siano continue con tutte le loro derivate fino a quelle di un ordine sufficientemente alto.

*M. Cinquini-Cibrario.*

Birindelli, Carlo: Integrazione dei sistemi lineari ai differenziali totali illimitatamente integrabili in due variabili indipendenti in un prescritto campo più volte connesso. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis mat. natur., VIII. Ser. **14**, 386—390 (1953).

Sia dato il sistema ai differenziali totali

$$(1) \quad dx_s = \left[ g_s^{(1)}(t_1, t_2) + \sum_{k=1}^p x_k \varphi_s^{(1,k)}(t_1, t_2) \right] dt_1 + \left[ g_s^{(2)}(t_1, t_2) + \sum_{k=1}^p x_k \varphi_s^{(2,k)}(t_1, t_2) \right] dt_2$$

( $s = 1, 2, \dots, p$ ) dove  $(t_1, t_2)$  è un punto di un certo campo  $T$ ,  $g_s^{(i)}(t_1, t_2)$ ,  $\varphi_s^{(i,k)}(t_1, t_2)$  ( $i = 1, 2$ ;  $s, k = 1, 2, \dots, p$ ) sono funzioni definite in  $T$  e ivi continue colle loro derivate  $\partial g_s^{(1)}/\partial t_2$ ,  $\partial g_s^{(2)}/\partial t_1$ ,  $\partial \varphi_s^{(1,k)}/\partial t_2$ ,  $\partial \varphi_s^{(2,k)}/\partial t_1$  ( $s, k = 1, 2, \dots, p$ ). Inoltre il sistema sia illimitatamente integrabile in  $T$ , cioè valgano, identicamente in  $T$ , le condizioni

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial g_s^{(1)}}{\partial t_2} - \frac{\partial g_s^{(2)}}{\partial t_1} + \sum_{k=1}^p (\varphi_s^{(1,k)} g_k^{(2)} - \varphi_s^{(2,k)} g_k^{(1)}) &= 0, \\ \frac{\partial \varphi_s^{(1,l)}}{\partial t_2} - \frac{\partial \varphi_s^{(2,l)}}{\partial t_1} + \sum_{k=1}^p (\varphi_s^{(1,k)} \varphi_k^{(2,l)} - \varphi_s^{(2,k)} \varphi_k^{(1,l)}) &= 0 \quad (s, l = 1, 2, \dots, p). \end{aligned}$$

Per tale sistema vale il teorema di unicità, relativo alla condizione iniziale (3)  $x_s(t_1^{(0)}, t_2^{(0)}) = x_s^{(0)}$  ( $t_1^{(0)}, t_2^{(0)}$ ) in  $T$ . L'A. ha provato in un lavoro precedente (questo Zbl. **46**, 319) che, se  $T$  è semplicemente connesso, esiste una soluzione del sistema (1), che soddisfa la (3), e che tale soluzione è definita in tutto il campo  $T$ . Nella presente nota l'A. estende il risultato al caso in cui il campo  $T$  sia più volte connesso, ricercando le ulteriori condizioni necessarie e sufficienti, che, assieme alle (2), assicurano l'esistenza in  $T$  della soluzione del sistema (1). La ricerca delle soluzioni del sistema (1) in un campo  $(\nu + 1)$  volte connesso è ricondotta alla risoluzione di un sistema di  $\nu p$  equazioni lineari algebriche nelle  $p$  incognite  $x_s^{(0)}$  ( $s = 1, 2, \dots, p$ ), così che i valori iniziali non si possono scegliere ad arbitrio, se si vuole che la soluzione sia definita in tutto il campo  $T$ .

*M. Cinquini-Cibrario.*

Baiada, Emilio: Considerazioni sull'esistenza della soluzione per un'equazione alle derivate parziali, con i dati iniziali, nel campo reale. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **34**, 1—25 (1953).

Data l'equazione (1)  $p = f(x, q)$ , si dimostra il seguente teorema di esistenza: „Se  $f(x, q)$  è definita per  $x > c$ ,  $q$  qualunque, è continua rispetto a  $(x, q)$  e lipschitziana rispetto a  $q$ , con costante minore di  $1/2$ , se  $\omega(y)$  è definita per ogni  $y$ , continua con derivata continua e soddisfacente le

$$|\omega'(y)| \leq N; \quad |\omega'(y + h) - \omega'(y - h)| \leq |h| M(y),$$

dove  $N$  è una costante e  $M(y)$  una funzione definita per ogni  $y$  e sommabile in ogni intervallo finito, se inoltre  $|f(x, y)| \leq H$ , dove  $H$  è una costante, allora esiste in ogni campo rettangolare  $c \leq x \leq e$ ,  $a \leq y \leq b$ , una funzione  $z(x, y)$ , lipschitziana nel complesso delle variabili, che soddisfa quasi dappertutto l'equazione (1) e soddisfa identicamente la condizione iniziale  $z(c, y) = \omega(y)$  ( $a \leq y \leq b$ )“. L'A. conduce la dimostrazione sfruttando abilmente un proprio metodo originale, da lui introdotto nello studio di questioni dello stesso tipo [Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., II. Ser. **12**, 135—145 (1943)]. In qualche punto l'esposizione potrebbe essere più limpida; per quanto il Lemma del n. 8 dia adito a dubbi, ciò non infirma la validità del risultato.

*M. Cinquini-Cibrario.*

Krüger, Raymond M.: Basis theorems for partial differential equations. Duke math. J. **20**, 489—498 (1953).

Es sei  $x = (x_1, \dots, x_n)$  ein  $n$ -dimensionaler Vektor,  $U(x)$  eine skalare Funktion von  $x$ , von der gewisse partielle Ableitungen nach den  $x_v$  (z. B. alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung) existieren, es sei  $v$  der (etwa  $m$ -dimensionale) Vektor, dessen Komponenten  $U$  und die partiellen Ableitungen sind. Ist  $F(x, v)$  eine gegebene skalare Funktion, so ist (1)  $F(x, v) = 0$  eine partielle Differentialgleichung. Es wird u. a. die Frage behandelt: Wenn eine lineare Man-

nigfaltigkeit von Funktionen  $U(x)$  eine Gleichung (1) erfüllt, erfüllt diese Mannigfaltigkeit dann auch ein lineares homogenes System von Differentialgleichungen? Von den Ergebnissen seien zwei angeführt: Es sei  $\{U_\alpha(x)\}$  eine linear abgeschlossene Menge von Funktionen, die eine gegebene Gleichung (1) in jedem Punkt einer Menge  $M$  erfüllt. Dann gibt es  $m$   $m$ -dimensionale Vektoren  $a_1(x), \dots, a_m(x)$  mit folgenden Eigenschaften: (a) die  $a_i$  sind zueinander orthogonal auf  $M$  (einzelne können null sein); (b) jede Funktion  $U_\alpha(x)$  erfüllt das System (2)  $a_1 \cdot v = 0, \dots, a_m \cdot v = 0$  auf  $M$ ; (c) jede Funktion  $U(x)$ , die (2) in einem Punkt  $x \in M$  erfüllt, erfüllt in diesem Punkt auch (1). — Ist  $M$  überdies offen, sind die  $U_\alpha$  stetig auf  $M$  und ist  $F(x, v)$  stetig, so lassen sich die Eigenschaften der  $a_p$  folgendermaßen verschärfen: (a) die  $a_p(x)$  sind stetig auf  $M$ ; (c) liefert  $U(x)$  eine Funktion  $v(x)$ , die in einer Umgebung eines Punktes von  $M$  stetig ist, so erfüllt  $U$  die Gleichung (1) in dieser Umgebung. E. Kamke.

**Ingraham, Richard L.: The geometry of the linear partial differential equation of the second order.** Amer. J. Math. **75**, 91–698 (1953).

To every equation  $g^{rs} \partial_{rs} \varphi + d^r \partial_r \varphi = 0$  ( $\partial_r = \partial/\partial x^r$ ,  $r, s, \dots = 1, \dots, n$ ), with  $g^{rs}$  of rank  $n$ , there belongs, for  $n > 2$ , a unique Weyl geometry  $W$ , in which this equation can be written as  $\nabla_r (g^{rs} \partial_s \varphi) = 0$ . This geometry is defined by the coefficients of connection  $A_{pq}^r = C_{pq}^r - \frac{1}{2} (1 - 2/n) (A_p^r f_q + A_q^r f_p - g_{pq} f^r)$ , where  $C_{pq}^r$  are the Christoffel symbols belonging to  $g_{rs}$  ( $g_{rs} g^{st} = A_s^t$ ),  $A_p^p = \delta_p^p$  and  $f^r = (1 - 2/n)^{-1} (d^r - g^{rs} \partial_{rs} \varphi)$ ,  $f_s = g_{sr} f^r$ . The differential equation is self-adjoint if and only if the Weyl geometry is Riemannian, or  $\partial_{[s} f_{r]} = 0$ . — Two equations given by  $g_{pq}, f_r(x^p)$  and  $g'_{pq}, f'_r(x^{p'})$  are equivalent if and only if there exists a positive integer  $N$  such that a) the sets of equations

$$'g'_{p'q'} - \lambda g_{pq} A_{p'}^{p'} A_{q'}^{q'} = 0, \quad 'f'_{p'} - f_p A_{p'}^{p'} = 0, \quad (\partial_{p'} x^{p'} = A_{p'}^{p'}, \quad \partial_{p'} \log \lambda = A_{p'}^{p'})$$

and the first  $N$  sets of equations  $R'_{p'q'r'} A_{p'}^{p'} A_{q'}^{q'} A_{r'}^{r'} = R_{pqr} A_p^p A_q^q A_r^r$ , and these obtained from it by covariant differentiation, are compatible in the unknowns  $x^{p'}, \lambda, A_{p'}^{p'}, A_{q'}^{q'}, A_{r'}^{r'}$ , as functions of  $x^{p'}$  and b) all sets of solutions of these equations satisfy the  $(N+1)^{\text{th}}$  set of equations. From this theorem follows that the given equation is equivalent to the ordinary Laplace equation  $\partial^{rs} \partial_{rs} \varphi = 0$  ( $\partial^{rr} = \pm 1$ ,  $\partial^{rs} = 0$  if  $r \neq s$ ), if its intrinsic geometry is flat Riemannian. It is also shown how to derive from this theorem the condition that there exist plane-wave solutions, that is, solutions of the kind  $\varphi = F(\int k_s dx^s)$ , where  $\int$  is a line integral and  $k_s$  satisfies the conditions  $\nabla_r k_s = 0$ ,  $g^{rs} k_r k_s = 0$ . The case  $n = 2$  is special and is specially discussed, also in relation to previous work, e. g. E. Cotton, Ann. sci. École norm. Sup., III. Sér. **17**, 211–244 (1900). In this case  $F_r = -(d^r + g^{pq} \partial_{pq} \varphi) = 0$  is the necessary and sufficient condition that the given equation can be reduced to the ordinary Laplacian form. D. J. Struik.

**Hornich, Hans: Die Existenz von regulären Lösungen bei allgemeinen linearen partiellen Differentialgleichungen.** Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. **2**, 46–52 (1953).

Es handelt sich um die Differentialgleichung

$$\sum_i \left( \sum_h g_{i_1 \dots i_n}^{h_1 \dots h_n} x_1^{h_1} \dots x_n^{h_n} \right) \frac{\partial^{\ell_1 + \dots + \ell_n} u}{\partial x_1^{\ell_1} \dots \partial x_n^{\ell_n}} = \sum_i f_{i_1 \dots i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n},$$

wo die Summationsindizes von 0 bis  $\infty$  laufen, aber links die äußere Summe doch nur endlich viele Glieder hat. Integriert man durch den Ansatz  $u = \sum u_{i_1 \dots i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$ , so ergeben sich für die Koeffizienten  $u_{i_1 \dots i_n}$  Rekursionsformeln der Gestalt  $A_{i_1 \dots i_n} u_{j_1 \dots j_n} = f_{j_1 \dots j_n} + \sum \dots$ , wo unter dem Summenzeichen rechts nur solche  $u_{i_1 \dots i_n}$  kommen, die schon vorher gefunden sind. Wenn dabei ein  $A_{i_1 \dots i_n}$  verschwindet, so bedeutet das eine Bedingung für die  $f_{j_1 \dots j_n}$ , die erfüllt sein muß, damit ein reguläres Integral existiert. Aber auch, wenn kein  $A_{i_1 \dots i_n}$  verschwindet, so daß sich die  $u_{i_1 \dots i_n}$  widerspruchlos berechnen lassen, kann es sein, daß kein solches Integral existiert, nämlich dann, wenn unendlich viele  $A_{i_1 \dots i_n}$  so klein sind, daß  $|u_{j_1 \dots j_n}|$  groß genug wird, um die Konvergenz der Reihe zu verhindern, falls nicht die  $f_{j_1 \dots j_n}$  besonders starke Kleinheitsbedingungen erfüllen. Lehrreich ist in dieser Hinsicht das am Schluß vermerkte Beispiel  $x \sin x - y \sin y = f(x, y)$ , wenn  $x$  einer gewissen nicht abzählbaren Menge Liouvillescher Zahlen angehört. O. Perron.

**Hornich, Hans: Risolubilità di generali equazioni lineari a derivate parziali mediante serie di potenze.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **15**, 7–10 (1953).

Es handelt sich um dieselbe Differentialgleichung wie in der vorstehend besprochenen Arbeit, wobei aber rechts eine für  $|x_i| < \delta$  konvergente Laurentreihe steht (also auch negative  $j_i$ ). Verf. zeigt, daß dann dieselben Merkwürdigkeiten auftreten. Darüber hinaus findet er, daß, wenn die homogene Gleichung (also



$f_{j_1, \dots, j_n} = 0$ ) etwa eine nicht identisch verschwindende Laurentreihe  $u$  als Lösung zuläßt, diese notwendig unendlich viele Glieder mit negativen Exponenten hat.

O. Perron.

Cinquini-Cibrario, Maria: Un teorema fondamentale per la teoria delle caratteristiche di equazioni non lineari di ordine  $n$  di tipo iperbolico. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 52—56 (1953).

Verf. bemerkt, daß man die Lösung eines gemischten Problems einer allgemeinen nichtlinearen hyperbolischen Differentialgleichung beliebig hoher Ordnung in der Ebene aus den entsprechenden Sätzen über quasilineare Systeme erster Ordnung folgern kann. Ein allgemeiner Hinweis dieser Art findet sich auch in den Untersuchungen des Ref., dies. Zbl. 41, 425.

H. Beckert.

Szarski, J. et T. Ważewski: Sur une méthode de comparaison des équations hyperboliques aux dérivées partielles du second ordre avec les équations différentielles ordinaires. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 1, 6—10 (1953).

Für eine lineare partielle Differentialgleichung vom normalen hyperbolischen Typ

$$(A) \quad -u_{tt} + \sum_{i,k=1}^m a_{ik}(x,t) u_{x_i x_k} + \sum_{i=1}^{m+1} b_i(x,t) u_{x_i} + c(x,t) u = f(x,t); \quad (t = x_{m+1})$$

wird eine Differentialgleichung gewonnen mit Hilfe von Energieintegralumformungen, wie man sie ähnlich bei Eindeutigkeitsbeweisen benutzt (vgl. etwa Courant-Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, Bd. 2, Berlin 1937, S. 310, dies. Zbl. 17, 397. Der hierbei verwendete Kunstgriff pflegt Zaremba zugeschrieben zu werden. Er findet sich jedoch schon bei Hadamard, Bull. Soc. math. France 28 (1900), insbes. S. 12 und hat dort auch besonders nahe Beziehung zur vorliegenden Note. — Anm. d. Ref.), und anschließenden Grenzübergang. Sie lautet (B)  $dE/dt \leq k(t)E + g(t)$ . Dabei ist  $E(t) = \iint (\sum a_{ik} u_{x_i} u_{x_k} + u_t^2 + u^2) dx_1 \dots dx_m$  gesetzt und das Integral erstreckt über ein gewisses Gebiet einer aus der Hyperflächen-Schar  $t = \text{const}$ , das etwa durch eine passend gewählte schlauchförmige Hyperfläche aus der Schar  $t = \text{const}$  ausgeschnitten wird. In der Ungleichung (B) ist  $k > 0$  und nicht abhängig von der speziellen Wahl der Lösung  $u$  von (A). Ferner ist  $g(t) \geq 0$ . Aus (B) werden dann Schlüsse gezogen über Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten, die gegenüber dem bisher Bekannten [Friedrichs und Lewy, Math. Ann. 98, 192—204 (1927), sowie dies. Zbl. 4, 350] eine interessante Variante und teilweise Vereinfachung darstellen. — In (B) kann  $dE/dt$  durch „le nombre dérivé supérieure“ von Ważewski ersetzt werden. K. Stellmacher.

Germain, P. et R. Bader: Solutions élémentaires de certaines équations aux dérivées partielles du type mixte. Bull. Soc. math. France 81, 145—174 (1953).

Gli Aa. considerano l'equazione di Tricomi generalizzata (1)  $k(z) u_{xx} + u_{zz} = 0$  essendo  $k(z)$  una funzione definita in un intervallo dell'asse reale  $z$ , contenente nell'interno il punto  $z = 0$ , la quale ha lo stesso segno di  $z$ , ed è rappresentabile nell'intorno di  $z = 0$  al modo seguente:  $k(z) = C_0 z + C_1 z^2 + C_2 z^3$ , con  $C_0$  e  $C_1$  costanti positive e  $C_2$  funzione continua di  $z$ . La Memoria ha come oggetto l'estensione alla (1) di risultati ottenuti dagli Aa. nel caso  $k(z) \equiv z$  (equazione di Tricomi) [P. Germain-R. Bader: Publ. O. N. E. R. A., Nr. 54 (1952)]. Detti  $A$  e  $B$  due punti dell'asse  $z = 0$  e  $P$  un punto del semipiano iperbolico ( $z < 0$ ) intersezione di due linee caratteristiche della (1) uscenti da  $A$  e  $B$ , gli Aa. costruiscono la funzione di Riemann nel triangolo  $PAB$  limitato dal segmento  $AB$  e dalle due dette caratteristiche. Essi prolungano tale funzione nel semipiano ellittico ( $z > 0$ ), ottenendo così una funzione, che è soluzione fondamentale (elementare secondo la locuzione in uso in Francia) in detto semipiano della (1). Nel caso  $k(z) = z$  tale soluzione può prolungarsi nel piano iperbolico, attraverso le semirette uscenti da  $A$  e  $B$  e non contenenti  $AB$ , in tutte due le regioni di detto semipiano limitate da tale semirette e dalle caratteristiche uscenti da  $A$  e  $B$  e non passanti per  $P$ . Ciò non è più vero nel caso generale, come gli Aa. dimostrano considerando l'esempio costituito dall'equazione  $(1 - e^{-2z}) u_{xx} + u_{zz} = 0$ . Successivamente gli Aa. generalizzano al caso della (1) le soluzioni elementari date da Weinstein [questo Zbl. 38, 262 e „On generalized potential theory and the equations of Darboux-Tricomi“, Bull. Amer. Soc. math. 55 (1949)] per l'equazione di Tricomi. Oltre a queste, vengono anche introdotte altre soluzioni che gli Aa. chiamano „orientate“ dipendendo esse essenzialmente, a differenza delle altre considerate, dallo orientamento dell'asse  $x$ .

G. Fichera.

Bureau, Florent: Problème de Cauchy et problème aux limites pour les équations linéaires aux dérivées partielles totalement hyperboliques. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 24—29 (1953).

Für die Differentialgleichung  $u_{tt}(x,t) - L(u) = 0$ ;  $L(u) \equiv u_{xx} + a(x)u$  wird die Lösung des gemischten Rand-Anfangswertproblems  $u(x,0) = 0$ ,

$u_t(x, 0) = q(x)$ ;  $u(0, t) = u(l, t) = 0$  in der üblichen Weise durch Entwicklung nach Eigenfunktionen hingeschrieben. Aus der Bemerkung, daß diese Lösung für einen Teilbereich ihres Definitionsgebietes mit der Riemannschen Lösungsformel des Cauchy'schen Anfangswertproblems für jede Wahl der Funktion  $u_t(x, 0) = q(x)$  identisch sein muß, kann man eine Identität herleiten, die die Riemannsche Funktion der angegebenen Differentialgleichung, entwickelt nach Eigenfunktionen von  $L(v) + \lambda v = 0$ ,  $v(0) = v(l) = 0$ , liefert. Die angegebene Identität wird eingehend diskutiert.

K. Stellmacher.

**Hellwig, Günter: Anfangs- und Randwertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen von wechselndem Typus auf den Rändern.** Math. Z. 58, 337—357 (1953).

Verf. betrachtet die partielle Differentialgleichung

$$D[u] \equiv Bu + k(x) \{r_1 u_{yy} + r_2 u_y + r_3 u\} = k(x) f(x, y)$$

mit dem Operator  $Bu = -(p(x) u_x)_x + q(x) u$  für  $0 \leq y < \infty$ , falls, im Gegensatz zu der üblichen Voraussetzung (I), daß  $p$  und  $k$  im abgeschlossenen Intervall  $l \leq x \leq m$  positiv sind, dies nur für das offene Intervall  $l < x < m$  vorausgesetzt wird.  $x = l$  und  $x = m$  können dann parabolische Ränder sein, auf denen im Sinne von H. Weyl [Math. Ann. 68, 220—269 (1909)] entweder der Grenzpunktfall oder der Grenzkreisfall vorliegt. Verf. zeigt, daß im Grenzpunktfall keine — in näher präzisiertem Sinne — „zulässigen“ Randbedingungen gestellt werden können, und untersucht, in welchen Fällen die im Grenzkreisfall zulässigen Randbedingungen in die üblicherweise bei Vorliegen der Voraussetzung (I) gestellten übergehen. Ferner wird ein Existenztheorem für den Grenzpunktfall bewiesen unter Verallgemeinerung von Gedankengängen von W. Mächler (dies. Zbl. 6, 307). Entsprechende Existenzsätze für den Grenzkreisfall werden angekündigt.

M. J. De Schwarz.

**Kamynin, L. I.: Über die Anwendbarkeit der Differenzenmethode auf die Lösung der Wärmeleitungsgleichung. I: Die Eindeutigkeit der Lösung eines Systems von Differenzgleichungen. II.** Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 17, 163—180 und 249—268 (1953) [Russisch].

I.: La première partie du travail constitue le développement d'une note précédente de l'A. (ce Zbl. 46, 101). — II.: Dans le présent travail l'A. développe l'exposé des résultats concernant l'application de la méthode des différences finies à l'équation de la chaleur  $u''_{xx} = u'_t$ , qu'il a publiés antérieurement (ce Zbl. 47, 92). Certaines hypothèses sont moins restrictives que celles des théorèmes du travail précité.

M. Krzyżański.

**Pini, Bruno: Sui sistemi di equazioni lineari a derivate parziali del secondo ordine dei tipi ellittico e parabolico.** Rend. Sem. mat. Univ. Padova 22, 265—280 (1953).

Sia dato il sistema autoaggiunto di tipo ellittico

$$(1) \quad L[\bar{u}] = (\partial/\partial x) [A \bar{u}/\partial x + B \bar{u}/\partial y] + (\partial/\partial y) [B \bar{u}/\partial x + C \bar{u}/\partial y] - N \bar{u} = \bar{f},$$

dove  $A, B, C, N$  sono matrici assegnate simmetriche di ordine  $n$ , funzioni di  $x, y$ ,  $\bar{f}$  è un vettore assegnato a  $n$  componenti, funzione di  $x, y$ , e  $\bar{u}$  un vettore incognito a  $n$  componenti, e inoltre le matrici  $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$  e  $N$  sono definite positive. Per tale sistema si prova un teorema di unicità per un problema generalizzato di valori al contorno: in un dominio  $D$ , avente per contorno una curva semplice chiusa  $\gamma$ , esiste al più un vettore  $\bar{u}$ , che nei punti interni a  $D$  è soluzione della (1) e soddisfa la condizione  $\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\gamma(t)} \bar{u} - \bar{u}_0^2 d\sigma = 0$ , dove  $\bar{u}_0$  è un vettore assegnato nei punti di  $\gamma$ , e  $\gamma(t)$  è una curva che per  $t \rightarrow 0$  tende alla curva  $C$ . Un teorema di unicità per un conveniente problema generalizzato è dimostrato anche per un sistema di tipo parabolico, della forma

$$\partial/\partial x (A \bar{u}/\partial x + B \bar{u}/\partial y) + \partial/\partial y (B \bar{u}/\partial x + C \bar{u}/\partial y) - \partial u/\partial z - N \bar{u} = \bar{f},$$

dove  $A, B, C, N$  sono matrici simmetriche date di ordine  $n$ , funzioni di  $x, y, z$ ,  $\bar{f}$  è un vettore dato a  $n$  componenti, funzione di  $x, y, z$ , e  $\bar{u}$  un vettore incognito a  $n$  componenti.

M. Cinquini-Cibrario.



**Pini, Bruno:** Osservazioni sulle soluzioni dei sistemi di equazioni a derivate parziali lineari di tipo ellittico. *Rend. Sem. mat. Univ. Padova* **22**, 366—379 (1953).

Dato il sistema lineare autoaggiunto di tipo ellittico

$$(1) \quad (\partial/\partial x) (A \partial \bar{u}/\partial x + B \partial \bar{u}/\partial y) + (\partial/\partial y) (B \partial \bar{u}/\partial x + C \partial \bar{u}/\partial y) - N \bar{u} = 0,$$

dove  $A, B, C, N$  sono matrici date, simmetriche, di ordine  $n$ , funzioni di  $x$  e  $y$ , con  $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$  e  $N$  definite positive, e  $\bar{u}$  è il vettore incognito a  $n$  componenti, si prova che, sotto convenienti ipotesi di regolarità per i coefficienti e per la  $FD$ , valgono gli enunciati 1° assegnato ad arbitrio un vettore  $\bar{u}_0$  con la norma di quadrato sommabile su  $FD$ , esiste un unico vettore  $\bar{u}$ , che in  $D - FD$  è soluzione regolare del sistema (1), e assume in media i valori  $\bar{u}_0$  su un sistema di curve parallele a  $FD$  e approssimanti questa dall'interno di  $FD$ . 2° se  $\bar{u}_0$  è il limite in media (rispetto a tale sistema di curve) di un vettore con la norma di quadrato sommabile su  $D$ , e dotato dei vettori derivati continui in  $D - FD$ , e con la norma di quadrato sommabile su  $D$ , allora per quasi tutti i punti della  $FD$  la soluzione  $\bar{u}$  del sistema (1) converge ad  $\bar{u}_0$  sulla normale in tali punti alla  $FD$ .

*M. Cinqunini-Cibrario.*

**Tricomi, Francesco G.:** Un teorema di media per certe equazioni di tipo ellittico. *Rend. Sem. mat. Univ. Padova* **22**, 350—353 (1953).

Es bezeichne  $U(x, y; \xi, \eta)$  die unter bestimmten Voraussetzungen existierende Fundamentallösung der elliptischen Differentialgleichung

$$(1) \quad z_{xx} + z_{yy} + a(x, y) z_x + b(x, y) z_y + c(x, y) z = f(x, y)$$

in einem Gebiete  $D$ ; es gilt also  $\lim_{r \rightarrow 0} U/\log r = -1$ ,  $[r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]$ .

Ist dann  $\gamma$  eine den Punkt  $\xi, \eta$  umschließende geschlossene Niveaulinie  $U = C$ , so ergibt sich für eine in  $D$  reguläre Lösung von (1) die Integraldarstellung

$$2\pi z(\xi, \eta) = \oint_{\gamma} \frac{\partial U}{\partial n} z ds - C \iint_D (c - a_x - b_y) z dx dy + \iint_D (C - U) f dx dy.$$

*K. Maruhn.*

**Hartman, Philip and Aurel Wintner:** On elliptic Monge-Ampère equations. *Amer. J. Math.* **75**, 611—620 (1953).

Die Verff. zeigen: Ist  $f(x, y, z, p, q)$  eine in einem fünfdimensionalen Gebiet positive analytische Funktion ihrer Argumente und ist  $z = z(x, y)$  in einem Gebiet der  $(x, y)$ -Ebene eine Lösung der Klasse  $C^2$  der Gleichung  $rt - s^2 = f(x, y, z, p, q)$ , so ist  $z$  analytisch. Der Beweis gelingt nach Untersuchung der Differenzierbarkeits-eigenschaften der Lösungen von  $rt - s^2 = \Phi(x, y)$ . Die Methode hierzu ist stärker als die in den entsprechenden Untersuchungen von Pogorelov (dies. Zbl. 48, 405).

*K. Maruhn.*

**Jones, D. S.:** The Eigenvalues of  $\nabla^2 u + \lambda u = 0$  when the boundary conditions are given on semi-infinite domains. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **49**, 668—684 (1953).

Beweis einer Reihe von Sätzen über das Spektrum von  $\Delta u + \lambda u = 0$  in Gebieten  $T$ , die ähnlichen Charakter haben wie die bei F. Rellich (dies. Zbl. 35, 64) definierten Halbröhren, und unter der Randbedingung  $u = 0$ . Unter anderem werden Satz 1 aus Rellich (l. c.) und — unter etwas veränderten Voraussetzungen — Satz 2 aus Rellich (dies. Zbl. 28, 164) mit den dort gezogenen beiden Konsequenzen erneut bewiesen. Obere und untere Schranken für die Anzahl der Eigenwerte im unteren Teil des Spektrums werden angegeben. Ein Teil dieser Resultate wird in § 4 auf das Eigenwertproblem  $\Delta u - b u + \lambda u = 0$  in  $T$  unter der Randbedingung  $\partial u/\partial \nu + \sigma u = 0$  verallgemeinert. Die §§ 6 und 7 bringen Anwendungen auf die Theorie der Wellen auf unendlich ausgedehnten Oberflächen von Flüssigkeiten, insbesondere zur Frage der Existenz stehender Wellen mit endlicher Gesamtenergie, welche F. Ursell (dies. Zbl. 43, 407) „trapping modes“ nennt. *H. O. Cordes.*

**Komatu, Yûsaku:** Mixed boundary value problems. *J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I* **6**, 345—391 (1953).

Soit  $D$  un domaine plan borné par  $n$  contours  $C_1, \dots, C_n$ ,  $u(\zeta)$  une fonction harmonique dans  $D$  dont les valeurs frontières sur  $C = C_1 + \dots + C_n$  et celles

de la dérivée normale  $\partial u / \partial n$  sont intégrables sur  $C$  et  $g(\zeta, z)$ , où  $z$  est un point fixe de  $D$ , une fonction harmonique dans  $D - (z)$  jouissant des mêmes propriétés frontières et telle que la somme  $g(\zeta, z) + \log |\zeta - z|$  soit harmonique au point  $z$ . Partageons  $C = C_1 + \dots + C_n$  en un nombre fini des arcs  $I_1^1, \dots, I_n^1, I_1^2, \dots, I_q^2$  et soient  $U(\zeta)$  et  $V(\zeta)$  deux fonctions bornées intégrables dont  $U(\zeta)$  est définie sur  $I^1 = I_1^1 + \dots + I_p^1$  et  $V(\zeta)$  sur  $I^2 = I_1^2 + \dots + I_q^2$ . L'objet principal du travail est la construction de la fonction  $u(z)$  harmonique dans  $D$  satisfaisant sur  $C$  aux conditions  $u(\zeta) = U(\zeta)$  sur  $I^1$ ,  $\partial u / \partial n = V(\zeta)$  sur  $I^2$ . En partant de la formule

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_C \left[ u(\zeta) \frac{\partial g(\zeta, z)}{\partial n_\zeta} - g(\zeta, z) \frac{\partial u(\zeta)}{\partial n_\zeta} \right] ds_\zeta$$

l'A. construit convenablement la fonction  $g(\zeta, z)$ . La construction est appuyée sur la représentation conforme du domaine  $D$  sur un domaine canonique convenablement choisi.

*F. Leja.*

**Komatu, Yûsaku:** Integralformel betreffend Neumannsche Randwertaufgabe für einen Kreisring. Kodai math. Sem. Reports 2, 37—40 (1953).

Für den Einheitskreis als kanonisches einfach zusammenhängendes Grundgebiet werden zunächst die Lösungen der 1. und 2. Randwertaufgabe der Potentialtheorie in der Poissonschen und Neumannschen Integralform vorangestellt. Für einen konzentrischen Kreisring als zweifach zusammenhängendes Grundgebiet ist die Lösung der 1. Randwertaufgabe von Villat unter Benutzung der Weierstraßschen  $\zeta$ -Funktion gegeben worden. Um für dieses Grundgebiet auch die 2. Randwertaufgabe zu behandeln, bedient sich der Verf. nicht einer Greenschen Funktion im erweiterten Sinne, sondern der vom einfach zusammenhängenden Gebiet her bekannten Zurückführung auf die erste Randwertaufgabe. Dieses Verfahren wird heuristisch auf den Kreisring übertragen und so eine Integraldarstellung der Lösung mit der Weierstraßschen  $\log \sigma$ -Funktion gefunden. Abschließend wird die Eindeutigkeit der gewonnenen Lösung und mit Hilfe des Randverhaltens der Villatschen Lösung der 1. Randwertaufgabe die Erfüllung der Randbedingungen durch die Integralformel bewiesen.

*H. Bucerius.*

**Hitotumatu, Sin:** Note on the Dirichlet problem. Commentarii math. Univ. Sancti Pauli 2, 13—21 (1953).

La théorie du balayage selon H. Cartan (ce Zbl. 36, 70) conduit facilement à la représentation intégrale de la solution du problème de Dirichlet (relatif à  $\Delta u = 0$ ) pour un ensemble quelconque de  $R^n$ , avec donnée-frontière continue. C'est ce qui est explicité par l'A., qui ajoute quelques remarques sur le cas où la donnée-frontière est une mesure ou une distribution; mais le problème correspondant n'est posé que pour un domaine assez régulier, et n'est résolu que pour le cercle. Je signale d'ailleurs que les problèmes de Dirichlet et de Neumann pour un domaine régulier et une donnée-frontière qui est une mesure ont été posés et résolus par G. C. Evans et E. R. C. Miles (ce Zbl. 1, 277).

*J. Deny.*

**Brousse, Pierre:** Sur un problème de Dirichlet singulier. C. r. Acad. Sci., Paris 236, 1731—1732 (1953).

Soit  $D$  un domaine du plan  $xOy$  simplement connexe dont la frontière contient un segment  $AB$  de  $Ox$  et une courbe  $C$  située dans le demi-plan  $y > 0$ . Pour chaque fonction continue définie sur  $AB + C$  le problème de Dirichlet relatif au  $D$  et à l'équation  $\Delta v(x, y) - k y^{-1} \partial v(x, y) / \partial y = 0$ , ( $k = \text{const} > 0$ ) a une solution et une seule. Mais, par contre, le problème de Dirichlet relatif au  $D$  et à l'équation  $\Delta s(x, y) + (k + 2) \partial s y^{-1}(x, y) / \partial y = 0$ , déduit de la précédente par la transformation  $v(x, y) = y^{k+1} \cdot s(x, y)$ , n'a pas en général de solution. On considère aussi le cas des données discontinues sur  $AB + C$ .

*J. Górski.*



Schultz-Grunow, F.: Zu  $\Delta u$  gehörende Greensche Funktionen. Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden **2**, 433—435 (1953).

Die Greenschen Funktionen in der Darstellung  $\varrho^2 \ln \varrho + \sum F_m(\xi_0, \eta_0, \xi, \eta)$  ( $\varrho^2 = (\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2$ ), wobei die  $F_m$  weiter durch harmonische Funktionen gegeben sind, werden in der Umgebung einer Ecke mit Hilfe der Schwarz-Christoffel'schen Formel untersucht, und es wird eine numerische Rechnung angeführt.

H. Hornich.

Dinghas, Alexandre: Sur quelques théorèmes concernant la convexité des moyennes d'une classe des fonctions sousharmoniques. C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 594—595 (1953).

Die Funktion  $u = u(P)$  eines Punktes  $P(x_1, \dots, x_n)$  des Halbraumes  $H^n = E(x_1 > 0)$  genüge folgenden Bedingungen: 1°  $\lim_{P \rightarrow Q} u(P) \leq 0, Q \in E(x_1 = 0)$ .

2°  $u$  ist in der Umgebung jedes Punktes der Menge  $E_1 = E(u \geq 0)$  zweimal differenzierbar und genügt der Ungleichung  $\Delta u \geq c u$ , wo  $\Delta u$  der Laplacesche Ausdruck und  $c$  eine stetige nichtnegative Funktion in  $H^n$  ist. 3°  $E_1$  ist nicht leer. Sei  $S_r$  die Fläche  $x_1^2 + \dots + x_n^2 = r^2$  ( $x_1 > 0$ ),  $E_r = E \cap S_r$ ,  $x_1 = r \cos \varphi$ ,

$\psi(P) = u(P) \cos \varphi$ ,  $m_k(r) = \left\{ \int_{E_r} \psi^2(P) \cos^2 \varphi d\omega \right\}^{1/k}$  ( $k \geq 1$ ). Verf. gibt ohne

Beweise u. a. folgende Sätze:  $m_k(r) r^{n-2}$  bzw.  $m_k^{1/2}(r)/r$  ist eine konvexe Funktion von  $r^n$  bzw.  $1/r^n$ . Ist  $M_1(r) = \max \psi(P)$  auf  $S_r$ , so ist  $M_1^2(r) r^{n-2}$  eine konvexe Funktion von  $r^n$ .

V. Paatero.

Dinghas, Alexandre: Sur la croissance de certaines classes de fonctions sousharmoniques bornées sur des multiplicités données. C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 690—691 (1953).

Soit  $u(P)$  une fonction réelle et uniforme dans  $R^n$ , deux fois différentiable en tout point où  $u \geq 0$ , vérifiant en tout point de l'ensemble  $E$  où  $u > 0$  l'inégalité  $\Delta u \leq c u$  où  $c$  est une fonction continue non négative. Dans l'hypothèse où  $E$  est formé au moins de  $m$  domaines s'étendant à l'infini, l'A. indique sans démonstration une borne inférieure de l'ordre  $\varrho = \lim (\log M(r)/\log r)$  de la fonction  $u(P)$ .

J. Dufresnoy.

Manacorda, Tristano: Sulle discontinuità delle derivate del potenziale di doppio strato. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. **2**, 516—525 (1953).

Nach dem von Burgatti eingeführten Verfahren der vektoriellen Homographie werden für die Unstetigkeiten der partiellen Ableitungen dritter Ordnung das Potentials einer Doppelbelegung explizite Ausdrücke aufgestellt. Sonderfälle, wie das Auftreten von Unstetigkeitslinien der Belegungsdichte, werden eingehender berücksichtigt.

V. Garten.

Tsuji, Masatsugu: On the capacity of general Cantor sets. J. math. Soc. Japan **5**, 235—252 (1953).

Verf. untersucht folgendermaßen definierte allgemeine lineare Cantorsche Mengen. Seien  $I$  ein Intervall der  $x$ -Achse,  $A_{i_1}$  ( $i_1 = 1, 2, \dots, k$ )  $k$  punktfremde Intervalle in  $I$ ,  $A_{i_1, i_2}$  ( $i_2 = 1, 2, \dots, k$ )  $k$  punktfremde Intervalle in  $A_{i_1}$  usw. Nach  $n$  Schritten gibt es  $k^n$  Intervalle  $A_{i_1 \dots i_n}$  ( $i_1, \dots, i_n = 1, 2, \dots, k$ ),  $A_{i_1 \dots i_n} \subset A_{i_1 \dots i_{n-1}}$ . Es wird vorausgesetzt, daß zwei Konstanten  $a > 0$  und  $b > 0$  existieren, derart daß für  $n = 1, 2, \dots$   $|A_{i_1 \dots i_{n-1} \mu}| \geq a |A_{i_1 \dots i_{n-1}}|$  ( $\mu = 1, 2, \dots, k$ ) und daß der Abstand der Intervalle  $A_{i_1 \dots i_{n-1} \mu}$  und  $A_{i_1 \dots i_{n-1} \nu}$  ( $\mu, \nu = 1, 2, \dots, k$ ,  $\mu \neq \nu$ )

$\geq b |A_{i_1 \dots i_{n-1}}|$  ist. Die Menge  $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^k A_{i_1 \dots i_n} \right)$  wird dann als eine allgemeine lineare

Cantorsche Menge bezeichnet. Sei  $m(E)$  das lineare Maß und  $\gamma(E)$  die logarithmische Kapazität von  $E$ . Es ist  $m(E) = 0$ ,  $\gamma(E) \geq a^{1/(k-1)} b |A| > 0$ . In jedem Punkt von  $E$  ist die obere Dichte der Kapazität positiv, so daß jeder Punkt von  $E$  ein regulärer Punkt für das Dirichletsche Problem ist. Wenn speziell  $k = 2$ ,  $a = 1/2 p$ ,  $b = 1 - 1/p$ , so wird  $\gamma(E) \geq 1/2 p - 1/2 p^2 > 0$ , welche Abschätzung für gewöhnliche Cantorsche Mengen bekannt ist (R. Nevanlinna, Eindeutige analytische Funktionen, Berlin 1936; dies. Zbl. **14**, 163). — Die Resultate werden für die Ebene und den Raum verallgemeinert.

V. Paatero.

## Variationsrechnung:

**Lepage, Th. H.:** Sur certains opérateurs différentiels. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **39**, 143—155 (1953).

Gestützt auf den Begriff einer „differentiellen“ Differentialform [P. Gillis, Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **29**, 175—186 (1943)] und Gebrauchmachend von früheren Ergebnissen des Verf. (dies. Zbl. **47**, 19) werden einige mit einer festen quadratischen Differentialform  $F = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dp_i$  verknüpfte Differentialoperationen definiert und zur Ermittlung der ersten und zweiten Variationen des Integrals  $\int L(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}; \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}) dx_1, \dots, dx_n$  verwendet. R. W. Weitzenböck.

**Sloovere, H. de:** Le calcul des variations successives d'une intégrale multiple, par la méthode invariante de Th. de Donder. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **39**, 474—480 (1953).

Es werden in rekurrenter Weise auf Grund der de Donderschen Theorie die ersten drei Variationen des Integrals:

$$I_n = \int_{(n)} F(x^i, y^x(x^i), \frac{\partial y^x}{\partial x^i}) dx^1, \dots, dx^n \quad (i, j = 1, 2, \dots, n, \quad x = 1, 2, \dots, m)$$

explizit berechnet.

H. Beckert.

**Velte, Waldemar:** Bemerkung zu einer Arbeit von H. Rund. Arch. der Math. **4**, 343—345 (1953).

In his theory of parametric problems in the Calculus of Variations Carathéodory assigns a family of Hamiltonian functions to each given problem (cf. Carathéodory, Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, Leipzig 1935, p. 218, this Zbl. **11**, 356). Thus the Hamiltonian function is no longer uniquely determined but is defined, instead by three properties. In applications to general dynamical systems it seemed however desirable to the reviewer to assign a single Hamiltonian to each Lagrangian [Rund, Arch. der Math. **3**, 209—215 (1952)]. The former is obtained geometrically by means of the distance function of a Minkowskian space which is dual to that defined by the Lagrangian. In this paper under consideration the author derives the same Hamiltonian analytically by means of a Legendre transformation. Furthermore, by introducing a primarily arbitrary factor into this Legendre transformation, thus modifying the latter, the author shows how additional functions may be obtained similarly. These are Hamiltonians in the sense that they satisfy the three conditions stipulated by Carathéodory. Finally it is shown that this modified Legendre transformation will yield all such Hamiltonian functions. H. Rund.

**Darbo, Gabriele:** L'estremo assoluto per gli integrali su intervallo infinito. Rend. Sem. mat. Univ. Padova **22**, 399—416 (1953).

Sia  $f(x, y, y')$  una funzione continua per ogni  $(x, y)$  del campo  $A$  per ogni valore finito di  $y'$  e si considerino le curve  $C^{(a, \infty)}$ :  $y = y(x)$ , ( $a \leq x < +\infty$ ), per le quali: 1° ogni punto  $(x, y(x))$  appartiene al campo  $A$ ; 2° su ogni intervallo  $(a, b)$ , con  $a < b < +\infty$  la funzione  $y(x)$  è assolutamente continua e la funzione  $f(x, y(x), y'(x))$  è integrabile (secondo Lebesgue); 3° esiste

finito l'integrale generalizzato  $I_{C^{(a, \infty)}} = \int_a^{+\infty} f(x, y(x), y'(x)) dx$ . La teoria degli integrali  $I_{C^{(a, \infty)}}$

è stata impostata da S. Cinquini (questo Zbl. **24**, 44; **26**, 409), il quale ha rilevato alcune proprietà; e l'A. avrebbe dovuto citare i numerosi risultati raggiunti da S. Faedo [questo Zbl. **25**, 331; **27**, 406; **28**, 68, 69; **41**, 68. Comment. Pontif. Acad. Sci. **8**, 319—421 (1944)]. Dei risultati raggiunti nel lavoro in esame riportiamo il seguente: Il campo  $A$  sia normale, tale cioè che, se contiene un punto  $(x_0, y_0)$ , ad esso appartengono tutti i punti  $(x, y_0)$  con  $x \geq x_0$ ; sia  $I_{C^{(a, \infty)}}$  un integrale quasi regolare positivo; e si supponga che: a) esista una funzione  $\Phi(x, y')$  definita e continua per  $0 \leq x < +\infty$ ,  $-\infty < y' < +\infty$ , con  $\lim_{y' \rightarrow +\infty} \Phi(x, y') = +\infty$ , in modo

che, per ogni  $(x, y)$  di  $A$  e per ogni  $y'$ , sia  $f(x, y, y') \geq \Phi(x, y')$ ; b) esistano una funzione  $\eta(x)$  integrabile in senso generalizzato in  $(0, +\infty)$ , e una funzione  $Q(x, y)$  continua, assieme a  $\epsilon Q \frac{\partial x}{\partial x}$ , nel campo  $A$ , con  $\int_A \epsilon Q \frac{\partial x}{\partial x} dx dy < +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} Q(x, y) = 0$  per quasi tutti gli  $y$ , in modo



che in ogni punto  $(x, y)$  di  $A$  e per ogni  $y'$  sia  $f(x, y, y') \geq Q(x, y) y' + \psi(x)$ . Sotto queste ipotesi in ogni classe completa di curve ordinarie, per le quali il punto iniziale sia fisso (o appartenga a un campo limitato) esiste il minimo assoluto di  $I_{C(+\infty)}$ . *S. Cinquini.*

**Transue, William:** Relazioni fra teoremi di esistenza del minimo in campi illimitati. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **34**, 411—419 (1953).

Sia  $f(x, y, y', \dots, y^{(n)})$  una funzione definita per ogni  $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  appartenente a un campo illimitato e per ogni valore finito di  $y^{(n)}$  e si consideri la classe delle funzioni  $y(x)$  assolutamente continue insieme con le loro derivate dei primi  $n-1$  ordini e per le quali esiste finito l'integrale

$$I_{C[n]}^{[n]} = \int_{C[n]} f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) dx.$$

Nel lavoro in esame l'A. effettua un profondo studio comparativo tra i numerosi teoremi di esistenza dell'estremo assoluto dell'integrale  $I_{C[n]}^{[n]}$  stabiliti da S. Cinquini (questo Zbl. **15**, 28; **17**, 266; **20**, 135), e, tenendo presente anche qualche proprio recente risultato [Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. **85**, 333—336 (1952)], stabilisce le relazioni di dipendenza e indipendenza che sussistono tra i vari teoremi; alcune di queste relazioni, veramente interessanti, vengono messe in luce mediante acuti esempi. *S. Cinquini.*

**Stampacchia, Guido:** Sopra una classe di funzioni in  $n$  variabili e su alcune questioni di calcolo delle variazioni. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. **2**, 232—238 (1953).

La presente Nota espone, riassumendoli, alcuni risultati ottenuti, in recenti lavori, dall'A. Il risultato di maggior interesse è il seguente. Sia  $B$  una classe di funzioni definite in un dominio  $T$ , dello spazio cartesiano  $S_n$ , avente frontiera di classe 2. Le funzioni di  $B$  siano tutte quelle che verificano le seguenti condizioni;  $\alpha$ ) la  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  e le  $\partial u / \partial x_i$  sono assolutamente continue rispetto a  $x_j$  per quasi tutti i punti  $(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$  di  $S_{n-1}^{(j)}$ ;  $\beta$ ) dato ad arbitrio  $\varepsilon > 0$  esiste un  $I_\varepsilon \subset T$  tale che  $u$  è continua in  $T - I_\varepsilon$ , riuscendo di misura minore di  $\varepsilon$  ciascuna proiezione di  $I_\varepsilon$  su ogni  $S_{n-2}$  coordinato;  $\gamma$ ) le derivate seconde  $\partial^2 u / \partial x_i \partial x_k$  sono di quadrato sommabile in  $T$ . Per le funzioni di  $B$ , estendendo un lemma dovuto al recensore (questo Zbl. **41**, 67), l'A. dimostra che esistono i limiti:

$$(1) \quad \lim_{P \rightarrow M} u(P) = \lambda(M), \quad \lim_{P \rightarrow M} du/dn = \mu(M)$$

per quasi tutti i punti  $M$  della frontiera  $FT$  di  $T$  quando  $P \rightarrow M$  sulla normale  $n$  a  $FT$  in  $M$  e riuscendo  $\lambda$  e  $\mu$  di quadrato sommabile su  $FT$ . Sia  $B_0$  la sottoclasse di  $B$  delle funzioni verificanti le (1) con  $\lambda$  e  $\mu$  assegnate. Si consideri in  $B_0$  il funzionale  $H(u) = \int_T f(x, u, \Delta_2 u) dx$ . Se

$H(u)$  è quasi regolare positivo e verifica la disuguaglianza  $f(x, u, w) \geq m w^2 + m_1$ , con  $m_1 > 0$ , esiste il minimo di  $H(u)$  in  $B_0$ . La  $f$  verifichi anche le disuguaglianze

$$f(x, u, w) \leq M w^2 + \varphi(x), \quad |f_w(x, u, w)| \leq M w^2 + \varphi(x), \quad |f_u(x, u, w)| \leq M |w| + \varphi(x)$$

con  $M \geq 0$  e  $\varphi(x)$  di quadrato sommabile in  $T$ . La  $u_0(x)$  minimante  $H(u)$  in  $B_0$  è quasi ovunque soluzione in  $T - FT$  dell'equazione di Eulero relativa al funzionale  $H(u)$ . *G. Fichera.*

### Integralgleichungen. Integraltransformationen:

**Pirl, Udo:** Positive Lösungen einer nichtlinearen Integralgleichung. Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, math.-naturw. Kl. **100**, Heft 8, 44 S. (1953).

Im Anschluß an eine Arbeit des Ref. (dies. Zbl. **47**, 101) werden positive stetige Lösungen der Integralgleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) y^n(s) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = n} \int_a^b \dots \int_a^b K_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(s, t_1, \dots, t_n) y^{\alpha_1}(t_1) \dots y^{\alpha_n}(t_n) dt_1 \dots dt_n = f(s)$$

untersucht. Dabei wird vor allem das vom Ref. angegebene Iterationsverfahren von dem algebraischen auf den hier vorliegenden Fall übertragen. Durch ein Beispiel wird gezeigt, daß das Verfahren unter gewissen Umständen versagen kann [vgl.

Ref., Math. Nachr. 10, 247–255 (1953)], und es wird ein hinreichendes Kriterium für die Zulässigkeit angegeben. Neben dieses die positive Lösung von oben her approximierende Iterationsverfahren wird ein entsprechendes, von unten her gegen die Lösung konvergierendes Iterationsverfahren gestellt, so daß im Falle der Eindeutigkeit eine Eingabelung der gesuchten positiven Lösung möglich ist. Ein sehr konstruktiver Einzelfall, bei dem alle Schritte der beiden Iterationsverfahren explizit durchführbar sind, wird angegeben. Treten zu den Integralgliedern noch Potenzen  $y^{\alpha}(s)$  multiplikativ hinzu, so kann es vorkommen, daß das Iterationsverfahren eine unstetige positive Lösung liefert, wofür wiederum ein Beispiel vorgelegt wird, bei dem es keine stetige positive Lösung geben kann. Ein hinreichendes Kriterium für die Existenz einer positiven stetigen Lösung wird abgeleitet. W. Schmeidler.

**Salam, Abdus:** Fredholm solutions of partial integral equations. Proc. Cambridge philos. Soc. 49, 213–217 (1953).

Ausgehend von der in der Quantentheorie der Felder auftretenden „partiellen“ Integralgleichung (1)  $F(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) + \lambda \int K(x_1, x_2; y) [F(x_1, y) - F(y, x_2)] dy$ , wo  $f(x_1, x_2) = f(x_2, x_1)$ ,  $K(x_1, x_2; y) = K(x_2, x_1; y)$  ist und eine symmetrische Lösung  $F(x_1, x_2)$  gesucht wird, betrachtet Verf. die allgemeinere Gleichung (2)  $F(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) - \lambda_1 \int K_1(x_1, x_2; y) F(y_1, x_2) dy_1 + \lambda_2 \int K_2(x_1, x_2; y_2) F(x_1, y_2) dy_2$ . Dabei brauchen  $f$ ,  $K_1$  und  $K_2$  nicht symmetrisch zu sein; der Einfachheit halber werde angenommen, daß  $a \leq x_1, x_2, y_1, y_2 \leq b$  gilt und  $K_1, K_2$  stetige Funktionen ihrer Argumente sind. Werden die „partiellen“ Integraloperatoren  $K_1 F = \int K_1(x_1, x_2; y_1) F(y_1, x_2) dy_1$  und  $K_2 F = \int K_2(x_1, x_2; y_2) F(x_1, y_2) dy_2$  eingeführt, so schreibt sich (2) in der Form (3)  $F = f + (\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2) F$ . Für „kleine“  $\lambda_1, \lambda_2$  liefert dann die Neumannsche Methode die Lösung (4)  $F = (1 - \lambda_1 K_1 - \lambda_2 K_2)^{-1} f$ . Um die „Fredholmsche“ Lösung von (3) zu gewinnen, führt Verf. zunächst die in  $\lambda_1$  ganzen Funktionen  $d_1(\lambda_1, x_2) = \exp \{ \text{Spur} \log (1 - \lambda_1 K_1) \}$  und  $J_1(\lambda_1) = d_1[\lambda_1 K_1 + \lambda_2^2 K_2 + \dots]$  ein und löst (3) formal bez.  $x_1$  auf, indem  $x_2$  als fest angesehen wird:  $F = (1 + J_1/d_1)(f + \lambda_2 K_2 F)$ . Wird diese Gleichung jetzt bez.  $x_2$  aufgelöst, so ergibt sich — bei entsprechender Bedeutung von  $d_2, J_2$  — (5)  $F = (1 + J_2/d_2)(1 + J_1/d_1)f + \lambda_2 [(1 + J_2/d_2) J_1 K_2/d_1] F$ , welches eine echte „totale“ Integralgleichung in zwei Variablen mit dem wohldefinierten Kern  $(1 + J_2/d_2) J_1 K_2/d_1$  darstellt, die dann für „reguläre“  $\lambda_1, \lambda_2$  nach Fredholm aufgelöst werden kann. Die so gewonnene Lösung von (5) erfüllt auch die Gleichung (3), d. h. (2). Wird die Reihenfolge der Operationen vertauscht, so erhält man eine weitere Lösung von (3). Verf. erhält dann durch Kombination beider Lösungen eine symmetrische Lösung von (1). Die erzielten Ergebnisse werden anschließend auf  $n$  Variable verallgemeinert. H. Pachale.

**Thomas, Johannes:** Ein Satz über die zur Eigenwertaufgabe des linearen Turbulenzproblems gehörige Greensche Funktion. (Nachtrag zu meiner Arbeit: Untersuchungen über das Eigenwertproblem

$$\frac{d}{dx} \left( f(x) \frac{dy}{dx} \right) + \lambda g(x) y = 0; \quad \int_a^b A(x) y dx = \int_a^b B(x) y dx = 0$$

(diese Nachr. 6, 229–260 (1951)). Math. Nachr. 9, 379–383 (1953).

This note on an earlier, more general paper (this Zbl. 45, 46), deals with the particular problem

$$z'' = \{ \lambda (a x + b) + a^2 \} z, \quad \int_0^1 e^{-ax} z dx = 0, \quad \int_0^1 e^{ax} z dx = 0.$$

This is reduced to a Fredholm equation  $z(x) = \lambda \int_0^1 G(x, t) (a t + b) z(t) dt$ , where  $G(x, t)$  is the Green's Function belonging to  $z'' - a^2 z = 0$  with the conditions  $\int_0^1 e^{-ax} z dx = 0$ ,  $\int_0^1 e^{ax} z dx = 0$ .  $G(x, t)$  is calculated explicitly. It is shown that  $G(x, x)$  is symmetrical about  $x = \frac{1}{2}$ , has a double zero at  $x = 0$ , decreases monotonically in  $0 < x < \frac{1}{2}$  and has a single inflexion in this interval. W. W. Sawyer.

**Ko, Dja-Cha:** Über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen von Integro-Differentialgleichungen. J. Chinese math. Soc. 2, 275–285 u. russisch. Zusammenfassg. 286–287 (1953) [Chinesisch].

Bekanntlich wendet man zum Beweis der Existenz einer Lösung eine Fixpunktmethode an,



die von Banach begründet und von Caccioppoli mit Erfolg angewendet worden ist. In der vorliegenden Arbeit wird mittels dieser Methode die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen folgender Typen von Integrodifferentialgleichungen bewiesen:

$$\text{I.} \quad \frac{d^m y(x)}{dx^m} + \lambda \sum_{k=0}^{m-1} a_k(x) \frac{d^k y(x)}{dx^k} + \lambda \int_a^b \sum_{k=0}^{m-1} R_k(x, t) \frac{d^k y(t)}{dt^k} dt = f(x),$$

wo  $a_k(x)$ ,  $R_k(x, t)$ ,  $f(x)$  gegebene in  $[a, b]$  stetige Funktionen sind,  $\lambda$  ein Parameter,  $m \geq n$ .

$$\text{II.} \quad \frac{d^m y}{dx^m} + \sum_{k=0}^{m-1} a_k(x) \frac{d^k y}{dx^k} + \int_a^x K\left(x, t, y(t), \dots, \frac{d^n y(t)}{dt^n}\right) dt = 0,$$

wo  $a_k(x)$  in  $[a, b]$  stetige Funktionen sind, und  $K$  eine stetige Funktion ihrer Argumente, die der Lipschitzbedingung genügt:

$$\left| K\left(x, t, y^{(1)}, \frac{dy^{(1)}}{dt}, \dots, \frac{d^n y^{(1)}}{dt^n}\right) - K\left(x, t, y^{(2)}, \frac{dy^{(2)}}{dt}, \dots, \frac{d^n y^{(2)}}{dt^n}\right) \right| \leq M \sum_{k=1}^n \left| \frac{dy^{(1)}}{dt^k} - \frac{dy^{(2)}}{dt^k} \right|.$$

$$\text{III.} \quad \frac{d^{m_i} y}{dx^{m_i}} + R_i(x, y_1, y'_1, \dots, y_1^{(m_1+1)}, \dots, y_n, y'_n, \dots, y_n^{(m_n-1)}) \\ + \int_a^x K_i(x, t, y_1(t), \dots, y_1^{(p_1)}(t), \dots, y_n(t), \dots, y_n^{(p_n)}(t)) dt = 0,$$

wo  $R_i$  und  $K_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) stetige Funktionen ihrer Argumente sind und einer Lipschitzbedingung genügen. — IV.  $\frac{dy_i(x)}{dx} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}(x) y_k(x) + b_i(x)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), wo  $a_{ik}(x)$  und  $b_i(x)$  auf  $[a, b]$  stetig sind und  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}(x)| \leq M < \infty$  und  $|b_i(x)| \leq N$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) gilt.

Autoreferat.

Vogel, Théodore: Sur les systèmes déferlants. Bull. Soc. math. France **81**, 63—75 (1953).

L'A. chiama „déferlant“ un sistema fisico la cui evoluzione si decompone in fasi regolate da leggi nettamente differenti che si susseguono bruscamente. Tale è il caso, in particolare in cui un brusco passaggio corrisponda a ciò che, in matematica, dicesi una discontinuità di prima specie. Sebbene dal punto di vista fisico codesta schematizzazione non è rigorosamente accettabile, pure in taluni casi è da preferire all'idea di approssimazione per via di continuità al crescere indefinito di un parametro. Un tipo di sistema „déferlant“ è quello che conduce ad equazioni differenziali della forma  $dx/X(x, y) = dy/Y(x, y) = dt/T(x, y)$  insieme con un'equazione  $S(x, y) = \text{cost.}$ , la quale permette di determinare la posizione del punto  $(x, y)$  sulla curva luogo delle discontinuità  $T(x, y) = 0$  nell'istante che segue immediatamente quello in cui questa curva è raggiunta seguendo una traiettoria  $R(x, y) = \text{cost.}$  dell'equazione  $dx/X = dy/Y$ . In lavori precedenti [questo Zbl. **38**, 370; Ann. Télécommun. **6**, 2—10 (1951)] l'A. ha discusso le condizioni nelle quali il detto sistema ammette delle soluzioni periodiche stabili. In questo lavoro, l'interessante analisi qualitativa viene estesa dal caso in cui  $X, Y, T$  sono funzioni di punto, al caso in cui figurano nella legge del moto anche funzionali, sotto forma di integrali estesi alla traiettoria fino all'istante considerato. Si tratta di particolari sistemi integrodifferenziali a carattere ereditario.

G. Lampariello.

Salinas, Baltasar R.: Laplace-Transformierte einiger ganzer Funktionen. Gac. mat., Madrid **5**, 157—158 (1953) [Spanisch].

Capriz, Gianfranco: Sulla applicazione del metodo della trasformata parziale di Laplace ad intervallo di integrazione finito ad un problema di elasticità piana. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **14**, 401—403 (1953).

L'A. ispirandosi ai procedimenti dovuti a Picone (questo Zbl. **24**, 23), Ghizzetti (questo Zbl. **31**, 310; **32**, 283) e Fichera (questo Zbl. **31**, 131; **41**, 529) e servendosi della trasformata parziale di Laplace, enuncia l'equivalenza del primo problema della elastostatica piana con un sistema di infinite equazioni integrali di Fischer-Riesz.

G. Fichera.

Pollard, Harry: The harmonic analysis of bounded functions. Duke math. J. **20**, 499—512 (1953).

$\Phi$  sei eine beschränkte meßbare Funktion in  $(-\infty, \infty)$ . Eine reelle Zahl  $\lambda$  liegt dann und nur dann in dem Spektrum  $\sigma(\Phi)$  von  $\Phi$ , wenn gilt: Aus (1)  $h \in L(-\infty, \infty)$

und  $h \times \Phi = \int h(x-y) \Phi(y) dy = 0$  folgt (2)  $\int e^{i\lambda x} h(x) dx = 0$ . Nun sei umgekehrt  $h(x)$  eine Funktion, welche (2) für jedes  $x \in \sigma(\Phi)$  erfüllt: daß dann auch (1) gilt, hat Beurling unter der Voraussetzung  $x^{1/2} h(x) \in L(-\infty, \infty)$  in unveröffentlichten Vorlesungen gezeigt. Verf. gibt einen Beweis dieses Satzes und gleichzeitig damit eine kurze, sehr erwünschte Einführung in die Spektraltheorie beschränkter Funktionen.

W. Maak.

**Dyson, F. J.:** Fourier transforms of distribution functions. Canadian J. Math. 5, 554—558 (1953).

Die Fourier-Transformierte einer Verteilungsfunktion  $q(x)$  werde mit  $\Phi(t)$  bezeichnet:  $\Phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} dq(x)$ . Wenn zwei Verteilungsfunktionen  $q_1, q_2$  und ein  $\delta > 0$  gegeben sind, so wird gefragt, ob es ein  $\varepsilon > 0$  gibt so, daß die Bedingung „ $|\Phi_1(t) - \Phi_2(t)| < \varepsilon$  für alle  $t$ “ die Abschätzung  $q_1(x) - q_2(x) < \delta$  nach sich zieht. 1. Wenn  $\varepsilon$  von  $\delta, q_1$  und  $x$  abhängt (gleichmäßige Konvergenz von  $\Phi_2$  gegen  $\Phi_1$ , punktweise Konvergenz von  $q_2$  gegen  $q_1$ ), so lautet die Antwort ja (bekannt). 2. Wenn  $\varepsilon$  von  $\delta$  und  $q_1$  abhängt, aber nicht von  $x$  (gleichmäßige Konvergenz von  $\Phi_2$  gegen  $\Phi_1$ , gleichmäßige Konvergenz von  $q_2$  gegen  $q_1$ ), so lautet die Antwort ebenfalls ja. 3. Wenn  $\varepsilon$  nur von  $\delta$  abhängt, so zeigt ein Gegenbeispiel, daß die Frage zu verneinen ist.

G. Doetsch.

**Tatchell, J. B.:** On some integral transformations. Proc. London math. Soc., III. Ser. 3, 257—266 (1953).

Verf. betrachtet Integraltransformationen der Form  $\lambda_s(x) = \int_0^{\infty} \Phi(x, t) ds(t)$  ( $x \geq 0$ ). Durch die Anwendung funktionalanalytischer Hilfsmittel wird gezeigt, daß aus  $|s(0)| + \int_0^{\infty} |ds(t)| < \infty$  genau dann  $\int_0^{\infty} |\lambda_s(x)| dx < \infty$  folgt, wenn gilt: (i)  $\Phi(x, t)$  ist für jedes feste  $x$  eine stetige und beschränkte Funktion von  $t$ , (ii)  $\Phi(x, t)$  ist für jedes feste  $t$  eine meßbare Funktion von  $x$ , (iii) es ist  $\int_0^{\infty} |\Phi(x, t)| dx \leq H$ ,  $H$  unabhängig von  $t$ . Dieses Ergebnis ergänzt einen Satz von Knopp und Lorentz (dies. Zbl. 41, 184), der besagt, daß die Bedingungen (i), (ii), (iii) hinreichend sind. Verf. gibt ferner genaue Bedingungen dafür an, daß  $\int_0^{\infty} d\lambda_s(t) < \infty$  ist, schließlich werden Transformationen  $\beta_r(x) = \int_0^{\infty} \chi(x, t) r(t) dt$  behandelt, die jedes

$\int_0^{\infty} |r(t)| dt < \infty$  in  $\int_0^{\infty} |\beta_r(x)| dx < \infty$  überführen.

A. Peycrimhoff.

### Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

• **Riesz, Frédéric et Bela Sz.-Nagy:** Leçons d'analyse fonctionnelle. 2. éd. Budapest: Akadémiai Kiadó (Éditions de l'Académie) 1953. VII, 455 p. § 7,70.

**Roberts, G. T.:** Bounded-weak topologies and completeness in vector spaces. Proc. Cambridge philos. Soc. 49, 183—189 (1953).

Für einen reellen oder komplexen Vektorraum  $X$  definiert Verf. einen Beschränktheits-Begriff als ein System  $\mathfrak{B}$  von Teilmengen von  $X$ , das den folgenden Axiomen genügt: (1) aus  $B_1 \in \mathfrak{B}$  und  $B_2 \subseteq B_1$  folgt  $B_2 \in \mathfrak{B}$ , (2) aus  $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$  folgt  $B_1 \cup B_2 \in \mathfrak{B}$ , (3) mit  $B$  liegt auch die absolutkonvexe Hülle von  $B$  in  $\mathfrak{B}$ , (4)  $\bigcup (B: B \in \mathfrak{B}) = X$ , (5) aus  $B \in \mathfrak{B}$  folgt für jeden Skalar  $\lambda$  auch  $\lambda B \in \mathfrak{B}$ . Jeder solche Beschränktheitsbegriff ist geeignet, auf gewissen Teilräumen des konjugierten



Raumes  $X^*$  usw. auf verschiedene Weise Topologien zu definieren. Die Beziehungen dieser Topologien zueinander und zur schwachen Topologie gewisser Linearsysteme werden genauer untersucht. Als wesentliches Hilfsmittel tritt die Polarenbildung auf: Der Polar einer Teilmenge  $S$  von  $X$  bezüglich eines Teilraumes  $L$  von  $X^*$  ist definiert als die Menge der  $f \in L$  mit  $\sup |\langle f, S \rangle| \leq 1$ . Da der Polar einer Menge stets absolutkonvex ist, hat man es bei den mit Hilfe der Polarenbildung und eines Beschränktheitsbegriffes definierten Topologien mit lokalkonvexen Topologien zu tun. Auf Einzelheiten kann wegen der Vielzahl der erforderlichen Definitionen nicht eingegangen werden.

H.-J. Kowalsky.

**Nikaidō, Hukukane:** On a minimax theorem and its applications to functional analysis. J. math. Soc. Japan 5, 86—94 (1953).

Let  $X$  be a compact convex subset of a topological linear space and let  $Y$  be a convex subset of a linear space. Let  $K(x, y)$  be a real valued function defined on the product of  $X$  and  $Y$  which is a continuous concave function of  $x$  (in  $X$ ) for each  $y$  in  $Y$  and is a convex function of  $y$  (in  $Y$ ) for each  $x$  in  $X$ . The following minimax theorem is proved: Theorem 1. If  $\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} K(x, y)$  is finite, then  $\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} K(x, y) = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} K(x, y)$ . This theorem is applied to give a new proof of the theorem of Mazur (this Zbl. S, 316) that if  $M$  is a closed convex subset of a normed vector space  $E$  and  $a \notin M$  then there exists  $f \in E^*$  for which  $\sup_{x \in M} f(x) < f(a)$ . Finally, Theorem 1 is used to give new proofs of known criteria for the regularity (reflexivity) of a Banach space. These applications depend on the well known fact (N. Bourbaki, this Zbl. 19, 123) that the unit sphere of the conjugate of a normed vector space is compact in the  $w^*$ -topology. The author uses the language of the theory of games. The reviewer notes that Theorem 2 is an immediate corollary of Theorem 1 if the function  $-K(x, y)$  is considered. This avoids repeating the proof of Theorem 1 as suggested by the author.

F. F. Bonsall.

**Nikodým, Otton Martin:** On transfinite iterations of the weak linear closure of convex sets in linear spaces. Part A. Two notions of linear closure. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 2, 85—105 (1953).

Ce travail est la première partie d'un mémoire où l'A. se propose de donner des démonstrations détaillées de théorèmes sur la „fermeture linéaire“ des ensembles convexes dans les espaces vectoriels réels de dimension infinie, annoncés dans deux notes antérieures (ce Zbl. 46, 333). Dans un espace vectoriel réel  $L$ , la „fermeture linéaire faible“  $\text{lin}^1 E$  d'un ensemble convexe  $E$  est définie comme l'ensemble des  $y \in E$  tels qu'il existe un segment ouvert (non vide) d'origine  $y$  contenu dans  $E$ ; on en déduit la définition de  $\text{lin}^\alpha E$  pour tout ordinal  $\alpha$  par induction transfinie. L'A. montre d'abord que, si  $L$  a une base dénombrable, il existe un ordinal  $\alpha < \Omega$  ( $\Omega$  premier nombre ordinal de 3<sup>e</sup> classe) tel que  $\text{lin}^\alpha E = \text{lin}^{\alpha+1} E$ . Il annonce qu'il démontrera dans la seconde partie du mémoire que pour tout espace  $L$  de dimension infinie et tout  $\alpha < \Omega$ , il existe un ensemble convexe  $E \subset L$  tel que  $\text{lin}^\alpha E \neq \text{lin}^{\alpha+1} E$ . Il en déduit (en prenant pour chaque  $\alpha < \Omega$  un espace  $L_\alpha$  de dimension  $\aleph_0$  et un ensemble convexe  $E_\alpha \subset L_\alpha$  tel que  $0 \in E_\alpha$  et  $\text{lin}^\alpha E_\alpha \neq \text{lin}^{\alpha+1} E_\alpha$ , puis en formant la somme directe  $L$  des  $L_\alpha$  et l'ensemble convexe somme directe des  $E_\alpha$  dans  $L$ ) qu'il existe, dans tout espace  $L$  dont la base est non dénombrable, un ensemble convexe  $E$  tel que, pour tout  $\alpha < \Omega$  on ait  $\text{lin}^\alpha E \neq \text{lin}^{\alpha+1} E$ .

J. Dieudonné.

**Landsberg, Max:** Lokalkonvexe Räume vom Grade  $r$  ( $0 < r \leq 1$ ). Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden 2, 369—372 (1953).

$E$  sei ein komplexer linearer Raum. Eine Teilmenge  $M$  heißt konvex vom Grad  $r$  ( $0 < r \leq 1$ ), wenn für  $a, b > 0$  und  $a' + b' = 1$  stets  $aM + bM \subset M$  gilt. Ist stets auch  $e^{i\varphi} M \subset M$ , so heißt  $M$  absolutkonvex vom Grad  $r$ . Ein topologischer linearer Raum  $E$  heißt lokalkonvex vom Grad  $r$ , wenn er ein fundamentales Nullumgebungssystem aus absolutkonvexen Mengen vom Grad  $r$  besitzt. Diese Nullumgebungen lassen sich stets durch Halbnormen  $N(x)$  vom Grad  $r$  charakterisieren, für die  $N(\alpha x) = |\alpha|^r N(x)$  neben  $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$  gilt. Es wird untersucht, welche Bedingungen ein System von Halbnormen vom Grad  $r$  erfüllt, das zu einem lokalkonvexen Raum  $r$  gehört, und wann man mit einer einzigen Norm vom Grad  $r$  auskommt. Jeder lokalkonvexe Raum vom Grad  $r$  ist auch lokalkonvex vom Grad  $s < r$ , aber nicht umgekehrt, speziell also im allgemeinen kein lokalkonvexer Raum im üblichen Sinn.

G. Köthe.

**Charzyński, Z.:** Sur les transformations isométriques des espaces du type (F). Studia math. 13, 94—121 (1953).

Soient  $E$  et  $H$  deux espaces de Fréchet à un nombre fini de dimensions; toute transformation isométrique de  $E$  sur  $H$ , qui transforme l'élément zéro de  $E$  en l'élément zéro de  $H$  est une opération linéaire. La démonstration est faite par l'A. dans le cas d'une rotation de  $E$  et étendue au cas général. En complément, S. Mazur démontre que cette proposition équivaut à la suivante: soit  $E$  un espace de Fréchet et  $G$  un groupe d'homéomorphismes de  $E$  sur lui-même qui contient toutes les translations de  $E$ ; soit  $G_0$  le sous-groupe de  $G$  formé de toutes les transformations de  $G$  qui laissent fixe l'élément zéro de  $E$ ; si  $G_0$  est compact, toutes les transformations de  $G_0$  sont linéaires.

A. Pereira Gomes.

Ellis, David: A modification of the parallelogram law characterization of Hilbert spaces. *Math. Z.* 59, 94—96 (1953).

Es handelt sich darum, die die Hilbertschen Räume unter den Banachschen kennzeichnende Relation (1)  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$  nur noch für gewisse  $x$  und  $y$  vorauszusetzen, ohne daß diese charakterisierende Eigenschaft verlorengeht. Zunächst läßt sich jeder Hilbertsche Raum so halbordnen (z. B. „komponentenweise“), daß er zugleich einen Banachschen (d. h. normierten) Vektorverband darstellt, also einen sogenannten Hilbertschen Verband. Ist ferner  $H$  ein Hilbertscher Verband mit der Halbordnung  $<$ , so bildet  $H^+ = \{x \in H \mid 0 \leq x\}$  einen metrischen Verband, d. h. über  $H^+$  existiert eine strikt monoton wachsende reelle Funktion  $v$  (z. B.  $v(x) = \|x\|^2$ ) mit  $v(x) + v(y) = v(x \vee y) + v(x \wedge y)$ . Bedeutet nun andererseits  $H$  einen Banachschen Raum, so reicht schon jede der beiden folgenden Bedingungen dafür hin, daß  $H$  ein Hilbertscher Raum ist: I. Es gibt in  $H$  eine Halbordnung  $<$ , vermöge derer  $H$  ein Banachscher Verband wird, und (1) gilt in  $H^+$ . II. Es gibt in  $H$  eine Halbordnung  $<$ , vermöge derer  $H$  ein Banachscher Verband wird.  $H^+$  stellt in bezug auf  $v(x) = \|x\|^2$  einen metrischen Verband dar, und (1) trifft auf je zwei vergleichbare Elemente  $x, y \in H^+$  zu.

K. Krickeberg.

Inzinger, Rudolf: Drehungen vom Faltungstypus im Hilbertschen Raum und in der Menge der stützbaren Bereiche einer Ebene. *Atti IV. Congr. Un. mat. Ital.* 2, 354—360 (1953).

Verf. hat in früheren Abhandlungen (dies. Zbl. 48, 88) eine geometrische Realisierung des Hilbertschen Raumes  $\mathfrak{H}$  in der Menge  $H$  der stützbaren ebenen Bereiche begründet. Einläßlich wurde die Faltung  $\mathfrak{B} = \mathfrak{T}\mathfrak{M}$  in  $\mathfrak{H}$  und ihre geometrische Deutung  $B = T A$  in  $H$  betrachtet, welche im Funktionenraum  $L^2(0, 2\pi)$  der Integralfaltung  $b = (1/\pi) t * a$  entspricht. — Über diese Theorie und weitgehende Untersuchungen über spezielle beschränkte lineare Transformationen vom Faltungstyp, welche als Drehungen bezeichnet werden können, hat Verf. in Rom und Ferrara gesprochen. Eine derartige Transformation läßt sich mit den komplexen Koordinaten (vgl. die oben zitierten Referate) durch  $\beta_r = \tau_r \alpha_r$  ( $r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) beschreiben, wobei  $|\tau_r| = 1$  ist. Diese bilden eine Abelsche Gruppe mit der Einheit  $E$  ( $\tau_r = 1$ ). In der geometrischen Interpretation in  $H$  sind z. B. Flächeninhalt und Umfang der Bereiche invariant. Der Untergruppe der harmonischen Drehungen ( $\tau_r = e^{i r \theta}$ ) entspricht die Gruppe der Drehungen der Bereiche um den Ursprung in der Ebene. Eine interessante Drehung vom Faltungstyp wird in symbolischer Darstellung durch  $T_s = (E + s D)(E - s D)$  gegeben, wobei  $D$  im  $L^2$  als Differentiation (falls ausführbar) gedeutet werden kann ( $\tau_r = i r$ ) und  $D$  den adjungierten Operator ( $\tau_r = -i r$ ) bezeichnet. Diese Transformation ( $\tau_r = e^{2i \arctan(r/s)}$ ) ist als Evolventoiden- bzw. Evolutoidenbildung in Zusammenwirkung mit einer Drehung um den Ursprung mit dem Winkel  $-2 \arctan s$  deubar. Durch Zusammensetzungs- und Grenzvorgänge werden mannigfaltige Zusammenhänge hergestellt, welche geometrische Interpretationen verschiedenster Relationen der allgemeinen Analysis in der Menge der stützbaren Bereiche in der Ebene ermöglichen.

H. Hadwiger.

Zeller, Karl:  $FK$ -Räume in der Funktionentheorie. I *Math. Z.* 58, 288—305 (1953).

The purpose of the paper is to present some applications of functional analysis to the theory of functions of a complex variable. The present first part has a preparatory character. It is a survey of the theory of  $FK$  spaces which will be used in the second part. An  $FK$  space is a complex  $B_0$ -space ( $F$ -space in the terminology of N. Bourbaki), the elements of which are sequences of complex numbers, and such that the convergence generated by the metrical struc-



ture implies the convergence in each coordinate separately. The paper does not contain essentially new results. The author presents some methods of constructing linear subspaces (by aid of extended upper semicontinuous pseudonorms), gives criteria for continuity of distributive operations, proves the closed-graph theorem of Banach, discusses the Banach-Steinhaus theorems in connection with the category method and also with the constructive method going back to Lebesgue and called by the author the method of sliding hump. Finally there are discussed the comparison of topologies in  $FK$  spaces and the products of such spaces. The new concept introduced is the minorant of the pseudonorm. Some theorems are stated without proofs with references to earlier papers of the author's.

A. Alexiewicz.

Ellis, H. W. and Israel Halperin: Function spaces determined by a levelling length function. Canadian J. Math. 5, 576—592 (1953).

Les AA. définissent et étudient des espaces fonctionnels généralisant les classiques espaces  $L^p(B)$  de fonctions définies dans un espace mesuré  $S$  (par une mesure  $\gamma$ ) à valeurs dans un espace de Banach  $B$ , et de puissance  $p$ -ième intégrable (au sens de Bochner). Ils partent d'une „fonction longueur“  $\lambda(u)$  à valeurs  $\geq 0$  (pouvant être  $+\infty$ ), définie dans l'ensemble  $M$  des fonctions numériques positives sur  $S$ , croissante, homogène et convexe, et continue pour le passage à la limite des suites croissantes dans  $M$ ; dans le cas classique,  $\lambda(u)$  est la norme  $N_p(u) = (\int u^p d\gamma)^{1/p}$ . L'espace  $L^\lambda(B)$  est l'espace des fonctions  $f$  à valeurs dans  $B$ , mesurables au sens de Bochner et telles que  $\lambda(|f|) < +\infty$ ; le même raisonnement que pour les espaces  $L^p$  prouve que  $L^\lambda(B)$  est un espace de Banach. Moyennant diverses hypothèses sur  $\lambda$ , pour lesquelles nous renvoyons à l'article lui-même, les AA. démontrent une „inégalité de Hölder“ faisant intervenir  $\lambda$  ainsi que sa „longueur conjuguée“  $\lambda^*(v) = \sup_{\lambda(u) \leq 1} \int u v d\gamma$ ; puis ils étudient le dual d'un espace  $L^\lambda(B)$ , auquel ils étendent les résultats dûs à Bochner, Taylor, Phillips et le Réf. pour les  $L^p(B)$ ; les méthodes sont analogues, mais présentées de façon plus simple et plus concise que dans les travaux précités.

J. Dieudonné.

Livingston, Arthur E.: The space  $H^p$ ,  $0 < p < 1$ , is not normable. Pacific J. Math. 3, 613—616 (1953).

L'A. établit que l'espace  $H^p$  des fonctions  $x(z)$  holomorphes à l'intérieur du cercle unité et pour lesquelles

$$A_p(x) = \sup_{0 \leq r < 1} \int_0^{2\pi} |x(re^{i\theta})|^p d\theta, \quad 0 < p < 1,$$

qui est un espace vectoriel topologique avec la topologie dont une base des ouverts est constituée des ensembles  $A_p(x - x_0) < h$  n'est pas normable pour cette topologie. (Conjecture de S. S. Walters, ce Zbl. 40, 62.)

A. Revuz.

Hitotumatu, Sin: Two remarks on my paper „A note on the maximal ideals of analytic functions“. Kōdai math. Sem. Reports 1, 31 (1953).

Vgl. dies. Zbl. 47, 352.

Grothendieck, Alexandre: Sur certains espaces de fonctions holomorphes. I, II. J. reine angew. Math. 192, 36—64, 77—95 (1953).

Teil I:  $O$  sei eine offene Teilmenge der komplexen Ebene,  $E$  lokalkonvex,  $E'$  sein dualer Raum. Eine in  $O$  erklärte Funktion  $f(z)$  mit Werten in  $E$  heißt holomorph, wenn für jedes  $x' \in E'$  die Funktion  $z \rightarrow \langle f(z), x' \rangle$  holomorph ist. Es werden verschiedene Kriterien für Holomorphie gegeben. Daraus ergeben sich als Beispiele:  $E$  sei der Raum aller stetigen Funktionen auf dem lokalkompakten Raum  $M$  mit der kompakten Topologie; die holomorphen Funktionen auf  $O$  mit Werten in  $E$  sind die auf  $O \times M$  stetigen Funktionen  $f(z, t)$  mit  $z \rightarrow f(z, t)$  holomorph für jedes  $t$ . Eine Funktion  $f(z)$  mit Distributionen als Werten ist genau dann holomorph, wenn für jede offene, in  $O$  relativ kompakte Teilmenge  $O_1$  und jede offene, in  $K^n$  relativ kompakte Teilmenge  $U$  eine auf  $O_1 \times U$  stetige Funktion  $F(z, t)$  existiert, die in  $Z$  holomorph ist und von der eine geeignete Ableitung  $D_{p(t)} F(z, t)$  nach  $t$  gleich  $f(z)$  in  $U$  ist. Eine Funktion  $f(z)$  mit Werten in  $L^p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) ist genau dann holomorph, wenn sie stetig ist und wenn für jedes  $z$  nach Abänderung auf einer lokal zu vernachlässigenden Menge  $f(z, t)$  holomorph ist für jedes  $t$ . — Mit  $\mathfrak{H}(O, E)$  wird der mit der Topologie der kompakten Konvergenz versehene Raum aller auf  $O$  holomorphen Funktionen mit Werten in  $E$  bezeichnet. Ist  $E$  vollständig bzw. metri-

sierbar, so auch  $\mathfrak{P}(O, E)$ .  $\Omega_1$  sei eine beliebige Teilmenge der Riemannschen Zahlenkugel  $\Omega$ . Zwei auf den Umgebungen  $U_1$  bzw.  $U_2$  von  $\Omega_1$  holomorphe Funktionen  $f_1$  und  $f_2$  gehören derselben Klasse  $f$  an, wenn sie auf  $U_1 \cap U_2$  identisch sind.  $P(\Omega_1, E)$  bezeichnet den Raum aller dieser Klassen, deren  $f$  in  $\infty$  verschwinden, falls  $\infty \in \Omega_1$ . Für offene  $\Omega_1 \neq O$  ist  $P(O, E)$  Teilraum von  $\mathfrak{P}(O, E)$  und wird mit dessen Topologie versehen. Im allgemeinen Fall wird  $P(\Omega_1, E)$  als der induktive Limes der  $P(O, E)$  mit  $O \subset \Omega_1$  aufgefaßt. Es sei  $\Omega_2$  die Komplementärmenge zu  $\Omega_1$  in  $\Omega$ . Der duale Raum zu  $P(\Omega_1, E)$  ist derjenige Teilraum von  $P(\Omega_2, E')$ , der von jenen Klassen holomorpher Funktionen  $g(z)$  gebildet wird, die eine geeignete Umgebung jedes  $z$  einer Umgebung  $U$  von  $\Omega_1$  in eine gleichstetige (bez.  $E$ ) Teilmenge von  $E'$  abbilden. Das skalare Produkt wird gegeben durch ein Integral  $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\xi) \cdot g(\xi) \cdot d\xi$ ,  $\Gamma$  verläuft in dem Durchschnitt

der Umgebungen von  $\Omega_1$  bzw.  $\Omega_2$ , in denen die Repräsentanten  $f, g$  der Klassen  $f, g$  erklärt sind. Dies ist eine Verallgemeinerung der Ergebnisse von J. S. Silva und des Ref. In vielen Fällen ist der duale Raum gleich ganz  $P(\Omega_2, E')$ . — Eine lineare Abbildung von  $P(\Omega_1, E)$  in  $F$  heißt beschränkt, wenn sie eine geeignete Nullumgebung in eine beschränkte Menge abbildet.  $L_s(E, F)$  bedeute den linearen Raum der schwach stetigen Abbildungen von  $E$  in  $F$ .  $E$  sei vollständig, in  $F$  sei die abgeschlossene kreiskonvexe Hülle jeder kompakten Menge kompakt. Dann erhält man alle beschränkten Abbildungen von  $P(\Omega_1, E)$  in  $F$  so:  $L(\xi)$  durchlaufe  $P(\Omega_2, L_s(E, F))$ , und es existiere ein Repräsentant  $L$ , der in einer Umgebung  $U_2$  von  $\Omega_2$  definiert ist, dazu eine beschränkte Menge  $A \subset F$ , so daß für jede kompakte Menge  $K \subset U_2$  eine Umgebung  $V_K$  von  $O$  in  $E$  existiert mit  $\bigcup_{u \in L(K)} u(V_K) \subset A$ ; für  $f \in P(\Omega_1, E)$  ist dann  $L \cdot f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} L(\xi) f(\xi) d\xi$

eine beschränkte Abbildung in  $E$ . In vielen Fällen ist die Einschränkung für die  $L$  unnötig. Um alle stetigen (nicht nur die beschränkten) Abbildungen  $L$  von  $P(\Omega_1)$  (d. h.  $E$  gleich dem Körper der komplexen Zahlen) in  $F$  zu erhalten, muß man den projektiven Limes  $Q(\Omega_2, F)$  der  $P(\Omega_2, F_r)$  bilden,  $F_r$  der durch Quotientenbildung und Abschließung nach der  $F$  definierenden Halbnorm entstehende Banachraum, und jedes  $L$  wird durch ein System  $L_r$  gegeben mit  $\bar{L}_r \cdot f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} L_r(\xi) f(\xi) d\xi$ . An mehreren Beispielen wird gezeigt, wie eine konkrete Dar-

stellung der  $L$  darüber hinaus gefunden werden kann. Ist z. B.  $F$  der Raum der stetigen Funktionen auf einem lokalkompakten, im Unendlichen abzählbaren Raum  $M$ , so wird  $Q(\Omega_2, F)$  durch Klassen von stetigen, in  $z$  holomorphen Funktionen  $f(z, t)$  dargestellt, die in offenen Umgebungen von  $\Omega_2 \times M$  in  $\Omega \times M$  erklärt sind. — Teil II: Es werden einige Resultate aus der Theorie der topologischen Tensorprodukte lokalkonvexer Räume vorangestellt, die ohne Beweise wiedergegeben werden und später benützt werden. Ist  $O$  eine holomorphe Mannigfaltigkeit,  $E$  beliebig lokalkonvex, so gilt in  $\mathfrak{P}(O, E)$  der Satz von Montel: Eine beschränkte Teilmenge  $A$  von  $\mathfrak{P}(O, E)$  ist eine gleichstetige Menge von Abbildungen von  $O$  in  $E$ ; jede Abbildung von  $O$  in  $E$ , die einfacher Limes von Abbildungen aus  $A$  ist, ist wieder holomorph; eine Teilmenge  $A' \subset \mathfrak{P}(O, F)$  ist dann und nur dann relativ kompakt, wenn  $A'$  beschränkt ist und die Menge der  $f(z), f \in A'$ ,  $z$  fest, stets relativ kompakt in  $E$  ist. Es gilt auch, daß eine Teilmenge  $A$  dann und nur dann relativ schwach kompakt ist, wenn die Menge der  $f(z), f \in A$ ,  $z$  fest, stets relativ schwach kompakt in  $E$  ist. Es bezeichne  $\mathfrak{E}(O, E)$ ,  $O \subset R^n$ , den Raum aller Abbildungen  $f(\xi)$  von  $O$  in  $E$ , für die  $f(\xi), x'$  für jedes  $x' \in E'$  unendlich oft differenzierbar ist. Es ist  $\mathfrak{E}(O, E)$  das topologische Tensorprodukt von  $\mathfrak{E}(O)$  und  $E$ , und es werden verschiedene Topologien auf den beschränkten Teilmengen von  $\mathfrak{E}(O, E)$  als identisch nachgewiesen.  $\mathfrak{H}(O, E)$ ,  $O \subset R^n$ , ist ein abgeschlossener Teilraum von  $\mathfrak{E}(O, E)$ , damit lassen sich viele topologischen Eigenschaften von  $\mathfrak{H}(O, E)$  auf die von  $\mathfrak{E}(O, E)$  zurückführen. So sind  $\mathfrak{E}(O, E)$  und  $\mathfrak{H}(O, E)$  dann und nur dann halbreflexiv, wenn  $E$  es ist. Ist  $E$  ein  $(F)$ -Raum, so ist der biduale Raum  $\mathfrak{E}(O, E)''$  bzw.  $\mathfrak{H}(O, E)''$  gleich  $\mathfrak{E}(O, E')$  bzw.  $\mathfrak{H}(O, E')$ . Für beliebiges  $E$  gilt, daß  $\mathfrak{E}''$  bzw.  $\mathfrak{H}''$  dichte Teilräume von  $\mathfrak{E}(O, E'')$  bzw.  $\mathfrak{H}(O, E'')$  sind.  $\mathfrak{E}(O, E)$  bzw.  $\mathfrak{H}(O, E)$  sind dann und nur dann distinguert (das ist gleichbedeutend damit, daß der stark duale Raum tonneliert ist), wenn  $E$  es ist. Der Raum  $P(\Omega_1, E)$  ist tonneliert, wenn  $E$  tonneliert und abgeschlossen ist oder wenn  $E$  ein  $(F)$ -Raum ist. Ist  $E$  ein reflexiver  $(B)$ -Raum, so sind  $P(\Omega_1, E)$  und  $P(\Omega_2, E')$  reflexiv und zueinander stark dual. Ist  $E$  ein stark dualer Raum eines  $(F)$ -Raumes oder ein abgeschlossener Teilraum eines solchen, so ist  $P(\Omega_1, E)$  vollständig. Einige weitere Resultate über die topologische Struktur der  $P(\Omega_1, E)$  werden abgeleitet, und schließlich wird an einem Gegenbeispiel gezeigt, daß viele dieser Aussagen nicht verschärft werden können.

G. Köthe.

Grothendieck, A.: Sur les espaces de solutions d'une classe générale d'équations aux dérivées partielles. J. Analyse math. 2, 243—280 (1953).

Es sei  $V$  eine orientierte  $n$ -dimensionale unendlich oft differenzierbare Mannigfaltigkeit. Mit  $E_p(V)$ ,  $0 \leq p \leq n$ , wird der lineare Raum der unendlich oft differenzierbaren Differential-



formen vom Grad  $p$  auf  $V$  bezeichnet,  $D_p(V)$  der Teilraum der Formen mit kompaktem Träger. Entsprechend bezeichnet  $D'_p(V)$  den Raum der Distributionsdifferentialformen vom Grad  $p$ ,  $E'_p(V)$  den Teilraum der Formen mit kompaktem Träger. Bildet man das Integral  $\langle \varphi, T \rangle_V = \int_V \varphi \wedge T$  über das äußere Produkt eines  $\varphi \in D_p$  bzw.  $T \in D'_{n-p}$ , so werden die Räume  $D_p$  und  $D'_{n-p}$ , entsprechend  $E_p$  und  $E'_{n-p}$  zueinander dual.  $E$  bzw.  $D$  bezeichne die direkten Summen der  $E_p$  bzw.  $D_p$ . Ein Differentialoperator  $D$  mit unendlich oft differenzierbaren Koeffizienten ist eine stetige lineare Abbildung von  $D(V)$  in sich, bei der der Träger von  $D\varphi$  stets im Träger von  $\varphi$  liegt. Falls  $D$  stetig  $D_p(V)$  in  $D_0(V)$  abbildet, schreibt man  $D$ . Durch  $\langle D\varphi, T \rangle = \langle \varphi, {}^tDT \rangle$  wird der adjungierte Operator erklärt. Ist  $W$  eine zweite Mannigfaltigkeit, so heißt eine Distribution  $E$  auf  $V \times W$  nach L. Schwartz ein Kern. Ein Kern ist eine Linearform auf  $D(V \times W)$  und erklärt durch  $\langle E\psi, \varphi \rangle = E(\varphi, \psi)$  eine schwach stetige Abbildung von  $D(W)$  in  $D'(V)$ . Läßt sich diese Abbildung fortsetzen zu einer stetigen Abbildung  $T \rightarrow ET$  von  $E'(W)$  in  $D'(V)$ , so heißt  $E$  halbregrular in  $\varphi$ . Vertauschung von  $V$  und  $W$  ergibt Halbregularität in  $\psi$ , beides zusammen Regularität. Ist  $E$  halbregrular in  $\psi$  und ist  $ET$  in jeder offenen Menge unendlich oft differenzierbar, in der  $T$  es ist, so heißt  $E$  sehr reguler. Es sei im folgenden  $V = W$ . Ein Differentialoperator  $D$  auf  $V$  heißt elliptisch, wenn er einen sehr regulären linksinversen Kern  $E$  besitzt, also  $E \circ D \stackrel{p \rightarrow q}{=} \text{Id}$  die Identität ist, d. h. auch  ${}^tD \left( {}^tE \varphi \right) \stackrel{p \rightarrow q}{=} \varphi$  auf  $D(V)$  gilt.

Ist  $D$  ein Differentialoperator auf  $V$ ,  $U$  eine offene Teilmenge von  $V$ , so bezeichne  $H_D(U)$  den Teilraum der  $S \in D'(U)$  mit  $DS = 0$ ,  $h_D(U)$  dem Teilraum der  $f \in E(U)$  mit  $Df = 0$ . Im elliptischen Fall sind nach Schwartz keine Distributionen als Lösungen vorhanden, d. h.  $H_D(U) = h_D(U)$ . Es sei nun  $\omega$  eine unendlich oft auf  $U$  differenzierbare Funktion und die Menge der Punkte, auf denen sie weder 0 noch 1 ist, sei relativkompakt in  $U$ . Dann läßt sich für  $(S, T) \in H_D(U) \times h_D(U)$  oder  $\in h_D(U) \times H_D(U)$  im obigen Sinn  $\langle D(\omega S), T \rangle_U$  bilden. Diese Bilinearform ist auf jedem der beiden Räume getrennt stetig. Spezialfälle dieser Bildung sind für  $D = \partial_i \partial_{\bar{i}} + \partial_{\bar{i}} \partial_i$  bzw. den Laplaceschen Operator das Cauchysche resp. das Greensche Integral. Im folgenden wird vorausgesetzt, daß  $D$  einen linksinversen regulären Kern besitzt. Eine Lösung  $S$  von  $DS = 0$ , die im Komplement  $U$  einer kompakten Menge  $K$  erklärt ist, heißt im Unendlichen reguler bezüglich  $E$ , wenn  $\langle D(\omega S), {}^tE\varphi \rangle_U = 0$  ist für alle  $\varphi \in D(V)$  und jede unendlich oft differenzierbare Funktion  $\omega$  mit kompaktem Träger, die 1 ist in einer Umgebung der Vereinigungsmenge von  $K$  und des Trägers von  $\varphi$ . Für eine solche im Unendlichen reguler Lösung gilt die Formel von Green-Schwartz  $\omega S = E[D(\omega S)]$ ,  $\omega$  unendlich oft differenzierbar, 0 in einer Umgebung von  $K$  und 1 in einer Umgebung von  $\infty$ .  $H_D(U)$  ist die topologische direkte Summe des Teilraumes  $P_D(U)$  aller im Unendlichen regulären Lösungen und des Raumes  $N_D(U)$  derjenigen Lösungen, die Einschränkungen auf  $U$  einer auf ganz  $V$  erklärten Lösung sind. Entsprechend zerfällt  $h_D(D)$  in  $p_D(U)$  und  $n_D(U)$ . Es werde  $V$ , falls nicht kompakt, nach Alexandroff zur kompakten Menge  $\hat{V}$  ergänzt. Sind  $U_1, U_2$  zwei offene Teilmengen von  $\hat{V}$  mit  $U_1 \cup U_2 = \hat{V}$ ,  $0 \neq \varphi \in U_1 \cap U_2$ , so wird durch  $(*) \langle S, T \rangle = \langle D(\omega S), T \rangle_{U_1 \cap U_2}$  wieder ein skalares Produkt erklärt, wenn  $S \in H_D(U_1)$ ,  $T \in H_D(U_2)$ ,  $\omega$  unendlich oft differenzierbar auf  $U_1 \cap U_2$  und gleich 0 oder 1 im Komplement einer kompakten Teilmenge von  $U_1 \cap U_2$  ist. Jede stetige Linearfunktion auf  $P_D(U_1)$  bzw.  $p_D(U_1)$  wird durch ein  $T \in h_{t_D}(U_2)$  bzw.  $h_{t_D}(U_2)$  durch  $(*)$  gegeben, wobei  $U_2$  geeignet zu wählen ist. Volle Dualität erhält man, wenn man  $D$  als elliptisch mit sehr regulerem beiderseitig inversem Kern voraussetzt und noch eine Approximationsbedingung. Dann ist  $P_D(U)' = P_{t_D}(CU)$ ,  $CU$  das Komplement von  $U$  in  $V$ . Im ersten Anhang wird noch ein skalares Produkt  $\langle S, T \rangle_z$  über unendlich differenzierbare Zyklen vom Grad 1 erklärt und mit Hilfe des Theorems von de Rham untersucht, im zweiten Anhang wird die Cohomologietheorie von  $k$ -linearen differentiellen Abbildungen eines Produkts  $\prod_{i=1}^r E(V)$  in  $E(V)$  untersucht.

G. Köthe.

**Tillmann, Heinz-Günther:** Randverteilungen analytischer Funktionen und Distributionen. Math. Z. 59, 61—83 (1953).

G. Köthe (ce Zbl. 47, 352) a fait l'étude des deux espaces en dualité:  $\mathfrak{A}(C)$ , formé des fonctions d'une variable complexe, analytiques dans un voisinage (variable avec la fonction) d'une courbe de Jordan fermée et sans point double  $C$ ;  $\mathfrak{D}(G)$ , espace des fonctions analytiques dans l'ensemble ouvert  $G$  complémentaire de  $C$  et s'annulant au point à l'infini. L'A. étend cette théorie aux fonctions de plusieurs variables complexes, en prenant pour  $C$  un produit de courbes de Jordan dans les sphères de Riemann des diverses variables, ces courbes pouvant éventuellement passer par le point à l'infini. Comme G. Köthe (loc. cit.) il étudie les relations entre les distributions sur  $C$  et les fonctions de  $\mathfrak{D}(G)$ , considérées comme définissant les

formes linéaires continues sur  $\mathfrak{A}(C)$ , et en déduit une nouvelle définition de la topologie sur l'espace des distributions à support compact contenu dans  $C$ .

J. Dieudonné.

**Horváth, Jean:** Sur l'itération de la transformée de Hilbert d'une distribution complexe. C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 1480—1482 (1953).

Es sei  $T$  eine Schwartzsche Distribution über der Ebene  $R^2$  der komplexen Zahlen  $z$  derart, daß  $(1 + z^2)^{-1} \cdot T \in (D'_{L^2})$  in der Bezeichnung von Schwartz. Dann heißt „Hilbert-Transformierte von  $T$ “ das Kompositionsprodukt (Faltung)

$$\mathfrak{H} T = (1/2\pi) T * V. P. z/|z|^3 = T * H.$$

Wenn  $T \in (D'_{L^2})$  mit  $1 < p < \infty$ , so ist  $\mathfrak{H} T \in (D'_{L^2})$  für jedes  $q > p$ , und man kann die Operation  $\mathfrak{H}$  iterieren. Es ist  $\mathfrak{H}^k T = (k/2\pi) T * V. P. z^k/|z|^{k+2} = T * H_k$  für  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ;  $H_0 = \delta$ . Die Operatoren  $\mathfrak{H}^k$  bilden eine Gruppe mit  $\mathfrak{H}^{-1} T = -(1/2\pi) T * V. P. z/z^3 = T * H_{-1}$  und  $\mathfrak{H}^k (\mathfrak{H}^l T) = \mathfrak{H}^{k+l} T$ .

G. Doetsch.

**Lorentz, G. G. and D. G. Wertheim:** Representation of linear functionals on Köthe spaces. Canadian J. Math. **5**, 568—575 (1953).

$C$  sei eine nicht leere Klasse positiver integrierbarer Funktionen  $c(t)$  auf  $[0, 1]$  mit den Eigenschaften: a)  $C$  ist normal, d. h. mit  $c(t)$  ist jedes  $c_1(t)$ ,  $0 \leq c_1(t) \leq c(t)$ , in  $C$ ; b)  $C$  ist konvex,

c) mit  $c_n(t)$  und  $c_n(t) \uparrow c(t)$  liegt  $c(t)$  in  $C$ ; d) die Konstante  $1 \in C$ ; e) ist  $\int_0^1 c(t) dt \leq 1$ , so ist

$c(t) \in C$ . Alle meßbaren Funktionen  $f(t)$  mit  $\|f\|_X = \sup_{c \in C} \int_0^1 f(t) c(t) dt < \infty$  bilden einen Banachraum  $X_C$ , der überdies ein Banachverband ist. Der duale Raum  $X'_C$  besteht aus allen

meßbaren  $g(t)$  mit  $\sup_{\|f\| \leq 1} \int_0^1 |g| |f| dt < \infty$ , d. h.  $X'_C = X_{C^*}$ ,  $C^*$  die Menge aller  $f \in X_C$  mit

$\|f\|_X \leq 1$ . Es wird bewiesen, daß  $X'_C$  gleich  $X_C^*$ , dem konjugierten Raum, ist, wenn  $X_C$  separabel ist. Es sei  $B$  ein Banachraum, dann bezeichnet  $X_C(B)$  den Raum aller Funktionen  $f(t)$  von  $[0, 1]$  mit Werten in  $B$ , wobei  $f(t)$  schwach meßbar ist und  $f(t) \in X_C$  gilt.  $X_C(B)$  ist ein

Banachraum mit der Norm  $\|f\|_B = \sup_{c \in C} \int_0^1 \|f(t) \cdot c(t)\|_B dt$ . Eine lineare Abbildung  $f = U(x)$

von  $B$  in den Banachverband  $X$  heißt nach Kantorovitch ein Operator der Klasse  $(b, \alpha)$ , wenn die Menge aller  $\|U(x)\|$  für  $\|x\| \leq 1$   $\alpha$ -beschränkt (beschränkt bezüglich der Anordnung) ist. Ist  $B$  separabel, so hat jeder Operator  $f = U(x)$  der Klasse  $(b, \alpha)$  von  $B$  in  $X_C$  die Form  $f(t) = \langle x, g(t) \rangle$  mit  $g(t) \in X_C(B^*)$  ( $\langle \cdot, \cdot \rangle$  bedeutet das skalare Produkt eines Elementes aus  $B$  mit einem Element aus  $B^*$ ). Auch im nichtseparablen Fall läßt sich unter zusätzlichen Voraussetzungen über  $C$  eine Darstellung der Operatoren der Klasse  $(b, \alpha)$  geben. Diese Ergebnisse werden benützt zur Bestimmung des konjugierten Raumes zu  $X_C(B)$ :  $B$  sei separabel,  $X'_C = X_C^*$  und  $X_C$  erfülle die Bedingung: Ist  $f \in X_C$  und  $\chi_c$  die charakteristische Funktion der Teilmenge  $c$  von  $[0, 1]$ , so sei  $\|\chi_c\|_X \rightarrow 0$  mit  $\text{Maß}(c) \rightarrow 0$ . Dann ist  $(X_C(B))^* = X_C^*(B^*)$ ; die allgemeine

Form einer stetigen Linearfunktion auf  $X_C(B)$  ist  $L(f) = \int_0^1 \langle f(t), g(t) \rangle dt$ ,  $g(t) \in X_C^*(B^*)$ .

Sind  $B$  und  $X_C$  reflexiv, so ist auch  $X_C(B)$  reflexiv. Der Spezialfall  $X_C = L^p$ ,  $p > 1$ , wurde bereits von J. Dieudonné (dies. Zbl. **42**, 355) behandelt.

G. Köthe.

**Cooke, Richard G.:** Generalizations of Banach-Hausdorff limits. Proc. Amer. math. Soc. **4**, 410—417 (1953).

Die Note bringt Ergebnisse, die unmittelbar an eine Arbeit von W. F. Eberlein (dies. Zbl. **39**, 121) anschließen.  $\mathfrak{A}$  sei eine Halbgruppe nichtnegativer  $T$ -Matrizen mit den Eigenschaften: a) für  $A, B \in \mathfrak{A}$  seien  $AB$  und  $BA$  absolut äquivalent für

den Raum  $m$  der reellen beschränkten Folgen; b) es sei  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \sum |a_{nk}| = 1$  für

jedes  $n$ ; c)  $\mathfrak{A}$  enthalte wenigstens eine für  $m$  absolut reguläre Matrix. Ein Banachscher Limes  $L(x)$  auf  $m$  heißt ein B- $\mathfrak{A}$ -Limes, wenn er noch die Bedingung  $L(Ax) = x$  für alle  $x \in m$  und alle  $A \in \mathfrak{A}$  erfüllt.  $L_*$ ,  $L^*$ ,  $P_+$  und  $P_-$  haben dieselbe Bedeutung wie bei Eberlein. Es gilt nun: Es gibt B- $\mathfrak{A}$ -Limes; damit ein lineares Funktional ein B- $\mathfrak{A}$ -Limes ist, ist  $P_-(x) \leq L(x) \leq P_+(x)$  auf  $m$  notwendig und



hinreichend;  $P_-(x) = P_+(x)$  charakterisiert das Zusammenfallen aller B- $\mathfrak{A}$ -Limites für  $x$ . Ein lineares Funktional  $L(x)$  auf  $m$  heißt ein Edwardsscher Limes (Verallgemeinerung des Banachschen Limes), wenn  $L(x) \leq L^*(x)$  auf  $m$  gilt. Ersetzt man die Bedingung c) für  $\mathfrak{A}$  durch d):  $\mathfrak{A}$  enthält keine absolut reguläre Matrix, so erhält man das entsprechende Resultat für die jetzt als B\*- $\mathfrak{A}$ -Limites bezeichneten linearen Funktionale.

G. Köthe.

Kaplansky, Irving: Modules over operator algebras. Amer. J. Math. 75, 839—858 (1953).

Soient  $A$  une  $C^*$ -algèbre commutative à élément unité,  $H$  un  $A$ -module unitaire. Supposons  $H$  muni d'un produit scalaire  $(x, y)$  à valeurs dans  $A$ , linéaire en  $x$ , vérifiant  $(x, y) = (y, x)^*$ ,  $(x, x) \geq 0$ , et  $(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$ . Si  $H$  est complet pour la norme  $\|(x, x)\|^{1/2}$ ,  $H$  est dit un  $C^*$ -module sur  $A$ :  $H$  est „a kind of blend of a Hilbert space and a commutative  $C^*$ -algebra“. Un „opérateur borné“ dans un  $C^*$ -module est un endomorphisme (continu) pour la structure de module. — Quand  $A$  est une  $AW^*$ -algèbre (Kaplansky, ce Zbl. 42, 124), l' $A$  impose des conditions supplémentaires („a sort of algebraic substitute for a weak topology“) et obtient la notion de  $AW^*$ -module sur  $A$ . Etude des bases orthonormales,  $AW^*$ -sous-modules, sommes directes de  $AW^*$ -modules, fonctionnelles linéaires (à valeurs dans  $A$ ), etc., parallèlement à la théorie usuelle des espaces hilbertiens. — L'algèbre des opérateurs bornés d'un  $AW^*$ -module est une  $AW^*$ -algèbre de type I (Kaplansky, ce Zbl. 47, 357) (noter que cette  $AW^*$ -algèbre n'opère pas dans un espace hilbertien). Réciproquement, soit  $B$  une  $AW^*$ -algèbre de type I,  $e$  un projecteur abélien de  $B$  de support central 1; alors  $eB$  est de façon naturelle un  $AW^*$ -module sur  $eBe$  (telle est l'origine véritable des  $AW^*$ -modules), et tout opérateur borné sur ce module s'obtient par multiplication à droite par les éléments de  $B$ . — Applications: propriétés diverses des  $AW^*$ -algèbres de type I, principalement: toute dérivation d'une  $AW^*$ -algèbre de type I est intérieure; tout automorphisme d'une  $AW^*$ -algèbre de type I qui laisse fixes les éléments du centre est intérieur.

J. Dixmier.

Misonou, Yosinao: Operator algebras of type I. Kōdai math. Sem. Reports 3, 87—90 (1953).

Si une  $W^*$ -algèbre  $A$  est de type  $I_\alpha$ ,  $A'$  est de multiplicité  $\alpha$ . Une  $W^*$ -algèbre est de type  $I_\alpha$  si et seulement si  $A'$  est une „copie  $\alpha$ -uple“ d'une  $W^*$ -algèbre  $B$  pour laquelle  $B'$  est abélienne. Si  $A_1$  et  $A_2$  sont des  $W^*$ -algèbres de type I, si  $A_1$  (resp.  $A'_1$ ) est algébriquement isomorphe à  $A_2$  (resp.  $A'_2$ ), alors  $A_1$  est spatialement isomorphe à  $A_2$ .

J. Dixmier.

Umegaki, Hisaharu: Operator algebra of finite class. II. Kōdai math. Sem. Reports 2, 61—63 (1953).

L' $A$  complète la démonstration de certains résultats antérieurs (ce Zbl. 48, 349) en les précisant.

J. Dixmier.

Takeda, Ziro: Perfection of measure spaces and  $W^*$ -algebras. Kōdai math. Sem. Reports 1, 23—26 (1953).

Remarques diverses sur les espaces localement compacts mesurés parfaits au sens de I. E. Segal (ce Zbl. 42, 355). Relations avec les espaces „localisables“ (loc. cit.) et les  $W^*$ -algèbres abéliennes.

J. Dixmier.

Iséki, Kiyoshi: Sur les anneaux normés de Hilbert. II. Sur un théorème de M. W. Ambrose. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 545—546 (1953).

Fortsetzung der Untersuchungen über normierte Hilbertsche Ringe (dies. Zbl. 50, 110) im Spezialfall der Existenz eines Einselements. In einem solchen Ring existiert mindestens eine minimale Projektion, und der Ring selbst ist halbeinfach. Als Folgerung ergibt sich ein Satz von W. Ambrose über Alternativkörper.

H.-J. Kowalsky.

Rickart, C. E.: On spectral permanence for certain Banach algebras. Proc. Amer. math. Soc. 4, 191—196 (1953).

Let  $\Phi_{\mathfrak{A}}$  denote the set of all homomorphisms  $\varphi$  of a commutative Banach algebra  $\mathfrak{A}$  (over the real or complex field) into the complex field. With the usual weak topology for functionals,  $\Phi_{\mathfrak{A}}$  is a compact Hausdorff space. Following Šilov [Trudy mat. Inst. Steklov. 21 (1941)],  $\mathfrak{A}$  is said to be regular if, for every closed set  $F \subset \Phi_{\mathfrak{A}}$  and  $\varphi_0 \in \Phi_{\mathfrak{A}} - F$ , there exists  $u \in \mathfrak{A}$  such that  $u(\varphi)$  is constant on  $F$  with value different from  $u(\varphi_0)$ . Theorem 1. If  $\mathfrak{A}$  is semi-simple and regular and is algebraically embedded in a commutative Banach algebra  $\mathfrak{B}$ , then each element of  $\Phi_{\mathfrak{A}}$  can be extended to an element of  $\Phi_{\mathfrak{B}}$ . It follows that the spectrum of an element of  $\mathfrak{A}$

relative to  $\mathfrak{H}$  is identical with its spectrum relative to  $\mathfrak{B}$ . A further corollary is the minimal property, established by Kaplansky (this Zbl. 33, 187), of the natural norm in any algebra  $c(\Omega)$  of all real or complex valued functions continuous and vanishing at infinity on a locally compact Hausdorff space  $\Omega$ . Theorem 1 is also applied to the behaviour (under extension of the algebra) of the spectrum of an element in a non-commutative  $B^*$ -algebra. *F. F. Bonsall.*

**Kaplansky, Irving: Completely continuous normal operators with property  $L$ .** Pacific J. Math. 3, 721—724 (1953).

Zwei  $n$ -reihige quadratische Matrizen  $A$  und  $B$  besitzen die Eigenschaft  $L$ , wenn ihre Eigenwerte  $\lambda_i$  bzw.  $\mu_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) so numeriert werden können, daß für beliebiges  $\alpha$  die Eigenwerte von  $\alpha A + B$  gerade durch  $\alpha \lambda_i + \mu_i$  geliefert werden. T. S. Motzkin und O. Taussky (dies. Zbl. 48, 9) sowie N. A. Wiegmann (dies. Zbl. 50, 11) haben gezeigt, daß zwei Hermitesche bzw. normale Matrizen, die die Eigenschaft  $L$  besitzen, stets vertauschbar sind. Verf. dehnt dieses Resultat in gewissem Umfang auf den Fall komplexer Hilbertscher Räume aus. Für vollständig stetige normale Operatoren  $A$  und  $B$  wird in etwas abgewandelter Form die Eigenschaft  $L$  formuliert. Es ergeben sich dann die folgenden beiden Sätze: (1) Sind  $A$  und  $B$  vollständig stetige und selbstadjungierte Operatoren mit der Eigenschaft  $L$ , so sind sie vertauschbar. (2) Entsprechendes gilt auch allgemein für vollständig stetige normale Operatoren unter einer Zusatzvoraussetzung, die das Nichtverschwinden gewisser Eigenwerte betrifft. *H.-J. Kowalsky.*

**Schröder, Johann: Fehlerabschätzungen zur Störungsrechnung bei linearen Eigenwertproblemen mit Operatoren eines Hilbertschen Raumes.** Math. Nachr. 10, 113—128 (1953).

Die zuerst von F. Rellich (dies. Zbl. 23, 135) gegebenen, später von B. v. Sz. Nagy (dies. Zbl. 35, 200) verschärften Konvergenz- und Fehlerabschätzungen zur Störungsrechnung für selbstadjungierte Operatoren im Hilbertschen Raum (Störung eines isolierten Eigenwerts) werden hier für den Spezialfall  $A(\varepsilon) = A_0 + \varepsilon A_1$  noch einmal wesentlich verschärft. Im Gegensatz zu Rellich und Sz.-Nagy wird das gestörte Eigenelement  $q(\varepsilon)$  zu  $(q(\varepsilon), q(0)) = 1$  normiert und es werden zur Abschätzung noch die Größen  $(A_1 q(0), q(0))$  und evtl.  $A_1 q(0)$  herangezogen. Zum Beweise wird im wesentlichen die Methode von Rellich verwandt: Majorantengewinnung an Hand der Rekursionsformeln. — Auf eine Wiedergabe des — ohne Erklärungen — zwei Druckseiten umfassenden Hauptsatzes muß verzichtet werden. *F. W. Schäfer.*

**Kato, Tosio: On some approximate methods concerning the operators  $T^*T$ .** Math. Ann. 126, 253—262 (1953).

In Verallgemeinerung von Untersuchungen von Greenberg und Diaz (dies. Zbl. 31, 216, 310) wird im ersten Teil der Arbeit die Gleichung  $T^*T u = f$  betrachtet, wo  $T$  ein abgeschlossener linearer Operator mit Definitionsbereich  $\mathfrak{D}_T \subset \mathfrak{H}$  und Wertevorrat  $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{H}'$  ist ( $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}'$  Hilbert-Räume). Statt nun die Lösung  $u_0 = (T^*T)^{-1} f$  direkt zu untersuchen, führt Verf. die komplexe Zahl  $\xi = (u_0, g)$  ein, wo  $g$  ein vorgegebenes Element aus  $\mathfrak{H}$  ist, und leitet eine Formel zur Bestimmung eines Näherungswertes von  $\xi$ , mit genauer Fehlerabschätzung, her. Die hergeleitete Formel gestattet eine weitreichende Anwendung, da sich eine große Anzahl von Operatoren bei geeignetem  $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}'$  und  $T$  auf die Form  $T^*T$  bringen lassen. Im Anschluß an ein früher erzielttes Ergebnis [J. Phys. Soc. Japan 4, 334—339 (1949) und dies. Zbl. 50, 345] untersucht Verf. im zweiten Teil seiner Arbeit das Problem der Abschätzung der Eigenwerte und Eigenvektoren des (selbstadjungierten) Operators  $T^*T$ . Als Beispiel hierzu wird das Randwertproblem  $d^2y/dx^2 + \lambda^2 y = 0$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $y(0) = y(1) = 0$  betrachtet. *H. Pachale.*

**Silverstein, J. P. O.: On eigenvalues and inverse singular values of compact linear operators in Hilbert space.** Proc. Cambridge Philos. Soc. 49, 201—212 (1953).

Verf. betrachtet in einem Hilbert-Raum  $\mathfrak{H}$  die Gleichungen (1)  $(K - \lambda I)x = 0$  ( $\lambda \neq 0$ ) und (2)  $(K^*K - \sigma^2 I)y = 0$  ( $y \neq 0$ ) mit vollständigem Operator  $K$ . Werte  $\lambda$ , für die (1) lösbar ist, werden, wie üblich, Eigenwerte von  $K$  genannt,



Werte von  $\sigma$ , für die (2) lösbar ist, inverse singuläre Werte von  $K$ . Für die von Null verschiedenen nach fallendem Betrage geordneten Eigenwerte  $\kappa_1, \kappa_2, \dots$  bzw. inversen singulären Werte  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$  verschärft Verf. Resultate von S. H. Chang (dies. Zbl. 36, 201) und zeigt insbesondere: (I) Wenn für gewisses  $\rho > 1$  die Folge  $((\sigma_n/\sigma_{[n]}))$  nach oben beschränkt ist, dann gilt  $|\kappa_n| = O(\sigma_n)$ . (II) Sei  $((\mu_n))$  eine monoton abnehmende Folge mit der gleichen Eigenschaft wie  $((\sigma_n))$  aus (I); sei ferner  $\sigma_n = O(\mu_n)$ . Dann gilt  $|\kappa_n| = O(\mu_n)$ . Beim Beweis stützt sich Verf. auf folgende (unter den obigen Voraussetzungen bez. des Operators  $K$  und der Anordnung von  $((\kappa_n))$  und  $((\sigma_n))$  geltende fundamentale Ungleichung:  $\prod_{v=1}^n |\kappa_v| \leq \prod_{v=1}^n \sigma_v$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Beispiele zeigen, daß die erzielten Aussagen nicht wesentlich verschärft werden können. Schließlich bestätigt (II) die Vermutung von Hille-Tamarkin bez. der Verteilung der Eigenwerte von Kernen der Klasse  $\text{Lip}(s, \alpha, p'/p)$ , nämlich  $|\kappa_n| = O(n^{-s-\alpha+1+1/p})$  (dies. Zbl. 3, 400).  
H. Pachale.

**Vajnsberg, M. M.:** Die Existenz der Eigenfunktionen bei nicht-linearen Integraloperatoren mit nicht-positiven Kernen und bei dem Produkt eines selbstadjungierten und eines Potentialoperators. Mat. Sbornik, n. Ser. 32 (74), 665—680 (1953) [Russisch].

On trouve des nouveaux cas où l'on peut appliquer la méthode variationnelle, en se rapportant à un hyperboloïde (au lieu d'une sphère) dans l'espace réel de Hilbert. Soit le système

(1)  $\mu u_i(x) = \int K_i(x, y) g_i(u_1(y), \dots, u_n(y), y) dy$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  
 $K_i$  étant symétriques et ayant un nombre fini de valeurs propres  $> 0$  et un nombre quelconque de valeurs propres  $< 0$ ;  $g_i = \partial G / \partial u_i$ . On suppose que les noyaux générateurs de  $K_i$  convergent dans  $L_p$  ( $p \geq 2$ ) et que l'opérateur  $hu = (h_1 u, \dots, h_n u)$ , où  $h_i u = g_i(u_1(x), \dots, u_n(x), x)$ , défini dans  $L_{p,n}$  et à valeurs dans  $L_{q,n}$  ( $1/p + 1/q = 1$ ), est continu. Si

$$\lim_{\|u\| \rightarrow 0} \int G(u_1(y), \dots, u_n(y), y) dy = +\infty,$$

alors le système (1) admet dans  $L_{p,n}$  au moins un ensemble dénombrable de valeurs propres à norme croissante. Le résultat est généralisé aux opérateurs  $BF$ , avec la condition correspondante pour  $F$ ,  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \int \langle F(t, x), x \rangle dt = +\infty$  ( $B$  étant autoadjoint et ayant des valeurs propres positives et négatives).  
G. Marinescu.

**Davis, Philip:** Completeness theorems for sets of differential operators. Duke math. J. 20, 345—357 (1953).

Gewisse spezielle Fälle des folgenden allgemeinen Problems werden untersucht: Sei  $A$  eine Klasse von Funktionen  $f(z)$ , welche in der Umgebung von  $z = 0$  regulär sind. Sei weiter  $L_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) eine Menge von linearen Differentialoperatoren:

$L_n(f) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_{nk}}{k!} f^{(k)}(0)$ . Läßt sich eine Unterklasse  $S$  von  $A$  bestimmen, welche für die Funktionalen  $\{L_n\}$  eine Eindeigkeitsklasse ist, d. h. so daß aus  $L_n(f) = 0$  ( $n = 0, 1, \dots$ ;  $f \in S$ )  $f = 0$  folgt? Verf. wendet unendliche Systeme von linearen Gleichungen an, um notwendige und hinreichende Bedingungen zu finden, damit gewisse spezielle Klassen  $S$  Eindeigkeitsklassen für eine vorgegebene Menge von linearen Funktionalen seien.  
V. Paatero.

**Michal, A. D.:** Completely integrable partial differential equations in normed linear spaces. Proc. nat. Acad. Sci. USA 39, 1089—1094 (1953).

In the equation  $z(x, y; \delta x) = F(x, y, z, z_y, \delta x)$  the variables have values in complex Banach spaces;  $z$  is a function of  $x$  and  $y$ ,  $z(x, y; \delta x)$  is the Fréchet differential of  $z$  for the increment  $\delta x$  of  $x$ ,  $z_y$  is the partial Michel-Fréchet derivative of  $z$  with respect to  $y$ , and  $F$  is a prescribed function, linear in its fifth variable. Necessary conditions for complete integrability are given, and sufficient conditions for the existence of a unique continuous solution  $z(x, y)$  with an initial condition of the form  $z(x_0, y) = z_0(y)$ , where  $z_0(y)$  is analytic.  
J. D. Weston.

**Schützenberger, Marcel Paul:** Une interprétation de certaines solutions de l'équation fonctionnelle  $F(x+y) = F(x)F(y)$ . C. r. Acad. Sci., Paris **236**, 352—353 (1953).

Es seien  $x, y$  Variablen in einer nichtkommutativen Banachschen Algebra  $B$  derart, daß  $yx = uxy$ , wo  $u$  ein invertierbares Zentrums-element ist. Verf. betrachtet die Gleichung  $\text{Exp}_u(ax)\text{Exp}_u(by) = \text{Exp}_u(ax + by)$ , wobei  $\text{Exp}_u(x)$

die Form  $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a_1 a_2 \dots a_n}$  habe und  $a, b$  Zentrums-elemente seien. Als Lösung

erhält er  $\text{Exp}_u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]_u!} \left( [0]_u! = 1, [n]_u! = \prod_{i=1}^n \frac{1-u^i}{1-u} \right)$ . Es gilt

$\text{Exp}_u(x)\text{Exp}_u(-x) = 1$ . Einige Erklärungen dieser Funktion werden angegeben.

K. Asano.

### Praktische Analysis:

**Herzberger, M.:** Approximate methods in mathematics. Proc. nat. Acad. Sci. USA **39**, 853—860 (1953).

Wenn man irgendwelche Approximationen mittels Potenzreihen einer oder mehrerer Variablen ausführt, ist es gut, ein für allemal aufgestellte Matrizen zu haben, die das Rechnen mit den genannten Reihen, insbesondere das Multiplizieren, erleichtern.

E. J. Nyström.

**Sarafyan, Diran:** Nested series, computation of square roots and solution of third degree equations. Math. Mag. **27**, 19—36 (1953).

Verf. behandelt unendliche Funktionenfolgen  $\{c f[x + c f[x + \dots]]\}$  (nested series) mit der reellen Konstanten  $c$ . Der Ablauf der gleichzeitigen geradlinigen Bewegung zweier Punkte von 2 getrennten Anfangspunkten aus nach verschiedenen Gesetzen läßt sich durch eine solche Funktionenfolge darstellen. Die Folge konvergiert, wenn bei der zugeordneten Bewegung die Punkte sich treffen; die Lage des Treffpunktes entspricht dem Grenzwert der Folge. Durch Annahme einfacher Bewegungsgesetze kommt Verf. zu Lösungen von quadratischen Gleichungen (z. B. auch zur Kettenbruchentwicklung für Quadratwurzeln) und zu Lösungen für die reduzierte kubische Gleichung.

R. Ludwig.

**Baur, Arnold:** Die näherungsweise Lösung von Gleichungen. Math.-phys. Semesterber. **3**, 235—237 (1953).

**Baidaff, Bernardo L.:** Eine Methode zur Lösung von Systemen von Gleichungen ersten Grades. Bol. mat. **26**, 6—11 (1953) [Spanisch].

**Caprioli, Luigi:** Sulla risoluzione dei sistemi di equazioni lineari con il metodo di Ciminno. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **8**, 260—265 (1953).

Verf. weist darauf hin, daß es bei einem Iterationsprozeß nicht nur auf die Zahl der Schritte ankommt, die zur Erreichung einer bestimmten Genauigkeit nötig sind, sondern auch auf die Einfachheit der Rechnung, die jeder Schritt erfordert. Das ansich schlecht konvergierende Verfahren von Ciminno wird nun derartig umgeformt, daß jeder Schritt in zwei aufgelöst wird. Für jeden ist im wesentlichen nur die Bildung der Summe von Produkten erforderlich, so daß das Verfahren in dieser Form gut für die Durchführung unter Benutzung von Rechenmaschinen oder elektronischen Rechenautomaten geeignet ist. Dabei wird die Langsamkeit der Konvergenz im gewissen Grade durch die Schnelligkeit der Durchführung der einzelnen Schritte kompensiert.

Fr.-A. Willers.

**Wegner, U.:** Bemerkungen zur Matrizentheorie. Z. angew. Math. Mech. **33**, 262—264 (1953).

A sei eine  $n$ -reihige quadratische Matrix mit komplexen Elementen,  $q(x) = \sum_{v=0}^n (-1)^v c_v x^{n-v}$  ( $c_0 = 1$ ) ihr charakteristisches Polynom,  $h_x(x)$  und  $x_x$  die zu  $q(x)$  gehörigen Horner'schen Polynome bzw. Horner'schen Zahlen, rekursiv erklärt durch  $h_{x+1}(x) = x h_x(x) - (-1)^x c_{x+1}$  [ $h_0(x) = 1$ ],



$x = 0, 1, 2, \dots]$  bzw. durch  $x_\kappa - c_1 x_{\kappa-1} + c_2 x_{\kappa-2} \mp \dots \pm c_\kappa = 0$  ( $\kappa = 1, 2, \dots$ ), und  $x_0 = 1$ ; sei weiter  $H_\kappa = h_\kappa(A)$ ,  $H_0 = E$ . Verf. zeigt, wie man die einschlägigen Matrizenrechnungen, wie die Bestimmung von  $(\lambda E - A)^{-1}$ ,  $g(A)$  [wo  $g(\lambda)$  eine in  $\lambda$  ganze Funktion ist] usw. auf die rekursive Berechnung der  $H_\kappa$  ohne Kenntnis der Zahlen  $c_\kappa$  (die von selbst mit herauskommen) zurückführen kann, was für die Benutzung elektronischer Maschinen wichtig ist:

$$(1) H_\kappa = A H_{\kappa-1} - \kappa^{-1} \text{Spur}(A H_{\kappa-1}) \cdot E, \quad (2) c_\kappa = [(-1)^{\kappa-1}/\kappa] \text{Spur}(A H_{\kappa-1}) \quad (\kappa = 1, 2, \dots)$$

und damit  $\varphi(1) = 1 - \sum_{\kappa=1}^n (-1)^\kappa c_\kappa = 1 - \sum_{\kappa=1}^n \frac{1}{\kappa} \text{Spur}(A H_{\kappa-1})$ . Speziell kann man damit,

falls  $\varphi(1) \neq 0$ , die Matrix  $B = (E + A)/(E - A)$  aus den  $H_\kappa$  übersichtlich aufbauen. Und da für die Eigenwerte  $\lambda_i^A$  von  $A$  und  $\lambda_i^B$  von  $B$  gilt (3): genau dann ist  $\text{Re } \lambda_i^A < 0$  falls  $|\lambda_i^B| < 1$  ist, so kann auf dem Weg über  $B$  mit der Feststellung  $|\lambda_{\max}^B| < 1$  (die iterativ einfach getroffen werden kann) die Stabilität der Wurzeln von  $A$  durch sehr einfache und gleichförmige Rechenschritte aus (1) (2) und (3) entschieden werden. — Leider ist die elegante Darstellung mit zahlreichen Druckfehlern durchsetzt.

E. Mohr.

**Unger, Heinz:** Zur Praxis der Biorthonormierung von Eigen- und Hauptvektoren. Z. angew. Math. Mech. 33, 319—331 (1953).

Bei der numerischen Behandlung der Matrizen-Eigenwertaufgabe  $(\mathfrak{A} - \lambda \mathfrak{E}) \mathfrak{x} = 0$  benötigt man im Zusammenhang mit der Entwicklung eines beliebigen Vektors  $\mathfrak{z}$  nach Eigenvektoren von  $\mathfrak{A}$  ein System biorthonormaler Vektoren  $\mathfrak{x}_i, \mathfrak{y}_i$  mit der Eigenschaft  $\mathfrak{y}_i' \mathfrak{x}_k = \delta_{ik}$ . Im Falle durchweg linearer Elementarteiler sind  $\mathfrak{x}_i$  bzw.  $\mathfrak{y}_i$  Eigenvektoren der Matrix  $\mathfrak{A}$  bzw. der Transponierten  $\mathfrak{A}'$ . Bei nichtlinearen Elementarteilern aber muß das dann unvollständige System der Eigenvektoren durch Hinzunahme sogenannter Hauptvektoren zu einem vollständigen Biorthonormalsystem ergänzt werden. Zum Aufbau eines solchen Systems wird hier ein schematisch verlaufendes Vorgehen angegeben, das den modernisierten Gaußschen Algorithmus und seine Ausdehnung auf Untermatrizen benutzt und sowohl bei linearen als auch bei nichtlinearen Elementarteilern zum Ziele führt. Auch auf den Fall komplexer Eigenwerte ist es anwendbar.

R. Zurmühl.

**Collatz, Lothar:** Einige Anwendungen funktionalanalytischer Methoden in der praktischen Analysis. Z. angew. Math. Phys. 4, 327—357 (1953).

Ziel dieses zusammenfassenden Berichtes ist es, durch Hinweis auf die Erfolge funktionalanalytischer Methoden in der praktischen Analysis, insbesondere beim Problem der Fehlerabschätzung, weitere Kreise anzuregen, mehr als bisher Fehlerabschätzungen durchzuführen, Erfahrungen zu sammeln und den Wirkungsbereich der Methoden zu vergrößern. Vollständigkeit ist nicht angestrebt, z. B. werden Eigenwertaufgaben nicht behandelt. — Inhalt: 1. Einige Grundbegriffe aus der Funktionalanalysis. 2. Der allgemeine Satz über das Iterationsverfahren. 3. Lineare und nichtlineare Gleichungssysteme (Iteration in Gesamt- und Einzelschritten). 4. Das gewöhnliche und vereinfachte Newtonsche Verfahren bei nichtlinearen Gleichungssystemen. 5. Anfangswertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. 6. Randwertaufgaben. 7. Allgemeiner nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichungen. 8. Operatoren monotoner Art. 9. Gleichungssysteme monotoner Art. Einschließung bei der Relaxation. 10. Randwertaufgaben monotoner Art. 11. Rand- und Gebietsmethoden. 12. Das Newtonsche Verfahren bei nichtlinearen Randwertaufgaben. 13. Anfangswertaufgaben bei hyperbolischen Differentialgleichungssystemen. 14. Integralgleichungen.

J. Weissinger.

**Sterne, Theodore E.:** The accuracy of ordinary differential equations. Math. Tables Aids Comput. 7, 159—164 (1953).

Ist (\*)  $dx_i/dt = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j(t) + b_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) ein System linearer Differentialgleichungen und  $d\lambda_i/dt = -\sum_{j=1}^n a_{ji}(t) \lambda_j(t)$  das hierzu adjungierte System, so gilt

$$(**) \quad \sum_{i=1}^n x_i(t_1) \lambda_i(t_1) = \sum_{i=1}^n x_i(t_0) \lambda_i(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n b_i(t) \lambda_i(t) dt.$$

Man kann (\*\*) benutzen, um Abrundungs- und Verfahrensfehler bei der numerischen Integration von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen in der Form des auf der rechten Seite von (\*\*) auftretenden Integrals darzustellen. Die Fehler genügen

dem zu dem gegebenen Gleichungssystem gehörenden variierten System linearer Differentialgleichungen (\*). Hierbei sind die  $b_i(t)$  dem jeweiligen Verfahren entsprechend passend zu wählen, und bei der Bestimmung von  $x_v(t_1)$  müssen die Lösungen des zu (\*) adjungierten Systems die Bedingungen  $\dot{\lambda}_v(t_1) = 1$ ,  $\dot{\lambda}_\mu(t_1) = 0$  für  $\mu \neq v$  erfüllen.

W. Schulz.

**Opitz, Günter:** Zur genäherten Integration gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen höherer Ordnung. Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden 2, 405—408 (1953).

Umschreibung der Anfangswertaufgabe in eine Volterrasche Integralgleichung für  $y^{(n)}(x)$  und deren näherungsweise Lösung. Vergleich mit der Anlaufrechnung des Adams-Verfahrens durch Umformung mehrfacher Integrale in einfache. Angabe einiger Koeffizienten für die mehrfache Integration.

H. Witting.

**Ljusternik, L. A.:** Über die Eigenwerte der Differenzenapproximationen des Laplaceschen Operators. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 89, 613—616 (1953) [Russisch].

Bei Annäherung partieller Differentialoperatoren durch Differenzenoperatoren und iterativer Auflösung der zugehörigen finiten Gleichungen ist für die Konvergenz die Verteilung der Eigenwerte des Differenzenoperators entscheidend. Für einige Annäherungen werden Eigenwerte angegeben. Den Gleichungen  $\Delta q(x, y, t) = \partial q / \partial t$  und  $\Delta q = \partial^2 q / \partial t^2$  werden finite Gleichungen mit den Maschenweiten  $h$  in  $x$ - und  $y$ -Richtung bzw.  $\tau$  in  $t$ -Richtung gegenübergestellt und bei  $\tau = \alpha h^2$  bzw.  $\tau = \beta h$  die Werte  $\alpha_0, \beta_0$  angegeben mit der Eigenschaft, daß das Verfahren für kleinere Werte von  $\alpha$  bzw.  $\beta$  stabil und für größere Werte instabil wird. Z. B. ist bei  $\Delta q = \partial q / \partial t$  und der finiten Gleichung

$$\frac{1}{\tau} [q(x, y, t + \tau) - q(x, y, t)] = \frac{1}{M h^2} (S - E) q = \frac{1}{M h^2} \sum_i c_i q_i$$

(die Summe ist über gewisse Nachbarkunkte  $(x, y, t)$  zu erstrecken und  $c_i$  sind Konstanten)  $\alpha_0 = 2 M (1 - \mu)$ , wo  $M$  eine vom Gitter abhängige Konstante und  $\mu$  der kleinste (negative) Eigenwert des Operators  $S$  ist.  $E$  bedeutet den Einheitsoperator.

L. Collatz.

**Müller, Heinz:** Zur genäherten konformen Abbildung regulärer Polygone. Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden 2, 393—400 (1953).

**Stiefel, E.:** Zur Interpolation von tabellierten Funktionen durch Exponentialsummen und zur Berechnung von Eigenwerten aus den Schwarzschen Konstanten. Z. angew. Math. Mech. 33, 260—262 (1953).

Hier wird ein Quotienten-Differenzenschema entwickelt, welches für Funktionen von der Form (\*)  $f(x) = a_1 \lambda_1^x + a_2 \lambda_2^x + \dots + a_n \lambda_n^x$  Ähnliches leistet wie das übliche Differenzenschema es für Polynome  $g(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$  tut. Der Aufbau des Schemas geschieht wie folgt (Maschenweite  $h = 1$ ): die erste Spalte enthält die  $f_i^{(1)}$  ( $f^{(1)} = f$ ;  $i = 0, 1, 2, \dots$ ), die zweite die Quotienten  $Q_i^{(1)} = f_{i+1}^{(1)} / f_i^{(1)}$ , und die dritte deren erste Differenzen  $I_i^{(1)} = Q_{i+1}^{(1)} - Q_i^{(1)}$ , womit der erste Abschnitt erreicht ist; jetzt wird aus  $f^{(1)}$  die Funktion  $f^{(2)}$  mit  $f_i^{(2)} = f_{i+1}^{(1)} \cdot I_i^{(1)}$  gebildet und analog verfahren, also die  $Q_i^{(2)}$  und die  $I_i^{(2)}$  berechnet, und im Gegensatz zum ersten Abschnitt noch eine weitere Spalte angefügt, welche die sogenannten korrigierten Differenzen  $I_i^{(2k)} = I_i^{(2)} + I_{i+1}^{(1)}$  enthält, womit der zweite Abschnitt erreicht ist; auf ihn folgt ein analoger dritter Abschnitt, usw. Dann gelten die Sätze, wobei angenommen ist, daß die  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  reell und voneinander verschieden sind und  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$  ist. (1) Hat  $f(x)$  die Gestalt (\*), so verschwindet die  $n$ -te korrigierte Differenz identisch; (2) Die  $k$ -te Quotientenspalte strebt nach  $\lambda_k$ :  $Q_i^{(k)} \rightarrow \lambda_k$  für  $i \rightarrow \infty$ . (3) Für die durch  $p_i^{(0)} = 1$ ,  $p_i^{(k)}(\lambda) = \lambda \cdot p_{i-1}^{(k-1)}(\lambda) - Q_i^{(k-1)} \cdot p_{i-1}^{(k-1)}(\lambda)$  bestimmten Polynome gilt:  $p_i^{(k)}(\lambda) \rightarrow (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_k)$  für  $i \rightarrow \infty$ , und speziell sind alle  $p_i^{(n)}(\lambda) = F(\lambda) = \prod_{v=1}^n (\lambda - \lambda_v)$ . Diese Sätze werden angewandt auf die Aufgabe, die als verschieden angenommenen (reellen) Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  einer  $n$ -reihigen symmetrischen und positiv-definiten Matrix  $A$  zu bestimmen ( $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots$ ).



$\dots > \lambda_n > 0$ ).  $e_1, e_2, \dots, e_n$  sei das zugehörige orthonormierte  $n$ -Bein der Eigenvektoren. Mit  $a = \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu e_\nu$  als Ausgangsvektor bilde man  $A^i a = \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu \lambda_\nu^i e_\nu$  und die Schwarzschen Kon-

stanten  $(**) f_i = A^i a \cdot a = \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu^2 \lambda_\nu^{2i}$ . Faßt man jetzt in  $(**)$   $i$  als unabhängige Variable auf, so ist  $(**)$  eine Funktion der obigen Form  $(*)$ , und die Anwendung der Sätze (1) (2) (3) auf die durch die  $f_i$  gegebene Funktion ergibt die folgenden analogen Sätze: (1') Die  $n$ -te korrigierte Differenz verschwindet. (2') Der  $k$ -te Eigenwert ist der Grenzwert der  $k$ -ten Quotientenspalte. (3') Das nach (3) konstruierte Polynom  $F(\lambda)$  ist das charakteristische Polynom von  $A$ . — Da die erste  $Q$ -Spalte einfach die Rayleigh-Quotienten enthält, liefert (2') eine Ausdehnung des Rayleighschen Prinzips auf höhere Eigenwerte. — Schließlich einige Hinweise auf naheliegende Ausdehnungen, z. B. selbstadjungierte Eigenwertprobleme bei Differentialgleichungen. Das geschilderte Quotienten-Differenzenverfahren, das seine endgültige Form von H. Rutishauser erhalten hat, stellt zweifellos eine ebenso schöne wie weittragende Entdeckung dar, die auch für den Einsatz von Rechenmaschinen besonders geeignet ist. *E. Mohr.*

**Grossman, D. P.:** Über Formeln zur numerischen Differentiation. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 89, 777—779 (1953) [Russisch].

In der allgemeinen Formel für numerische Differentiation

$$h^k f^{(k)}(a) = \sum_{i=1}^k c_i^{(k)} f(a + t_i h) + R_k^{(n)}, \quad 0 < k < n,$$

hatte Š. E. Mikeladze [Uspechi mat. Nauk 3, Nr. 6 (28), 3—88 (1948)] die Koeffizienten  $c_i^{(k)}$  als Funktionen von  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$  und das Restglied  $R_k^{(n)}$  als Funktion von  $(h, t_1, t_2, \dots, t_n)$  für den Fall ausgedrückt, daß die Punkte  $a + t_i h$  symmetrisch zu  $a$  liegen. Dem Verf. gelang die Berechnung der Koeffizienten und des Restgliedes für den allgemeinen Fall einer beliebigen Verteilung der Punkte  $a + t_i h$ . In den (ohne Beweis) angegebenen Formeln für die Koeffizienten spielen eine wesentliche Rolle die elementarsymmetrischen Funktionen von  $n$  Größen, deren  $i$ -te mit  $\sigma_i^n$  bezeichnet wird. Das Restglied wird erstens für komplexe, in einer Umgebung von  $a$  analytische Funktionen  $f(z)$  bestimmt, wobei die Größen  $t_i$  komplex sein dürfen, während  $h$  reell ist, zweitens für reelle Funktionen  $f(x)$ , die in einer (reellen) Umgebung von  $a$  alle Ableitungen bis zu einer Ordnung  $l \geq n$  besitzen. Für  $k = 0$  gehen die Formeln in die der gewöhnlichen Interpolation über. Schließlich werden noch Bedingungen für die Verteilung der Größen  $t_i$  angegeben, die es ermöglichen, die Größenordnung des Restgliedes unter  $h^n$  herabzudrücken, und es wird ein entsprechendes Beispiel geliefert. *K. Bögel.*

**Lotkin, M.:** A new integration procedure. J. Math. Physics 32, 171—179 (1953).

Die in einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 46, 135) aufgestellte Formel für numerische Quadratur einer Funktion wird benutzt für Fälle, in denen der Integrand nur für äquidistante Argumente vertafelt vorliegt. Die benötigten Ableitungen werden wie üblich aus zentralen Differenzen der Integrandenfunktion aufgebaut. Verf. äußert sich nicht über die bekannte Erscheinung des Streuens höherer Differenzen infolge von Rundungsfehlern, die solche Verfahren oft unbrauchbar machen. In den Beispielen werden nur vielziffrig vertafelte Funktionen verwendet, so daß der Effekt noch nicht auftritt. Die Fehlerabschätzungen ergeben Restglieder von ähnlicher Größe wie die bekannten Formeln gleicher Ordnung, wobei auch hier zur Integration selbstverständlich Funktionswerte außerhalb des Integrationsintervalls verwendet werden müssen. *H. Wundt.*

**Georgiev, G.:** Formeln der mechanischen Quadratur mit minimaler Gliederanzahl bei mehrfachen Integralen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 83, 521—524 (1952) [Russisch].

**Georgiev, G.:** Mechanische Quadraturformeln mit gleichen Koeffizienten. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 89, 389—392 (1953) [Russisch].

In der erstgenannten Note betrachtet Verf. Quadraturformeln der Gestalt

$\iint_{(R)} \varphi(x, y) dx dy = \sum_i \lambda_i \varphi(x_i, y_i)$  bzw.  $\iiint_{(R)} \varphi(x, y, z) dx dy dz = \sum_i \lambda_i \varphi(x_i, y_i, z_i)$ , die für alle Polynome höchstens zweiten Grades gelten, und bestimmt Gliederzahl  $i$  ( $\leq 4$ ), die von  $\varphi$  freien Gewichte  $\lambda_i$  und die ausgezeichneten Stellen  $(x_i, y_i)$  bzw.  $(x_i, y_i, z_i)$ . In der zweiten Note wird das analoge Problem unter den zusätzlichen Voraussetzungen, daß die Polynome  $\varphi$  höchstens dritten Grades sind und die  $\lambda_i$  einander gleich sein sollen, gelöst. Hierfür wird  $i \leq 6$ . H. Bilharz.

**Eltermann, Heinz:** Ein Beitrag zur numerischen Integration bei nicht gleichabständigen Abszissen und zur Berechnung von Kurvenintegralen. Z. angew. Math. Mech. **33**, 254—255 (1953).

Zur näherungsweisen Berechnung bestimmter Integrale mit Hilfe von in den Abszissen linearen Gewichten legt Verf. eine Parameterdarstellung

$$J \equiv \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x(t)) \frac{dx}{dt} dt$$

zugrunde und erhält mit den Ansätzen  $\bar{f}(t) = \sum_v \bar{f}_v \varphi_v(t)$ ,  $x(t) = \sum_\mu x_\mu \psi_\mu(t)$ ,  $dx dt = \sum_\mu x_\mu \psi'_\mu(t)$ ;  $\varphi_v(t_v) = \psi_v(t_v) = 1$  und  $\varphi_v(t_\mu) = \psi_v(t_\mu) = 0$  für  $\mu \neq v$  für  $J$  einen Näherungswert  $\bar{J}$  in der Gestalt

$$\bar{J} = \int_a^b \bar{f}(t) x'(t) dt = \sum_{v, \mu} \bar{f}_v x_\mu g_{v\mu} = \sum_v \bar{f}_v g_v$$

mit  $g_{v\mu} = \int_a^b \varphi_v \psi'_\mu dt$ ,  $g_v = \sum_\mu g_{v\mu} x_\mu$  ( $\mu, v = 0, 1, \dots, n$ ). Vier Beispiele werden hierzu mitgeteilt, Fehlerabschätzungen stehen noch aus. H. Bilharz.

**Abramowitz, Milton:** Evaluation of the integral  $\int_0^\infty e^{-u^2 - x^2 u} du$ . J. Math. Physics **32**, 188—192 (1953).

Die durch  $f_m(x) = \int_0^\infty u^m e^{-u^2 - x^2 u} du$  definierten Funktionen treten im Zusammenhang mit Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilungen physikalischer Partikel auf. Für den Fall  $m = 0$  wird  $f_0(x)$  für kleine  $x$ -Werte durch eine Potenzreihe, für große durch eine asymptotische Entwicklung dargestellt. Die hier angewandten Methoden sind auch auf den allgemeinen Fall  $f_m(x)$  übertragbar, für den die asymptotische Reihe nebst einigen Beziehungen zwischen ihren Koeffizienten angeführt wird. R. Zurmühl.

**Chang, Han and V. C. Rideout:** A generalization of modulation spectra. Quart. appl. Math. **11**, 87—100 (1953).

Wenn zwei oder mehr periodische Vorgänge irgendwie kombiniert werden, etwa durch Modulation der Amplituden oder Phasen usw., erscheinen im Spektrum der Kurve außer der Frequenz der ursprünglichen Funktion (der „Senderfrequenz“) und der modulierenden Frequenz noch zusätzliche Frequenzen, die meist durch lineare Kombinationen der erzeugenden Frequenzen entstehen. Die Theorie dieser Erscheinung wird für verschiedene Fälle durchgeführt und durch eine Betrachtung über den Anteil der Modulation an der Gesamtenergie des Vorganges ergänzt. K. Stumpf.

● **Belgrano, J. C., A. Lopez Nieto und J. M. Urcelay:** Leitfaden der Nomographie. Madrid: Instituto Técnico de la Construcción y del Cemento 1953. XII, 388 S. [Spanisch].

Verf. behandeln ausführlich das Gesamtgebiet der Nomographie, und zwar sowohl die allgemein bekannten Methoden als auch manches Neue. An 84 meist neuen Beispielen aus den Gebieten Hydraulik, Eisenbetonbau, Statik, Elektrotechnik, Festigkeitstheorie, Mathematik usw., werden die behandelten Verfahren erläutert. Die Abbildungen sind verkleinerte



Wiedergaben (Maßstab angegeben) praktisch brauchbarer Nomogramme. — Inhalt: Die folgenden drei Probleme stehen im Vordergrund: 1. Bestimmung der kanonischen Form eines Nomogramms (Aufstellung der sog. „Schlüsselgleichung“). 2. Die analytische Identifikation, d. h. die Aufstellung notwendiger und hinreichender Bedingungen, die eine vorliegende Funktion erfüllen muß, damit sie auf eine gegebene kanonische Form gebracht werden kann (praktisch von geringerer Bedeutung). 3. Identifikation bei Funktionentafeln, d. h. Untersuchung, ob eine als Tafel mit mehreren Eingängen vorliegende (z. B. empirische) Funktion näherungsweise durch ein Nomogramm dargestellt werden kann. — Kap. I.: Allgemeines, bes. auch die Anamorphose; — Kap. II: Netztafeln für 3 und mehr Veränderliche; — Kap. III: Fluchtlinientafeln. Neben den klassischen Typen werden hier, zum Teil neu, solche behandelt, bei denen die Fluchtlinie Tangente an ein bis drei Kurvenscharen ist. Die weite Verwendungsmöglichkeit rechtfertigt die ausführliche Darstellung. Zusammensetzung mehrerer Nomogramme erfolgt durch Zapfenlinien und Kurvenscharen, die tangiert werden. — Kap. IV: Nomogramme mit transparenten Ableseblättern, auf denen zwei sich schneidende Geraden, eine Parallelschar usw. aufgezeichnet sind. — Kap. V: Nomogramme mit Wanderkurvenblättern. — Den Verf. ist es gelungen, in dem Buch in einheitlicher Darstellung unter Einbeziehung eigener Untersuchungen all das zusammenzutragen, was für den Praktiker wichtig ist und über das hinausgeht, was üblicherweise in Büchern gleicher Art enthalten ist.

R. Ludwig.

**Vil'ner, I. A.: Algebraische Lösung des Problems der Anamorphose von Funktionen in invarianter Form.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **90**, 5—8 (1953) [Russisch].

Betrachtet wird die Anamorphose einer Funktion  $F$ , die von drei abstrakten Variablen  $z_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) und einer beliebigen Zahl von Parametern  $a_1, a_2, a_3, \dots$  abhängt. Es sollen drei Vektorfunktionen  $a_1, a_2, a_3$ , bestimmt werden, die von  $z_1, z_2, z_3$  richtungsabhängig sind, also  $F = (a_1 a_2 a_3)$ . Die Natur der Variablen  $z_i$  bleibt völlig willkürlich, sie können beliebige abstrakte Mengen  $Z_i$  durchlaufen. Für die Nomographie ist dabei von praktischer Wichtigkeit der Fall, daß die  $Z_i$  mehrdimensionale Vektorgrößen  $Z_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{it_i})$  sind. Verf. gibt notwendige und hinreichende Bedingungen für den Spezialfall an, daß, wenn  $a = a_3$ ,  $b = (a_1 a_2)$  ist,  $F = a b$  in der Form eines skalaren Produktes geschrieben werden kann und  $a$  nur von  $z_3$ ,  $b$  nur von der Gesamtheit der Variablen  $z_1$  und  $z_2$  abhängig ist. Verf. fordert keinerlei Voraussetzungen über Differenzierbarkeit und Stetigkeit.

R. Ludwig.

**Gregg, C. V.: Reciprocal nomograms.** Math. Gaz. **37**, 90—95 (1953).

Verf. leitet elementargeometrisch Formeln für Nomogramme der Form  $l/x + m/y + n/z = 0$  her. Angegeben werden Fluchtliniennomogramme mit sich schneidenden geradlinigen Skalen linearer oder projektiver Teilung und ein Fluchtliniennomogramm mit einer geradlinigen Skala für  $y$  und einer Kreisskala mit gemeinsamer Teilung für  $x$  und  $z$ .

R. Ludwig.

● **Rohrberg, Albert: Theorie und Praxis des logarithmischen Rechenstabes.** 11. Aufl. (Math.-phys. Bibliothek, Reihe I, Nr. 23.) Stuttgart: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1953. 64 S.; kart. DM 2,50.

Gründliche Umarbeitung der früheren Auflagen. Eine Anleitung, die zu den jetzt üblichen Normalformen von Rechenstäben paßt.

**Lesemann, Klaus-Jürgen: Bearbeitung der nichtlinearen Differentialgleichung eines Diffusionsvorganges mit einer Integrieranlage.** Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden **2**, 381—383 (1953).

**Mitrovic, Dusan: Sur un servomécanisme non linéaire à plusieurs variables indépendantes.** C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 1209—1211 (1953).

Elektronische Integrieranlagen können vorgegebene Bedingungen für die Lösungskurve einer Differentialgleichung nur an der Stelle  $t = 0$  erfüllen. Verf. beschreibt eine Ergänzung zu einer Integrieranlage, welche die Gestalt eines Servomechanismus hat und die Anfangsbedingungen bei  $t = 0$  automatisch so lange verändert, bis vorgegebene Bedingungen bei  $t = t_1$  erfüllt sind. (Das gleiche Ziel könnte auch mit einer gewöhnlichen Integrieranlage erreicht werden, indem man rückwärts von  $t_1$  aus integriert.) Die Gleichung für den entstehenden Einschwingvorgang ist gegeben; die Stabilität ist nicht diskutiert. Merkwürdigerweise ist der

viel interessanter Fall eines Randwertproblems, bei dem diese Anordnung grundsätzlich Neues leisten würde, nicht erwähnt. *Ambros. Speiser.*

**Sassenfeld, Helmut M.:** Über die Bedeutung von Lochkartenmaschinen für die Praktische Analysis. *Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden* 2, 409—414 (1953).

**MacWilliams jr., W. H.:** Computers-past, present and future. *Electrical Engineering* 72, 116—121 (1953).

**Michaelson, R. L.:** Large-scale electroning digital computing machines. *J. Inst. Actuaries* 79, 274—322 (1953).

**Gluck, S. E.:** The electronic discrete variable computer. *Electrical Engineering* 72, 159—162 (1953).

**Welby, B. G.:** Intermittent-feed computer tape reader. *Electronics* 26, 115—117 (1953).

**Young, F. H.:** The NOTS REAC. *Amer. math. Monthly* 60, 237—243 (1953).

Beschrieben werden die Rechenelemente eines elektronischen Analogie-Rechengerätes (Reeves Electronic Analog Computer of the Naval Ordnance Test Station). — Integration in bekannter Weise durch Netzwerk aus Widerstand in Reihe mit Kondensator und Gleichstromverstärker hoher Verstärkung und negativer Rückkopplung parallel zum Kondensator. Integration einer Summe durch entsprechendes Netzwerk mit mehreren Eingängen. Addition mehrerer Veränderlicher mit ebensolchem Netzwerk, bei dem der Kondensator durch einen Widerstand ersetzt ist. Multiplikation durch Potentiometer an einer dem einen Faktor proportionalen Spannung, dessen Abgriff durch Nullmotor und Verstärker proportional dem anderen Faktor gesteuert wird. Division mit Multiplizierelement und zusätzlichem Netzwerk mit Verstärker. Eingabe empirisch gewonnener Funktionen durch Elektronenstrahlabtaster mit Kurvenblende und Fotozelle oder durch Widerstandsabtaster. Als Ausgang Koordinatenschreiber oder Vierkanal-Hitzdraht-Registriergerät. — Gezeigt wird als Beispiel die Blockschaltung zur Lösung der Differentialgleichung  $d^2x/dt^2 + dx/dt + x = f(t)$ . — Das Gerät enthält zur Zeit 14 Integratoren, so daß 7 simultane Differentialgleichungen zweiter Ordnung gelöst werden können. Die Genauigkeit entspricht der Rechenschiebergengenauigkeit. *W. Breitling.*

**Wilkes, M. V. and J. B. Stringer:** Micro-programming and the design of the control circuits in an electronic digital computer. *Proc. Cambridge philos. Soc.* 49, 230—238 (1953).

Die Arbeit befaßt sich mit der Steuerung des Ablaufs der einzelnen Rechenoperationen (wie Addition, Multiplikation) in elektronischen Rechenmaschinen. Diese Operationen bauen sich aus Teilschritten auf, die als Mikro-Operationen bezeichnet sind. Verff. schlagen vor, die Folge der Mikro-Operationen durch eine Dioden-Matrix mit einem zugehörigen Register zu steuern; die Verdrahtung dieser Matrix läßt sich leicht ändern, so daß in einer fertigen Rechenmaschine eine Änderung bestehender oder ein Hinzufügen neuer Befehle ohne große Mühe möglich ist.

*Ambros. Speiser.*

**Poel, W. L. van der:** Dead programmes for a magnetic drum automatic computer. *Appl. sci. Research, B* 3, 190—198 (1953).

Moderne Rechenmaschinen sind oft so konstruiert, daß sie nur die allereinfachsten Rechenoperationen ausführen können; für alle übrigen Operationen (Wurzelziehen, Logarithmieren, usw. evtl. sogar für das Dividieren) hat man Unterprogramme. Die Unterprogramme für die wichtigsten Operationen werden zweckmäßig ein für allemal in der Maschine gespeichert, was freilich nur dann möglich ist, wenn das Speicherwerk der Maschine selbst permanenten Charakter hat (was bei der vom Verf. betrachteten Maschine der Fall ist). — Leider kommt es nun vor, daß die permanenten Unterprogramme durch Rechen- oder Programmierungsfehler „überschrieben“ werden, und zwar ev. ohne daß dies sofort erkannt wird. Man kann sich dagegen schützen, indem man die permanenten Programme in speziellen Kanälen der Trommel unterbringt, bei welcher die Schreibschaltung unterbunden ist. Verf. nennt diese Kanäle den „toten Teil“ des Speichers und ein dort untergebrachtes Programm ein „totes Programm“. Befehle und Zahlen im toten Teil des Speichers können aber nicht mehr verändert werden; insbesondere kann man auch keine Adressensubstitutionen vornehmen. Gerade für das Zurückgehen auf das Hauptprogramm müßte aber die sog. Rückkehradresse in den am Ende des Unterprogramms befindlichen Sprungbefehl eingesetzt werden können. Um dies dennoch zu ermöglichen, schlägt Verf. vor, die variierenden Befehle und Zahlenwerte aus dem Unterprogramm herauszunehmen und (gewissermaßen als Unter-Unterprogramm) im normalen Teil des Speichers unterzubringen. Diese Zeilen



legung eines Programms in einen „toten“ und einen „lebendigen“ Teil bedingt natürlich ein häufiges Hin- und Herspringen zwischen den beiden Teilen und damit eine erhebliche Anzahl zusätzlicher Befehle. Jedoch scheint dieser Nachteil des Verfahrens gering gegenüber der damit erreichten Erhöhung der Rechensicherheit. Um auch den lebendigen Teil eines permanenten Unterprogramms (d. h. das Unter-Unterprogramm) vor Zerstörung zu schützen, speichert man es ebenfalls im toten Teil des Speichers und kopiert es vor jedem Gebrauch in den normalen Teil hinüber.

H. Rutishauser.

● **Table of natural logarithms for arguments between zero and five to sixteen decimal places.** (National Bureau of Standards Appl. Math. Series 31). Washington: Government Printing Office 1953. X u. 501 p. \$ 3,25.

Dieses Tafelwerk enthält sechzehnstellige Werte der natürlichen Logarithmen für die Argumente von 0 bis 5 (Schrittweite  $10^{-4}$ ) und ist ein unveränderter Abdruck von Band III eines vierbändigen Tabellenwerkes, das im Jahre 1941 vom Project for the Computation of Mathematical Tables herausgegeben wurde. Eine von A. N. Lowan verfaßte Einleitung bringt einige Ausführungen über die verwendete Berechnungsart sowie über die direkte und inverse Interpolation, die als Anweisung für eine vorteilhafte Benutzung der Tafeln dienen. [ $\log 10^{-4}$  trägt falsches Vorzeichen.]

H. Bilharz.

● **Tables of Bessel-Clifford functions of orders zero and one.** (National Bureau of Standards. Appl. Math. Series 28.) Washington: Government Printing Office 1953. IX. 72 p. 45 cents.

Eingangs werden die Eigenschaften und Anwendungen der Bessel-Cliffordschen Funktionen besprochen. Tafelinhalt:

$$J_0(2\sqrt{x}), J_1(2\sqrt{x})/\sqrt{x} \text{ für } 0 \leq x \leq 410 \text{ mit 8 bzw. 9 D.,}$$

$$Y_0(2\sqrt{x}), Y_1(2\sqrt{x})/\sqrt{x} \text{ für } 0 \leq x \leq 410 \text{ mit 8 bzw. 9 D.,}$$

$$I_0(2\sqrt{x}), I_1(2\sqrt{x})/\sqrt{x} \text{ für } 0 \leq x \leq 6,2 \text{ mit 7 bzw. 8 D.,}$$

$$e^{-2\sqrt{x}} I_0(2\sqrt{x}), e^{-2\sqrt{x}} I_1(2\sqrt{x})/\sqrt{x} \text{ für } 6,2 \leq x \leq 410 \text{ mit 8 bzw. 9 D.,}$$

$$K_0(2\sqrt{x}), K_1(2\sqrt{x})/\sqrt{x} \text{ für } 0 \leq x \leq 6,2 \text{ mit 6 bis 9 D.,}$$

$$e^{2\sqrt{x}} K_0(2\sqrt{x}), e^{2\sqrt{x}} K_1(2\sqrt{x})/\sqrt{x} \text{ für } 6,2 \leq x \leq 410 \text{ mit 8 bzw. 9 D.}$$

Interpolationskoeffizienten  $E_2(p)$  und  $F_2(p)$  der Everettschen Formel für  $p = 0(0,001)1$  mit 7 D. und  $\frac{1}{2} p(1-p)$  für  $p = 0(0,001)1$  exakt. — Sind zweite zentrale Differenzen angegeben, dann kann mittels der Everettschen Formel interpoliert werden.

H. Unger.

Slater, L. J.: **On the evaluation of the confluent hypergeometric function.** Proc. Cambridge philos. Soc. 49, 612—622 (1953)

Die Arbeit bringt eine Tafel für die konfluente hypergeometrische Funktion in Form der Kummerschen Funktion

$${}_1F_1(a, b; x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(a)_{\lambda}}{(b)_{\lambda} \cdot \lambda!} x^{\lambda}$$

und zwar für den Bereich  $a = -1.0(0.1) + 1,0$ ,  $b = +0.1(0.1) + 1,0$  und  $x = +1,0(1,0) + 10,0$ . Ferner werden asymptotische Entwicklungen für diese Funktion angegeben, in denen konvergenzerzeugende Faktoren auftreten. Sie werden nach der Methode von Miller aufgestellt (dies. Zbl. 46, 74). H. Buchholz.

Salzer, Herbert E.: **Radix table for obtaining hyperbolic and inverse hyperbolic functions to many places.** J. Math. Physics 32, 197—202 (1953).

Wenn man 3- oder 4-stellige Werte von Hyperbelfunktionen oder deren inversen Funktionen benötigt und diese mittels bekannter Rekursionsformeln berechnen will, muß man über einen Vorrat vielstelliger Ausgangswerte verfügen. Solche werden vom Verf. gegeben und aus denselben kann man die gewünschten Zwischenwerte ermitteln, wobei eine (beträchtliche) Anzahl von Divisionen ausgeführt werden muß.

E. J. Nyström.

Borkmann, K.: Über einige Hilfsfunktionen mit zwei Eingängen, die bei Lösung der „Gleichung der eindimensionalen gedämpften Welle“ auftreten. Z. angew. Math. Mech. 33, 216—217 (1953).

Bei gewissen Untersuchungen der eindimensionalen gedämpften Wellengleichung  $\partial^2 V / \partial x^2 = a \partial V / \partial t + b^2 \partial^2 V / \partial t^2$  werden folgende Hilfsfunktionen, die zur Zeit im Institut für Mathematik der Deutschen Akademie der Wissenschaften vertafelt werden, benötigt:  $S_n(x, \varphi) = \frac{1}{2} [\varphi^n \cosh(x\varphi) + (1/\varphi)^n \cos(x'\varphi)]$ ,  $T_n(x, \varphi) = \frac{1}{2} [\varphi^n \sinh(x\varphi) + (1/\varphi)^n \sin(x'\varphi)]$ ,  $I_n(x, \varphi) = \frac{1}{2} [\varphi^n \cosh(x\varphi) - (1/\varphi)^n \cos(x'\varphi)]$ ,  $F_n(x, \varphi) = \frac{1}{2} [\varphi^n \sinh(x\varphi) - (1/\varphi)^n \sin(x'\varphi)]$  ( $x$  bzw.  $\varphi$  entsprechen im wesentlichen  $x$  bzw.  $b^2$ ). Für  $\varphi = 1$  (d. h.  $b^2 = 0$ ) erhält man die bekannten Rayleighschen Funktionen. H. Unger.

## Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

### Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Richter, Hans: Zur Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie. II. Math. Ann. 125, 223—234 (1953).

Teil I: dies. Zbl. 48, 359. An Stelle der üblichen Wahrscheinlichkeitsrechnung tritt ein allgemeinerer Kalkül der „Erwartungskoeffizienten“ (EK), in dem gewisse Funktionaloperationen,  $f$  und  $q$ , der Addition und Multiplikationen entsprechen. Dabei ist jedem  $E/H$  [d. h. jedem „Ereignis“  $E$ , das als Ergebnis eines Experiment  $H$  (Realisierung eines Versuchsschemas  $H$ ) erscheint], eine reelle Zahl  $\varrho(E/H)$  zugeordnet, eben der Erwartungskoeffizient EK, und es wird für diese  $\varrho$  ein Kalkül axiomatisch festgelegt. Genügt insbesondere ein System von Erwartungskoeffizienten,  $p(E/H)$  diesen Axiomen, mit  $f(\xi, \eta) = \xi + \eta$  und  $q(\xi, \eta) = \xi \eta$ , so heißt  $p(E/H)$  die Wahrscheinlichkeit von  $E/H$ . H. Geiringer.

Metropolis, N. and S. Ulam: A property of randomness of an arithmetical function. Amer. math. Monthly 60, 252—253 (1953).

Il est défini une relation d'équivalence sur un ensemble  $N$ , telle que, pour chaque élément,  $x \in N$ , il existe un sous-ensemble minima  $X$ , appelé arbre, satisfaisant aux conditions suivantes: 1°  $x \in X$ ; 2°  $y \in X \rightarrow f(y) \in X$ ; 3°  $y \in X$  et  $f(x) = y \rightarrow x \in X$ . Si  $N$  est fini et si la fonction  $f(x)$  est 1 — 1, les arbres deviennent les cycles de la substitution qui fait passer de  $x$  à  $f(x)$ . Etude du nombre des arbres pour certaines fonctions aléatoires  $f(x)$ , en particulier pour la loi du „centre du carré“, ou des chiffres médians du carré d'un nombre écrit dans le système binaire utilisée dans certains problèmes de Monte-Carlo. A. Sade.

Greenwood, Robert E.: Probabilities of certain solitaire card games. J. Amer. statist. Assoc. 48, 88—93 (1953).

Etude de deux „battages“ de cartes, avec des jeux usuels de 52 cartes, qui se rattachent au problème des rencontres. L'A. applique la méthode de Kaplansky [Bull. Amer. math. Soc. 50, 906—914 (1944)] et compare les résultats de ce calcul aux valeurs déduites d'une série de mille observations. A. Sade.

Waugh, Dan F. and Frederick V. Waugh: On probabilities in bridge. J. Amer. statist. Assoc. 48, 79—87 (1953).

Les AA. donnent une méthode pour faire intervenir (au moyen du principe de Bayes, et en introduisant les diverses partitions compatibles avec la liste des cartes déjà jouées) les renseignements recueillis par un joueur de bridge, après que la partie a commencé. Ils en font l'application à deux exemples concrets. A. Sade.

Lévy, Paul: Premiers éléments de l'arithmétique des substitutions aléatoires. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 1488—1489 (1953).

Seien  $n$  Objekte  $A_n$  gegeben;  $s_n$  bezeichne die Substitution, welche die Anordnung  $A_1, \dots, A_n$  in irgendeine andere Anordnung bringt. Eine stochastische Substitution



ist gegeben durch die Wahrscheinlichkeiten

$$p_\nu = W(S = s_\nu), \quad \nu = 1, 2, \dots, n, \quad p_\nu \geq 0, \quad \sum_{\nu=1}^n p_\nu = 1.$$

Der Verf. betrachtet die kleinste Gruppe, welche alle möglichen  $s_\nu$  enthält und formuliert ohne Beweise verschiedene Sätze über diese Gruppen. Insbesondere führt er für solche stochastische Substitutionen den Begriff der  $\infty$ -Teilbarkeit ein.

W. Saxer.

David, F. N.: A note on the evaluation of the multivariate normal integral. *Biometrika* 40, 458—459 (1953).

Prochorov, Ju. V.: Das asymptotische Verhalten der Binomialverteilung. *Uspechi mat. Nauk* 8, Nr. 3 (55), 135—142 (1953) [Russisch].

Es liege eine nach einer Binomialverteilung mit Parameter  $p$  verteilte zufällige Variable  $\xi$  vor. Es ist für ganzzahliges  $x$ ,  $0 \leq x \leq n$ :  $W\{\xi = x\} = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = B^{(n)}(x)$  (sic!),  $p + q = 1$ . Kosuljaev [Učenyje Zapiski Moskovsk. Univ. 15, 179—182 (1939)] zeigte nach Verf.: Bei beliebiger Wahl von Konstanten  $A_n, B_n > 0$  kann  $W\{(\xi - A_n)/B_n < z\}$  nur gegen drei Verteilungsgesetze konvergieren: Normal-, Poisson- und Einheitsverteilung. [Die Verteilungsfunktion der letzteren ist durch  $E(z) = 0$  ( $z \leq 0$ ) bzw.  $= 1$  ( $z > 0$ ) gegeben]. — Sei  $a = np$ ,  $\Pi_1(x) = a^x e^{-a}/x!$ ,  $\Pi_3(x) = (n-a)^x e^{-(n-a)}/x!$  und  $\Pi_2(x) = (2\pi npq)^{-1/2} e^{-(x-np)^2/2npq}$ ;  $\sum_x |B^{(n)}(x) - \Pi_k(x)|$  wird mit  $\varrho_k(p, n)$ ,  $k = 1, 2, 3$ , bezeichnet. Auf Anregung von Kolmogoroff untersucht Verf. (1)  $\sup_{0 \leq p \leq 1} \min_k \varrho_k(p, n)$  für  $n \rightarrow \infty$  und er-

hält mit einer leicht anzugebenden numerischen Konstanten  $\lambda$ ,  $(1) = \lambda n^{-1/3} + O(n^{-2/3})$ . Dieses Resultat wird durch elementare Abschätzungen gewonnen, die letzten Endes folgendes Ergebnis, und damit die Behauptung, zeitigen:  $\min_k \varrho_k(p, n) = \varrho_1(p, n)$

für  $p < p_1 n^{-1/3} + O(n^{-2/3})$  bzw.  $= \varrho_2(p, n)$  für  $p_1 n^{-1/3} + O(n^{-2/3}) \leq p < 1 - p_1 n^{-1/3} + O(n^{-2/3})$  bzw.  $= \varrho_3(p, n)$  für  $p \geq 1 - p_1 n^{-1/3} + O(n^{-2/3})$ .  $p_1$  ist eine numerische Konstante. — Druckfehler: S. 137, 4. Z. v. o. lies  $1 - p_1 n^{-1/3} + O(n^{-2/3})$  statt  $1 - p n^{-1/3} + O(n^{-2/3})$ , S. 139 letzte Z. lies  $u_j = j \Delta u + u_0$  statt  $u_j = f \Delta u + u_0$ . L. Schmetterer.

Erdős, P. and G. A. Hunt: Changes of sign of sums of random variables. *Pacific J. Math.* 3, 673—687 (1953).

Seien  $x_1, x_2, \dots$  unabhängige stochastische Variablen, alle mit der gleichen stetigen symmetrischen Verteilung und  $s_k = x_1 + \dots + x_k$ . Die Verff. beweisen von der speziellen Verteilung der  $x_i$  unabhängige Sätze über die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge  $s_1, s_2, \dots$ . Spezialfälle dieser Sätze unter der Voraussetzung, daß  $x_i$  Rademacher-Funktionen sind, wurden von P. Lévy bewiesen. —  $N_n$  bezeichne die Anzahl der Vorzeichenwechsel in  $s_1, s_2, \dots, s_{n+1}$ . Es sei  $\Phi(k) = \frac{2^{[k/2+1]}}{k+1} \binom{k}{[k/2]} 2^{-k}$ . Dann gelten die Sätze 1)  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k+1}} \leq E(N_n) \leq \sum_{k=1}^n \Phi(k)$ .

2) Es gilt mit der Wahrscheinlichkeit 1  $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \frac{N_n}{\log n} \geq \frac{1}{2}$ . 3) Für gewisse wohl-

bestimmte Teilfolgen  $s'_1, s'_2, \dots$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N'_n}{E(N'_n)} = 1$ . 4) Es gilt mit der Wahrschein-

lichkeit 1  $\sum_{k=1}^n \frac{\text{sgn } s_k}{k} = o(\log n)$ . — Die nicht einfachen Beweise für diese Sätze stützen sich auf gewisse Lemmata betr. die Kombinationen  $\pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n$ , wobei  $a_1, a_2, \dots, a_n$  pos. Zahlen und die vorigen Summen alle voneinander verschieden sind.

W. Saxer.

**Greenwood, R. E. and A. M. Gleason:** Distribution of round-off errors for running averages. *Pacific J. Math.* **3**, 605—611 (1953).

Let  $G_1, G_2, \dots$  be a series of positive integers and define a running average  $S_{n+1} = [(k-1)S_n + G_{n+1}] / k$  and also a rounded running average  $T_{n+1} = [(k-1)T_n + G_{n+1} + D] / k$ , where  $k$  is a positive integer and  $D$  is chosen so as to make the rounded averages integers, according to one of the following rules: (A) for  $k$  odd  $D \in \{\frac{1}{2}(-k + 2i + 1)\}$ ,  $i = 0, 1, \dots, k-1$ ; (B) for  $k$  even  $D \in \{-\frac{1}{2}k + i\}$ ,  $i = 1, \dots, k$ ; (C) for  $k$  even as for (B), but  $i = 0, \dots, k-1$ . — For  $n \geq k$ , define  $E_n = T_{n+1} - S_{n+1}$ , and assume that the  $G_i$  are such that the possible values of  $D$  have equal probabilities. The authors determine the limiting distributions of  $E_n$ , in particular for  $k = 2$ , (B) and (C). S. Vajda.

**Calderon, A. P. and H. B. Mann:** On the moments of stochastic integrals. *Sankhyā* **12**, 347—350 (1953).

Die Verf. beweisen mit Hilfe eines Lemmas von Fréchet den folgenden Satz: Seien  $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_k^{(n)}$   $k$  Folgen von stochastischen Variablen, die nach Wahrscheinlichkeit gegen  $x_1, x_2, \dots, x_k$  konvergieren. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Momente mit den Ordnungen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  der  $x_i^{(k)}$  gegen die entsprechenden Momente des  $x_i$  konvergieren, so daß  $\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{A_i} < 1$  erfüllt ist,

besteht darin, daß die Momente der Ordnungen  $B_i$  der  $x_i^{(k)}$  beschränkt sind für alle  $B_i < A_i$ . Die Verf. wenden ihr Resultat auf die Momente stochastischer Integrale an.

W. Saxon.

**Marušin, M. N.:** Über notwendige und hinreichende Bedingungen für die Anwendbarkeit eines Grenzwertsatzes der Ordnung  $p = 2$ . *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **90**, 727—730 (1953) [Russisch].

Es handelt sich um den Beweis eines Satzes von S. Bernstein (dies. Zbl. **22**, 61) für  $p < 2$ , den Bernstein für alle positiven  $p$  formuliert und nur für  $p \geq 2$  bewiesen hat.

L. Schmetterer.

**Finkel'stein, B. V.:** Über die Grenzverteilungen der äußersten Glieder der Variationsreihe einer zweidimensionalen zufälligen Größe. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **91**, 209—211 (1953) [Russisch].

Verallgemeinert bekannte Ergebnisse (vgl. etwa Smirnov, dies. Zbl. **41**, 453) für die Variationsreihe eindimensionaler zufälliger unabhängiger Variabler (Orderfunktionen) auf den zweidimensionalen Fall, doch beschränkt sich Verf. im wesentlichen auf die Untersuchung der äußersten Glieder der Reihe (s. u.). Es seien  $n$  unabhängige zufällige Variable mit derselben Verteilungsfunktion  $F(x, y)$  gegeben. Mit  $\xi_1^{(n)} \leq \dots \leq \xi_n^{(n)}$ ,  $\eta_1^{(n)} \leq \dots \leq \eta_n^{(n)}$  soll die Reihe der Orderfunktionen bezeichnet werden. Sei  $F_{km}^{(n)}(x, y) = W\{\xi_k^{(n)} \leq x, \eta_m^{(n)} \leq y\}$ . Verf. untersucht die Frage nach dem Grenzverhalten von  $F_{km}^{(n)}(x, y)$  und erzielt in dieser Richtung: (1)  $F_{11}^{(n)}(a_n x + b_n, c_n y + d_n)$  ( $a_n, c_n \geq 0$ ) strebt für  $n \rightarrow \infty$  genau dann gegen eine Verteilungsfunktion  $\Phi(x, y)$  in allen Stetigkeitspunkten derselben, wenn folgendes gilt:  $u_n(x) = n F(a_n x + b_n, +\infty) \rightarrow u(x)$ ,  $v_n(y) = n F(+\infty, c_n y + d_n) \rightarrow v(y)$ ,  $u_n(x, y) = n F(a_n x + b_n, c_n y + d_n) \rightarrow w(x, y)$ , mit  $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} v(x) = \infty$ ,  $w(x, +\infty) = w(+\infty, y) < \infty$ .

$\Phi(x, y)$  hat dann die Form  $1 - e^{-u(x)} - e^{-v(y)} + e^{-u(x)-v(y)+w(x, y)}$ . Es zeigt sich überdies, daß die Funktionen  $u(x)$  und  $v(y)$  nur gewissen Typen angehören können, die denen im eindimensionalen Fall völlig gleichen. (Vgl. Smirnov, l. c., Satz 5). — Wenn  $u(x)$  und  $v(y)$  irgendeiner dieser Klassen angehören und  $w(x, y)$  nicht negativ und nicht abnehmend ist, dann ist für die Konvergenz von (1) gegen  $\Phi(x, y)$  im angegebenen Sinne notwendig und hinreichend, daß  $R(x, y) = w(x, y) \wedge u(x)v(y)$  in jedem Stetigkeitspunkt von  $\Phi(x, y)$ , in welchem  $0 < u(x)$ ,  $v(y) < +\infty$  gilt; folgende Bedingungen erfüllt:  $0 < R(x, y) \leq 1$ . Längs  $v(y)/u(x) = c$  ( $c > 0$ ) ist  $R(x, y)$  konstant. Für  $x_1 > x_2$  und alle  $y$  und  $y_1 > y_2$  und alle  $x$  gilt

$$R(x_1, y) R(x_2, y) \geq \sqrt{u(x_2)u(x_1)}, \quad R(x, y_1) R(x, y_2) \leq \sqrt{v(y_2)v(y_1)}.$$

Schließlich führt Verf. eine Reihe von Eigenschaften der Funktion  $R(x, y)$  an und bemerkt, daß sich die Untersuchungen auch für die Funktionen  $F_{km}^{(n)}(a_n x + b_n, c_n y + d_n)$  gestalten lassen. Keine Beweise.

L. Schmetterer.



Fuchs, Aimé: Sur quelques points de la théorie des processus de Markoff presque sûrement continus dans un intervalle. C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 1137—1138 (1953).

Fuchs, Aimé: Sur la continuité stochastique des processus stochastiques réels de Markoff. C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 1388—1390 (1953).

The author considers Markov processes  $X(t)$  and defines local and global continuity, both of them in three equivalent ways. If, for a globally continuous process, the coefficients  $a(t, x)$  and  $b(t, x)$  in the diffusion equation exist for all  $t, x$ , and if  $\inf a(t, x) > 0$ , then the process satisfies the stochastic differential equation  $dX(t) = b(t, X(t)) dt + \xi [a(t, X(t)) dt]^{1/2}$  where the random variable  $\xi$  is normal  $(0, 1)$ . No proofs are given.

G. Elfving.

Harries, T. E. and Herbert Robbins: Ergodic theory of Markov chains admitting an infinite invariant measure. Proc. nat. Acad. Sci. USA **39**, 860—864 (1953).

Let  $H(u, B)$  be a transition probability function on  $R_1$ . If there exists a probability measure  $\pi(B)$  which is stationary with respect to  $H$ , then  $\pi$  and  $H$  define a stationary Markov chain  $\{x_i\}$  for which various ergodic properties are known to hold. The present paper deals with the case that a stationary measure  $\pi(B)$  exists but is infinite (though finite for every bounded  $B$ ). Then a corresponding measure may be constructed on the space of all sequences  $\{x_i\}$ . Under appropriate assumptions granting the „complete mixing“, the shift transformation is shown to be metrically transitive with respect to this measure. From this various ergodic properties are deduced.

G. Elfving.

Jaglom, A. M. and M. S. Pinsker: Zufällige Prozesse mit stationären Zuwächsen  $n$ -ter Ordnung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **90**, 731—734 (1953) [Russisch].

$x(t)$  sei ein (komplexer) stochastischer Prozeß.  $\Delta_\tau^{(n)} x(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x(t - k\tau)$ .  $\tau(t)$  heißt Prozeß mit stationären Zuwächsen  $n$ -ter Ordnung (st. P. n. O.) im engeren Sinne, wenn für jedes ganze  $k > 0$  und beliebige reelle Zahlen  $s, t_1, \dots, t_k, \tau_1, \dots, \tau_k$  die Verteilung von  $\Delta_{\tau_i}^{(n)} x(s + t_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$  von  $s$  unabhängig ist. Die Ausdehnung der Definition auf st. P. n. O. im weiteren Sinne erfolgt nach dem üblichen Vorbild: Es muß  $E(\Delta_\tau^{(n)} x(s))$  und  $E(\Delta_{\tau_1}^{(n)} x(s + t) \Delta_{\tau_2}^{(n)} x(s))$  unabhängig von  $s$  sein. Für  $n = 1$  sind die nachfolgenden Untersuchungen bekannt. Für einen st. P. n. O. im weiteren Sinne ist  $E(\Delta_\tau^{(n)} x(s)) = c\tau^n$ ,  $c$  eine Konstante und

$$(1) \quad E(\Delta_{\tau_1}^{(n)} x(s + t) \overline{\Delta_{\tau_2}^{(n)} x(s)}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i t \lambda} (e^{-i \tau_1 \lambda} - 1)^n (e^{i \tau_2 \lambda} - 1)^n \frac{1 + \lambda^2 n}{\lambda^{2n}} dF(\lambda),$$

wobei  $F(\lambda)$  die üblichen Bedingungen erfüllt.  $c$  und  $F(\lambda)$  sind durch  $x(t)$  eindeutig festgelegt. (1) wird mit  $D^{(n)}(t, \tau_1, \tau_2)$  bezeichnet. Unter Benützung der Spektraltheorie (Karhunen,

dies. Zbl. **30**, 165, 201) folgert Verf. aus (1)  $\Delta_\tau^{(n)} x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i t \lambda} (e^{-i \tau \lambda} - 1)^n \frac{1 + i \lambda^n}{i \lambda^n} dZ(\lambda)$ ,

wobei  $Z(\lambda)$  eine zufällige Funktion mit unkorrelierten Zuwächsen ist, so daß für eine beliebige  $F$ -meßbare Menge  $S$   $E \int_S dZ(\lambda)^2 = \int_S dF(\lambda) = F(S)$  gilt. Daraus folgt unschwer die

Spektraldarstellung von  $x(t)$  selbst. Schließlich wird bemerkt, daß man die Überlegungen in gewissem Sinne umkehren kann: Jede Funktion  $D^{(n)}(t, \tau_1, \tau_2)$ , welche sich in der Form der rechten Seite von (1) darstellen läßt, definiert einen st. P. n. O., so daß  $D^{(n)}(t, \tau_1, \tau_2)$  für diesen Prozeß gleich der linken Seite von (1) ist.

L. Schmetterer.

Kendall, David G.: Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded Markov chain. Ann. math. Statistics **24**, 338—354 (1953).

Certain stochastic processes  $X(t)$  in the theory of queues are in general not Markov processes, but can be analysed by „imbedded Markov chains“  $Y(t_m)$  where  $Y(t)$  is a functional  $f_t$  of  $X(\tau)$ ,  $\tau \leq t$ . [Cf. the author's paper in this Zbl. **45**, 78] Such a chain can always be found, but is not always useful. After an introduction

dealing with single server queues, the author turns to many-server systems with independently and identically distributed inter-arrival times  $u$ , first arrivals being served first. He shows that under these conditions the equilibrium distribution of the number of queuers waiting at an instant just preceding the arrival of a new queuer is a geometric series with a concentration at zero, and that of the waiting time a negative exponential, also with concentration at zero. Detailed results are worked out for 1, 2 and 3 servers, when the distribution of  $u$  is Poissonian or deterministic.

S. Vajda.

**Foster, F. G.: On the stochastic matrices associated with certain queuing processes.** Ann. math. Statistics **24**, 355—360 (1953).

Considering irreducible, aperiodic Markov chains, the author gives sufficient and necessary conditions for the chain to be transient, recurrent-null or ergodic, in terms of the elements of its stochastic matrix. These criteria are then applied to Markov chains which have been studied by D. G. Kendall in connection with queuing processes (this Zbl. **45**, 78 and preced. review).

S. Vajda.

**Breny, H.: Variance and autocorrelation of thickness in random slivers.** Appl. sci. Research A **3**, 433—450 (1953).

Die Zusammensetzung eines (Kammwoll-)Zuges aus Einzelfasern wird als stochastischer Prozeß gedeutet. Beim „Poisson-System“ wird jede Faser einer Population zufällig entnommen, die nach Faserlänge  $l$  der kumulativen Verteilungsfunktion  $F(l)$  folgt, und dann, unabhängig davon, auf eine Strecke der Länge  $2L$  zufällig aufgetragen, wobei  $dx/2L =$  Wahrscheinlichkeit für rechtes Faserende in  $(x, x + dx)$ . Es werden Grundwahrscheinlichkeiten und ihre Erzeugenden bestimmt, und hieraus Erwartungswert und Varianz der Anzahl  $n(t)$  der die Stelle  $x = t$  deckenden Fasern und aus der Kovarianz von  $n(t)$  und  $n(t - d)$  die Autokorrelation von  $n(t)$  berechnet. Das der mechanischen Begrenzung der Größe  $n(t)$  Rechnung tragende, realistischere „Bernoulli-System“ führt zu Erwartungswert und Autokorrelation gleich denen des „Poisson-Systems“, aber zu durch einen Korrekturfaktor verkleinerter Varianz. Aus der Verteilung von  $n(t)$  läßt sich diejenige des Querschnittes  $A(t)$  des Zuges an der Stelle  $t$  gewinnen, speziell unter J. G. Martindales Annahme, daß Länge  $l$  und Querschnitt  $a$  der Fasern voneinander unabhängig verteilt seien, bzw. unter der Annahme von J. L. Spencer-Smith und H. A. C. Todd, daß  $a$  von  $l$  funktional abhängt; Verf. bestätigt die Resultate von Martindale und korrigiert diejenigen von Spencer-Smith und Todd. Die bereits von H. C. Picard behandelte allgemeinste Annahme beliebiger Simultan-Verteilung von  $l$  und  $a$  führt hingegen nicht zu einem handlichen Ausdruck für die Autokorrelation von  $A(t)$ . Schließlich werden Formeln von D. R. Cox und M. W. H. Towsend [J. Text. Inst. **42**, 107, 145 (1951)] neu bewiesen.

M. P. Geppert.

**Karlin, Samuel: Some random walks arising in learning models. I.** Pacific J. Math. **3**, 725—756 (1953).

Soit une particule soumise à deux impulsions et effectuant un déplacement aléatoire. Si elle est située au point  $x$ , alors,  $x \rightarrow F_1 x = \sigma x$  avec la probabilité  $1 - \Phi(x)$  et  $x \rightarrow F_2 x = 1 - x + \lambda x$  avec la probabilité  $\Phi(x)$ . On introduit un opérateur  $U \pi(t) = [1 - \Phi(t)] \pi(\sigma t) + \Phi(t) \pi(1 - \lambda + \lambda t)$  ayant son effet sur les fonctions continues et on étudie les cas: 1°  $\Phi(x) = x$ ; 2°  $\Phi$  monotone croissante avec  $\Phi(x) - \Phi(y) \leq 1$ ; 3°  $\Phi(x) = 1 - x$ ; 4°  $\Phi(x)$  linéaire et décroissante. L'hypothèse qu'il existe une probabilité pour que la particule reste immobile est enfin discutée, ainsi que celle où  $\Phi(x)$  n'est plus nécessairement linéaire. Ces résultats sont à rapprocher de: Onicescu et Mihoc (ce Zbl. **10**, 406; **12**, 28); Doeblin et Fortet (ce Zbl. **18**, 33); Fortet (ce Zbl. **21**, 338); Ionescu et Marinescu (ce Zbl. **35**, 357).

A. Sade.

**Hammersley, J. M.: On counters with random dead time. I.** Proc. Cambridge philos. Soc. **49**, 623—637 (1953).

The following problem was suggested by a devise for counting blood-cells electronically: consider arcs of random length distributed at random on a circle of circumference  $y$ . The author shows that the number of intervals is asymptotically normal when  $y \rightarrow \infty$ . He gives formulae for the mean  $\mu_1$  and the variance  $\mu_2$  of this distribution in terms of the c. d. f. of the lengths of the intervals, their mean length, and  $\lambda$ , the mean number of intervals per unit length of arc. Both  $\mu_1$  and  $\mu_2$  are proportional to  $\lambda y$ . Analogous formulae are also given for the case with „paralysis“, which prevents certain short intervals from being counted. (For a precise definition of this and for other relevant concepts the reader must be referred to the paper.) Mean and vari-



ance remain proportional to  $y$ . A table of the „tapered exponential function“

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{a}{2} (b - k + |b - k|) \right\}^k / k!$$

is attached for  $a = 0.05$ .35 and .3679, and for  $b = 0$  (0.5)5(1)10. A later paper will deal with the converse case, i. e. with estimating  $\lambda$  when the number of intervals is known. *S. Vajda*.

**Baudez, Gaston:** Etude de distributions dans le cas des causes rythmées. Bull. trimest. Inst. Actuaire Français. 64 (52), 23—37 (1953).

**Chintschin (Chinčín), A. J.:** Der Begriff der Entropie in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Sowjetwiss., naturw. Abt. 6, 849—866 (1953).

Vgl. die Besprechung des Originals in dies. Zbl. 50, 354.

**Karlin, Samuel:** The theory of infinite games. Ann. of Math., II. Ser. 58, 371—401 (1953).

In the theory of infinite games the author replaces the kernel by an operator and the distributions by Banach spaces. He then studies conditions for determinateness and investigates the changes of the value induced by changes of the operator. Upper and lower values are defined and non-linear games as well as games with constraints are considered. The last chapter illustrates the use of the theory for the solution of certain types of games. *S. Vajda*.

### Statistik:

● **Yates, Frank:** Sampling methods for censuses and surveys. 2. ed. rev. and enlarged. London: Charles Griffin and Co., Ltd. 1953. XVI, 401 p. 38 s. net.

**David, F. N. and M. G. Kendall:** Tables of symmetric functions. IV. Biometrika 40, 427—446 (1953).

**Cadwell, J. H.:** Approximating to the distributions of measures of dispersion by a power of  $\chi^2$ . Biometrika 40, 336—346 (1953).

● **Cochran, W. G.:** Sampling techniques. New York: John Wiley and Sons, Inc. 1953. 330 p. \$ 6,50.

Der Verf. hat in der vorliegenden Arbeit die Theorie der Stichproben in ihren grundlegenden Zusammenhängen dargestellt. Der Nachweis der Gesetzmäßigkeiten erfolgt für qualitative und quantitative Merkmale. An einer Fülle von Aufgaben kann der Leser die theoretischen Kenntnisse erproben; für die wichtigsten Aufgaben sind die richtigen Lösungen im Anhang aufgeführt. Beachtenswert für die Stichprobenplanung sind die aus der statistischen Praxis abgeleiteten Erfahrungsregeln, die aber weitgehend theoretisch fundiert sind. Sorgfältig wird der Leser in die grundlegenden Begriffe [Zufallsauswahl, systematische Fehler (bias), Stichprobenfehler, Vertrauensgrenzen] eingeführt. — Nach dem gewöhnlichen Stichprobenverfahren (simple random sampling) wird das geschichtete Stichprobenverfahren (stratified sampling) mit proportionaler Aufteilung (S. 67,  $n_h:n = N_h:N$ ) und optimaler Aufteilung (S. 74,  $n_h:n = N_h S_h : \sum N_h S_h$ ; S. 75,  $n_h:n = N_h S_h / c_h : \sum N_h S_h / c_h$ ,  $c_h$  = variable Kostenfunktion) behandelt. Für die Güte der drei Approximationsverfahren gilt  $V_{\text{opt}} \leq V_{\text{prop}} \leq V_{\text{ran}}$ . Die Abschätzung des durch die Schichtung erzielten Gewinnes ist auf S. 97ff. zu finden. — Mittels der Verhältnisschätzung (ratio estimate) und der linearen Regressionsschätzung (linear regression estimate) kann der Rückschluß von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit unter Umständen verbessert werden. Sofern der Korrelationskoeffizient  $\rho > (1/2)(S_x/\bar{X}):(S_y/\bar{Y})$  ausfällt ( $S_x/\bar{X}$  und  $S_y/\bar{Y}$  bedeuten die Variationskoeffizienten von  $x$  und  $y$ ), liegt bei der Verhältnisschätzung ein Gewinn vor gegenüber dem gewöhnlichen Stichprobenverfahren (S. 122); die Regressionschätzung wiederum ist gegenüber der Verhältnisschätzung wirksamer, sofern  $\rho \neq (S_x/\bar{X}):(S_y/\bar{Y})$  (S. 148). — Die Theorie der mehrstufigen Stichprobenverfahren (subsampling or multi-stage sampling), dargelegt für den Fall gleich großer (10. Kap.) und ungleich großer Stichprobeneinheiten (11. Kap.), deckt die enge Bindung zur Streuungszерlegung auf. — Für gewisse Stichprobenverfahren ist die Kenntnis einer zusätzlichen Hilfsvariablen unerlässlich. In Ermangelung der erforderlichen Informationen bedient man sich mit Vorteil des Doppelstichprobenverfahrens (double sampling or two-phase sampling). Bei der Regressionsschätzung z. B. liegt ein Gewinn an Präzision dann vor, falls bei gegebenem Korrelationskoeffizienten  $\rho$  die Relation  $c_n:c_{n'} > \rho^2:(1 - \sqrt{1 - \rho^2})^2$  gilt (S. 279;  $c_n$  und  $c_{n'}$  bedeuten die Kosten pro Erhebungseinheit in der zweiten und ersten Stichprobe). — Im letzten Kapitel legt der Verf. den Einfluß dar, den diverse Fehlerquellen auf die Güte einer Erhebung ausüben; unterschieden werden drei Kategorien: 1. Fehler

zufolge Ausfällen (non-response). 2. Erhebungs- und Messungsfehler; 3. Prüf- und Auswertungsfehler. Bezüglich der Ausfälle werden instruktive Hilfsverfahren (Birnbäum und Sirken, S. 296; Hansen und Hurwitz, S. 298; Politz und Simmons, S. 303) erwähnt. Zur Behandlung von Erhebungs- und Messungsfehlern gehört u. a. die von Mahalanobis vorgeschlagene Technik einander durchdringender Stichproben (interpenetrating subsamples, S. 312).

W. Wegmüller.

**Sundrum, R. M.:** A method of systematic sampling based on order properties. *Biometrika* **40**, 452—456 (1953).

**Majumdar, Kulandra N.:** On some theorems in combinatorics relating to incomplete block designs. *Ann. math. Statistics* **24**, 377—389 (1953).

Eine Anordnung von  $r$  Varietäten in  $b$  Blöcken so, daß alle Blöcke verschieden sind und keiner alle Varietäten enthält, doch jede mindestens einmal vorkommt, heißt unvollständige Blockanordnung (u. BA). Enthält jeder Block gleich viele Varietäten ( $k$  Stück), und kommt jedes Varietätenpaar gleich oft ( $\lambda$ -mal) vor, so ist die BA ausgewogen (a. u. BA). Es gelten:  $r \cdot v = b \cdot k$ ,  $\lambda(r-1) = r(k-1)$  und  $b \geq v$  (Fisher). Eine a. u. BA mit  $b = v$  heißt symmetrisch. Eine a. u. BA heißt auflösbar, wenn sich die Blöcke in Gruppen zu je  $n$  Blöcken so einteilen lassen, daß in jeder Gruppe jede Varietät genau einmal vorkommt. Es gelten dann:  $v = n \cdot k$ ,  $b = n \cdot r$  und  $b - r \geq v - 1$  (Bose), resp.  $r - k \geq \lambda$ . Eine auflösbare a. u. BA mit  $r - k = \lambda$  heißt affin. Affine Anordnungen sind weitgehend analog den symmetrischen. — Aus Rangbetrachtungen über die Inzidenzmatrix  $\mathcal{A}$  mit  $r$  Zeilen und  $b$  Spalten folgt, daß  $b - r$  auch für nichtausgewogene BA mit  $|\mathcal{A}\mathcal{A}'| \neq 0$  gilt. — Aus dem Vergleich von  $\mathcal{A}\mathcal{A}'$  mit  $\mathcal{A}'\mathcal{A}$  ergibt sich: wenn in einer u. BA jedes Varietätenpaar  $\lambda$ -mal vorkommt und je zwei Blöcke genau  $\lambda'$  Varietäten gemeinsam haben, dann ist die BA symmetrisch und ausgewogen. — Rein kombinatorisch wird gezeigt: In einer a. u. BA haben genau dann zwei Blöcke mit jedem dritten je übereinstimmende Anzahlen der Inzidenzen, wenn sie  $k + \lambda - r$  Varietäten gemeinsam haben. Für eine affine BA gibt es eine ganze Zahl  $t$  so, daß gilt:  $v = n^2(n \cdot t - 1)$ ,  $b = n(n^2 \cdot t - n - 1)$ ,  $r = n^2 \cdot t - n + 1$ ,  $k = n^2 \cdot t - n \cdot t + n$ ,  $\lambda = n \cdot t + 1$ . — Mit Hilfe der Methode der Ergänzung der Inzidenzmatrix durch geeignete weitere Spalten und Determinantenbildung wird gezeigt: Für eine affine BA mit ungeradem  $v$  ist  $k$  (resp.  $k^2 \cdot v$ ) ein Quadrat, falls  $r$  ungerade (resp. gerade) ist. Bei  $r = 2$  oder 3 (mod 4) enthält  $v/k$  die Primzahlen  $\equiv 3$  (mod 4) in gerader Potenz. H. Richter.

**Taga, Yasushi:** On optimum balancing between sample size and number of strata in sub-sampling. *Ann. Inst. statist. Math.* **4**, 95—102 (1953).

Recherche, sous certaines hypothèses, du meilleur choix à faire, dans les problèmes d'échantillonnage, pour „balancer“ les effets de la stratification et de la grandeur de l'échantillon. Exemples: I. distribution uniforme,  $f(x) = C \cdot e^x$ ; II. distribution linéaire,  $f(x) = 2 \cdot x$ ; III. distribution triangulaire,  $f(x) = 2 - |4x - 2|$ . A. Sade.

**Dalenius, Tore:** The economics of one-stage stratified sampling. *Sankhya* **12**, 351—356 (1953).

**Box, G. E. P.:** Non-normality and tests on variances. *Biometrika* **40**, 318—335 (1953).

**Box, G. E. P.:** A note on regions for tests of kurtosis. *Biometrika* **40**, 465—468 (1953).

**David, H. A.:** The power function of some tests based on range. *Biometrika* **40**, 347—353 (1953).

**Cox, D. R.:** Some simple approximate tests for Poisson variates. *Biometrika* **40**, 354—360 (1953).

**Birnbäum, Allan:** Some procedures for comparing Poisson processes or populations. *Biometrika* **40**, 447—449 (1953).

**Mallows, C. L.:** Sequential discrimination. *Sankhya* **12**, 321—338 (1953).

The procedure mentioned in the title is equivalent to a sequential probability ratio test where the observed variables are not identically distributed. The author derives generalisations of formulae which hold in the standard case of identical parent populations. He introduces a suitable generalisation of the concept „sample number“ and a cost function. As a special case, the multinomial normal case is dealt with and approximations to sampling distributions are studied. S. Fajda.

**Preston, Eric J.:** A graphical method for the analysis of statistical distribution into two normal components. *Biometrika* **40**, 460—464 (1953).



Sobel, Milton: An essentially complete class of decision functions for certain standard sequential problems. *Ann. math. Statistics* **24**, 319—337 (1953).

Let independent observations be taken from a parent distribution of Koopman-Darmois type with parameter  $\theta$ . The hypothesis to be tested is  $\theta \leq \theta^*$  against  $\theta > \theta^*$ . It is shown that under certain conditions a class  $A$  is essentially complete when the risk function is bounded. This class  $A$  can be obtained by starting with the sequential probability ratio test for testing  $\theta_1^* \leq \theta^*$  against some  $\theta_2^* \geq \theta^*$  and replacing the upper and lower bounds  $A$  and  $B$  of the ratios in this test by sequences  $A_n$  and  $B_n$ , where for all  $n$   $B_n \leq A_n$ . S. Vajda.

Lehmann, E. L. and C. M. Stein: The admissibility of certain invariant statistical tests involving a translation parameter. *Ann. math. Statistics* **24**, 473—479 (1953).

The authors prove that under given conditions (which they describe as „presumably unnecessarily restrictive“) the most powerful test for one location parameter family against another is admissible (in the sense of Wald's theory of decision functions). S. Vajda.

Münzner, Hans: Zur Ermittlung der Korngrößenverteilung aus Dünn- und Anschliffen. *Mittel.-Bl. math. Statistik* **5**, 167—176 (1953).

Stange, Kurt: Eine Verallgemeinerung des Verteilungsgesetzes von Rosin-Rammler-Sperling für die Korngrößen fein zerkleinerter Stoffe. *Mittel.-Bl. math. Statistik* **5**, 143—158 (1953).

Kitagawa, Tosio: Some stochastic considerations upon empirical functions of various types. *Bull. math. Statist.* **5**, Nr. 3/4, 19—33 (1953).

This appears to be an exposition of regression methods for the estimation of parameters in stochastic processes by regression methods. The argument is difficult to follow because of language difficulties and of unusual nomenclature.

S. Vajda.

Hamaker, H. C.: „Average confidence“ limits for binomial probabilities. *Revue Inst. internat. Statist.* **21**, 17—27 (1953).

Walsh, John E.: Large sample confidence intervals for density function values at percentage points. *Sankhyā* **12**, 265—276 (1953).

Let  $\theta_p$  represent the 100  $p$  per cent point of a population with density function  $f(x)$ . The author gives approximate confidence intervals for the value of  $f(\theta_p)$ . Such confidence intervals are found by help of the joint distribution of two quantiles  $z_{p_1}$  and  $z_{p_2}$ , what distribution, according to a known theorem, for large samples is approximately normal with means that are proportional to  $1/f(\theta_{p_1})$  and  $1/f(\theta_{p_2})$  respectively. H. Bergström.

Miyasawa, Kōichi: On the minimax point estimations. *Bull. math. Statist.* **5**, Nr. 3—4, 1—17 (1953).

The author first proves some useful general theorems establishing the determinateness of, and the existence of a minimax solution for, certain relatively restricted decision problems. He then applies his methods to a number of particular situations, e. g. the following: The mean  $\theta$  and the variance  $\sigma^2$  of a distribution are subject to the restrictions  $|\theta| < \alpha$ ,  $L < \sigma < K$ . Given a sample  $x_1, \dots, x_n$  from this distribution,  $\theta$  has to be estimated by a linear function  $t = \sum a_i x_i + b$  of the observations, the loss function being  $(t - \theta)^2$ . Then the minimax solution is  $t = \bar{x} (K + K^2/n \alpha^2)^{-1}$ . G. Elfving.

Guest, P. G.: The Doolittle method and the fitting of polynomials to weighted data. *Biometrika* **40**, 229—231 (1953).

Vergleichende und ergänzende Bemerkungen zu den Verfahren von Aitken (dies. Zbl. **8**, 123). Dwyer [*Psychometrika* **6**, 101 (1941)] und Fisher (*Statist. Methods for Research Workers*, 10th. Ed. Edinburg 1946, p. 616) über die Ausgleichung von gewogenen Beobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate bei

Verwendung von Polynomen, speziell von orthogonalen Polynomen, einfachen Potenzen oder Faktoriellen. *J. Heinhold.*

Bacon, Ralph Hoyt: The „best“ straight line among the points. *Amer. J. Phys.* 21, 428—446 (1953).

### **Biomathematik. Versicherungsmathematik. Finanzmathematik:**

Rao, C. Radhakrishna: Discriminant functions for genetic differentiation and selection. *Sankhyā* 12, 229—246 (1953).

An extension of the genetical concepts of correlation between relatives to the case where multiple quantitative characters are considered, and an analysis of their application to problems of selection, prediction of genotypic value, etc. *L. Cavalli.*

Leslie, P. H., Dennis Chitty and Helen Chitty: The estimation of population parameters from data obtained by means of the capture-recapture method. III. An example of the practical applications of the method. *Biometrika* 40, 137—169 (1953).

Two populations of small rodents, living on the same area, were sampled by means of a live trapping technique, marked and released. The analysis of the data thus obtained was meant to show whether the assumptions of the method hold true in practice. For one population, there was no trace of differential sampling. The other population showed however that animals trapped and not trapped before had a different chance of being trapped again, thus making it impossible to estimate total numbers on the assumption of random sampling. It was possible, however, to estimate death rate and expectation of life for „marked“ animals, i. e. animals trapped at least once. [Part. I, II this Zbl. 44, 345; *Biometrika* 39, 363—388 (1952).] *L. Cavalli.*

Craig, C. C.: On the utilization of marked specimens in estimating populations of flying insects. *Biometrika* 40, 170—176 (1953).

The problem of the estimation of the number of individuals of one species occupying a given area is considered, in the case observations are made over a short period (no deaths or births are therefore occurring) and records are kept of the frequency of cases in which the same animal is caught  $x$  times. Six methods of treatment are proposed: 1) a truncated Poisson distribution, utilizing the total number of captures and the total number of different individuals caught; 2) the same, using first and second power sums; 3, 4) the maximum likelihood and a simplified derivative of it; 5, 6) a model differing from that of the Poisson distribution, which can be stated in such terms: if a set of objects being drawn are equally likely to be assigned to any one of  $n$  classes, which is the probability that  $r$  classes are occupied after  $s$  objects have been drawn? — The six methods give reasonably near estimates in actual applications. Standard errors are also given. *L. Cavalli.*

Berkson, Joseph: A statistically precise and relatively simple method of estimating the bio-assay with quantal response, based on the logistic function. *J. Amer. statist. Assoc.* 48, 565—599 (1953).

A method is discussed, permitting to obtain estimates of  $a$  and  $b$  in  $P = [1 + e^{-(a+bx)}]^{-1}$ , where  $P$  are percentages (of animals reacting to a given dose of poison) and  $x$  are log doses. Calling  $l = \ln(p/q)$ , where  $p$  is observed proportion and  $q = 1 - p$ , the minimization of the following quantity  $S n p q (\hat{l} - l)^2$ , where  $\hat{l}$  is the expected value of  $l$ , permits a simple method of estimating  $a$  and  $b$ , on which the  $\hat{l}$  depend. Tables of  $l$  (logits, to be kept distinct from other similar but not identical values in the literature) and of weights are given, as well as examples of application. — The solution proposed permits estimation with one cycle; it does not permit, however, to include zero and hundred % observations, unless by applying a second cycle of calculations. Maximum likelihood estimates involve in this case, as known, solution by iteration. (Usually, a single cycle is sufficient to reach a



working approximation; however, it is claimed that in some cases the convergence is slow.)

*L. Cavalli.*

Bailey, Norman T.: The use of chain-binomials with a variable chance of infection for the analysis of intra-household epidemics. *Biometrika* 40, 279—286 (1953).

Freeman, G. H.: Spread of diseases in a rectangular plantation with vacancies. *Biometrika* 40, 287—296 (1953).

● Böhmer, Friedrich: *Versicherungsmathematik II.* (Sammlung Götschen, Band 917.) Berlin: Walter de Gruyter u. Co. 1953. 205 S. DM 4,80.

(Bd. I, 2. Aufl., Berlin 1951). Das vorliegende Götschen-Bändchen „Versicherungsmathematik II“ ist gegliedert in einen 1. Teil „Lebensversicherungsmathematik“ und in einen 2. Teil „Einführung in die technischen Grundlagen der Sozialversicherung“. Diese Aufspaltung kann insofern zu Mißverständnissen führen, als Sozialversicherung hier nicht als Gegensatz zur Einzelversicherung gemeint ist; die technischen Grundlagen der Invaliden- und Witwenversicherung, welche hauptsächlich den 2. Teil ausmachen, gehören sowohl der Einzel- wie der Sozialversicherung an; als Sozialversicherung werden Formen der Personenversicherung außer der Lebensversicherung bezeichnet. Der Verf. stellt sich im 1. Teil die Aufgabe, nach Ableitung der Kapitalisationsgesetze und der Maßzahlen der Sterblichkeitsmessung, die elementaren Formen der Todes- und Erlebensfallversicherung auf ein und zwei Leben herzuleiten. Die Darstellung, die sehr klar und präzise ist, geht überwiegend von der kontinuierlichen Betrachtungsweise aus. Die Beschreibung umfaßt ausschließlich die Nettowerte; Begriffe wie ausreichende Prämie, Tarifprämie, Dividendendeckungskapital, ferner die Gewinnermittlung und -verteilung fallen bereits außerhalb des gesteckten Zieles. Der 2. Teil ist der Invaliden- und Witwenversicherung gewidmet; die Darstellung lehnt sich formal eng an das Vorgehen an, wie es bei Pensionskassen üblich ist. — Zahlreiche eingestreute Zahlenbeispiele erleichtern das Verständnis. Wenn es materiell in diesem Zusammenhang auch belanglos ist, auf welche statistischen Voraussetzungen sich die Beispiele stützen, wäre es aus psychologischen Gründen doch wertvoll gewesen, neuere Unterlagen zu verwenden. Wir halten die Veröffentlichung im Sinne einer ersten Einführung in die Versicherungsmathematik, insbesondere für Studierende in den ersten Semestern, für wertvoll. Weiterzugehen und auch für die spätere praktische Betätigung eine Grundlage zu bieten, lag wohl nicht in der Absicht des Verf.

*E. Zwinggi.*

Hansen, Chr.: Über einen Satz der Mathematik der Lebensversicherung auf ein Leben. *Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath.* 53, 152—154 (1953).

Verf. zerlegt die gemischte Versicherung mit variabler Versicherungssumme in eine gleiche Versicherung mit konstanter Versicherungssumme und in eine Aufspaltung.

*E. Zwinggi.*

Robert, J.-P.: Bases techniques des assurances en cas d'hospitalisation. *Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath.* 53, 205—271 (1953).

Tosberg, Adolf: Über ein neues versicherungsmathematisches Verfahren als Ergebnis neuerer Morbiditätsuntersuchungen. *Bl. Deutsch. Ges. Vers.-Math.* 1, Heft 5, 3—84 (1953).

Zwinggi, Ernst: Ergänzende Note zu „Prämien und Deckungskapitalien in der Todesfallversicherung, wenn die Beiträge nur bis zum Todestag geschuldet sind“. *Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath.* 53, 141—144 (1953).

Verf. ergänzt seine 1952 veröffentlichten Untersuchungen (dies. Zbl. 47, 136) durch eine Ableitung der Prämienformel für eine gemischte Versicherung zweier verbundener Leben, bei der die Summe 1 beim ersten Tod, spätestens nach  $n$  Jahren fällig wird. Unter der auch seinen früheren Untersuchungen zugrunde liegenden Annahme, daß die Sterbenswahrscheinlichkeit im Laufe eines Versicherungsjahres linear verläuft, gewinnt er durch Auflösung der Rekursionsformel für das Deckungskapital die Formel für die kontinuierlich zahlbare Prämie

$$\bar{P}_{x_1, x_2} = (nE_{x_1, x_2} + \bar{s}_1 \cdot {}_nA_{x_1, x_2} + W_2) / (\bar{a}_1 a_{x_1, x_2} \cdot \bar{n} - k_1 \cdot {}_nA_{x_1, x_2} + W_1)$$

mit  ${}_s k_1 = \frac{i - \delta}{\delta^2}$ ,  $W_1 = \frac{v(g_1 - k_1)}{D_{x_1, x_2}} \sum_0^{n-1} D_{x_1 + \tau, x_2 + \tau} q_{x_1 + \tau} q_{x_2 + \tau}$ ,

$$W_2 = \frac{v(\bar{s}_1 - 2k_1)}{D_{x_1, x_2}} \sum_0^{n-1} D_{x_1 + \tau, x_2 + \tau} q_{x_1 + \tau} q_{x_2 + \tau}.$$

Für die Berechnung von  $P_{x_1, x_2}$  reicht jedoch, wie Zahlenbeispiele zeigen, die der exakten Prämienformel für die gemischte Versicherung für ein Leben entsprechende Näherungsformel  $P_{x_1, x_2} = (nE_{x_1, x_2} + s_1 \cdot {}_nA_{x_1, x_2}) \cdot (a_1 \cdot a_{x_1, x_2; n} - k_1 \cdot {}_nA_{x_1, x_2})$  vollkommen aus. G. Friede.

**Zwinggi, E.: Zur Bestimmung des Effektivzinsfußes.** *Experientia* 9, 413 (1953).

Verf. zeigt, daß sich mit dem von ihm zur Ableitung einer Näherungsformel für den Berechnungszinsfuß einer Leib-(Zeit-)rente entwickelten Verfahren (dies. Zbl. 46, 374) auch eine Formel zur näherungsweise Berechnung des Effektivzinsfußes einer fest verzinslichen, an einem bestimmten Termin rückzahlbaren Anleihe aus dem Anfangskurs gewinnen läßt. Zahlenbeispiele lassen erkennen, daß die mit dieser Formel für die praktisch vorkommenden Dauern erzielte Genauigkeit völlig ausreicht. Eine allgemeine Fassung dieser verschiedener Verallgemeinerungen fähigen Methode stellt Verf. an anderer Stelle in Aussicht. G. Friede.

**Rufener, E.: Renten und Todesfallversicherungen höherer Ordnung.** Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath. 53, 166—188 (1953).

Verf. untersucht die diskontierten Zahlen höherer Ordnung von der Form

$$\bar{S}_x^r = \int_x^\infty \bar{S}_x^{r-1} d\xi \quad \text{und} \quad S_x^r = \sum_{\xi=x}^\infty S_x^{r-1}$$

mit der vom gewohnten Schema abweichenden

Bezeichnung  $\bar{S}_x^0 = D_x$ ,  $S_x^1 = N_x$ ,  $\bar{S}_x^2 = S_x$ , welche im Zusammenhang mit Todesfall- und Rentenversicherungen höherer Ordnung auftreten. E. Zwinggi.

**Tedeschi, Bruno: Concezioni teoriche del rischio e loro aderenza alla realtà delle assicurazioni.** Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 619—626 (1953).

Vergleich zwischen der klassischen und der kollektiven Risikotheorie, mit besonderer Berücksichtigung der Arbeiten von Cantelli, de Finetti, Ottaviani, Segerdahl. Zusammenfassung von zwei Arbeiten des Verf. [„Giorn. Ist. Ital. Attuari“ 14, 16—35 (1951) und Perrella ed., 1951], und weitere Betrachtungen zugunsten der klassischen Formulierung im Cantellischen Sinne. B. de Finetti.

• **Snyder, L. R.: Essential business mathematics.** New York: McGraw-Hill Book Company 1953. X, 421 p. \$ 4.50.

**Couffignal, Louis: Méthodes et limites de la cybernétique.** Revista Acad. Ci. Madrid 47, 63—82 (1953).

## Geometrie.

### Grundlagen. Nichteuklidische Geometrie:

**Sasaki, Usa: Lattice theoretic characterization of an affine geometry of arbitrary dimensions.** J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 16, 223—238 (1952).

**Sasaki, Usa: Semi-modularity in relatively atomic, upper continuous lattices.** J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 16, 409—416 (1953).

**Sasaki, Usa: Lattice theoretic characterization of geometries satisfying „Axiome der Verknüpfung“.** J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 16, 417—423 (1953).

Es handelt sich um Eigenschaften, die geeignet sind, den Verband der Unterräume einer Geometrie zu charakterisieren, und zwar:  $G_1$  = Geometrie, in der die Verknüpfungsaxiome von Hilbert, soweit sie nicht die Dimension beschränken, erfüllt sind;  $G_2$  = eine  $G_1$ , in der auch das Parallelaxiom gilt. Bezeichnung:  $(b, c)M$  bedeutet: für  $a \subseteq c$  gilt  $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap c$  (d. h.  $c, b$  bilden ein modulares Paar). Bedingungen: I. Ist  $a \subseteq b$ , so gibt es einen Punkt  $p$  mit  $a \cup a \cap p \subseteq b$  (relative Atomizität). II. Ist  $b \cap c \neq 0$ , so gilt  $(b, c)M$ ; ist  $b \cap c = 0$ , so folgt  $(c, b)M$  aus  $(b, c)M$ . III<sub>1</sub>. Ist  $x \neq y$  und wird  $a$  von  $x$  und  $y$  bedeckt, so werden  $x$  und  $y$  von  $x \cap y$  bedeckt. III<sub>2</sub>. Aus  $(b, c)M$  folgt  $(c, b)M$ . IV. Sind  $p, q, r$  Punkte,  $r \subseteq a$ ,  $p \cap q \subseteq a$ , dann existiert ein Punkt  $s \subseteq a$ , so daß  $p \subseteq q \cup r \cup s$  („strongly plane“). V. Ist  $p$  ein Punkt, dann ist entweder  $p \subseteq a$  oder  $a \cap p$  bedeckt  $a$ ; ist  $h$  von 1 bedeckt,  $a \cap h \neq 0$ , so ist entweder  $h \subseteq a$ , oder  $a$  bedeckt  $a \cap h$ . VI. Sind  $p, q, r$  unabhängige Punkte, so gibt es genau ein Element  $u$ , so daß  $p \subseteq u \cap q \cap r$ ,  $u \cap (q \cap r) = 0$  ist. — In der zweiten Note wird gezeigt, daß in nach oben stetigen Verbänden mit 0-Element, in denen



I gilt,  $III_1$  und  $III_2$  äquivalent sind, sowie II mit V und mit dem Bedingungs paar  $III_1$ , IV (also auch  $III_2$ , IV) äquivalent ist. Die Resultate der 3. bzw. 1. Note lassen sich dann zusammenfassen:  $L$  ist dann und nur dann isomorph zum Verbanne der Unterräume einer  $G_1$ , wenn  $L$  nach oben stetig ist, 0 enthält, sowie I und II gelten. Damit die Geometrie eine  $G_2$  sei, ist zusätzlich notwendig und hinreichend, daß VI gilt.

F. W. Levi.

**Lenz, Hanfried:** Beispiel einer endlichen projektiven Ebene, in der einige, aber nicht alle Vierecke kollineare Diagonalepunkte haben. Arch. der Math. 4, 327—330 (1953).

Verf. gibt ein Beispiel einer endlichen affinen nicht-desarguesschen Ebene, in der der kleine Satz von Desargues allgemein gilt, jedoch gleichzeitig Vierecke mit kollinearen und nichtkollinearen Diagonalepunkten existieren. Der Koordinatenbereich, nach M. Hall ein sog. Veblen-Wedderburnsystem, besteht aus der additiven Gruppe des  $GF(16)$ , für das eine besondere Multiplikation erklärt ist. Zum Problem der Abhängigkeit von Schnittpunktsätzen lehrt dies Beispiel: Die Gültigkeit des projektiven kleinen Desargues  $D_9$  mit fester Achse reicht nicht aus, um auf die allgemeine Gültigkeit oder Ungültigkeit des Fano-Axioms zu schließen. Nach G. Pickert, dies. Zbl. 46, 144, ist dies anders, wenn  $D_9$  allgemein gilt.

W. Klingenberg.

**Berman, Gerald:** Finite projective plane geometries and difference sets. Trans. Amer. math. Soc. 74, 492—499 (1953).

Die sog. Differenzmengen [d. s. Mengen von  $m+1$  ganzen Zahlen  $d_j$ , für welche die Differenzen  $d_i - d_j$  ( $i, j = 0, 1, \dots, m; i \neq j$ ) alle Restklassen  $\text{mod } q = m^2 + m + 1$  mit Ausnahme von  $q$  selbst durchlaufen] sind schon wiederholt zu Untersuchungen endlicher affiner und projektiver Ebenen benutzt worden. Den Punkten einer projektiven Desarguesschen Ebene sind in bekannter Weise (vgl. G. Berman, dies. Zbl. 48, 371) die Elemente eines Erweiterungskörpers dritten Grades des Koordinatenkörpers der Geometrie zugeordnet. Gewisse Elemente dieses Erweiterungskörpers führen nach Singer zu den Differenzmengen, die ihnen entsprechen. Diese Zuordnung wird eingehend untersucht, und mit den dabei gewonnenen Ergebnissen werden zwei Vermutungen von Singer bewiesen. Bemerkenswert ist noch das Resultat des Verf., daß aus einer bestimmten Differenzmenge  $d_j \text{ mod } q$  jede andere  $d'_j \text{ mod } q$  in der Form  $d'_j = s + t d_j$  mit  $(t, q) = 1$  erhalten werden kann.

E. Sperner.

**Sholander, Marlow:** Plane geometries from convex plates. Pacific J. Math. 3, 667—671 (1953).

$K$  sei ein ebener konvexer Bereich,  $s_j(\varphi)$  diejenige Kurve (genannt „strut“), welche die parallelen Sehnen der Richtung  $\varphi$  im Verhältnis  $j:(1-j)$  teilt. Zwei struts können sich nur dann in mehr als einem Punkte schneiden, wenn der Rand von  $K$  mindestens zwei Strecken enthält. Andernfalls bilden die Punkte und struts von  $K$  ein Modell einer affinen Geometrie (im Sinne von Artin, Coordinates in affine geometry, Indiana, 1940, Axiom I—III; auch Birkhoff, Lattice theory, rev. ed., New York 1948, S. 110, APG 1—3, dies. Zbl. 33, 101). Ist  $K$  eine Ellipse, so ist auch Artins Axiom IV (anhangsweise auch hier wiedergegeben) erfüllt, und man hat ein endliches Modell der euklidischen Geometrie. Erweiterung zu einer projektiven Geometrie ist durch Hinzunahme der Randkurve von  $K$  als uneigentlicher Linie möglich, auch Abbildung auf einen Busemannschen S. L.-Raum. H. Gericke.

**Chisini, O.:** La non dimostrabilità del Postulato di Euclide. (Trattazione elementare.) Periodico Math., IV. Ser. 31, 7—33 (1953).

Eine elementare und didaktisch geglückte Herleitung des Kleinschen Modells der hyperbolischen Ebene.

W. Klingenberg.

**Fejes-Tóth, L.:** Kreisausfüllungen der hyperbolischen Ebene. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 4, 103—110 (1953).

Verf. betrachtet Lagerungen von mindestens 3 nicht übereinandergreifenden kongruenten Kreisen auf der Kugel, der euklidischen Ebene und der hyperbolischen

Ebene. Für die Lagerungsdichte  $d$  gilt allgemein die Ungleichung

$$d \leq [3 \operatorname{cosec}(x/a) - 6]/(a - 6),$$

wenn  $2\pi/a$  der Winkel eines aus Durchmessern der Kreise gebildeten gleichseitigen Dreiecks ist. Diese Ungleichung hatte Verf. schon früher für die Kugel abgeleitet. Verf. beweist die Ungleichung für jedes Dreieck eines Netzes, das sich durch Verbinden der Kreismittelpunkte so bilden läßt, daß die Dreieckssumkreise keine Ecken des Netzes im Innern enthalten. Das Gleichheitszeichen wird nur bei ganzzahligen Werten von  $a$  angenommen. In der hyperbolischen Ebene ergibt sich mit  $a \rightarrow \infty$  die maximale Lagerungsdichte  $3\pi$ , die bei einer Lagerung von Grenzkreisen angenommen wird, wobei im Poincaréschen Modell die Kreismittelpunkte ein aus der Theorie der Modulfunktionen bekanntes Netz bilden. *K. Schütte.*

**Fejes Tóth, L.: Kreisüberdeckungen der hyperbolischen Ebene.** Acta math. Acad. Sci. Hungar. 4, 111—114 (1953).

Zu dem in der vorigen Arbeit behandelten Problem der dichtesten Kreislagerung ist das Problem der dünnsten Überdeckung mit mindestens 3 kongruenten Kreisen dual. Verf. beweist für die Überdeckungsdichte  $D$  in jedem Dreieck eines wie vorher gebildeten Netzes die Ungleichung  $D \geq [12 \operatorname{ctg}(\pi/4) - 6]/(4 - 6)$ , wobei  $2\pi/4$  der Winkel eines gleichseitigen Dreiecks ist, das sich einem der gegebenen Kreise einbeschreiben läßt. In der hyperbolischen Ebene ergibt sich entsprechend wie vorher mit  $4 \rightarrow \infty$  die minimale Überdeckungsdichte  $12\pi$  bei einer Überdeckung aus Grenzkreisen. *K. Schütte.*

**Reenpää, Yrjö: Über anschauliche Unabhängigkeit und begriffliche Orthogonalität.** Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I 1953, Nr. 158, 10 S. (1953).

### Elementargeometrie:

• **Lietzmann, W.: Der Pythagoreische Lehrsatz. Mit einem Ausblick auf das Fermatsche Problem.** 7. Aufl. (Math.-phys. Bibliothek, Reihe I, Nr. 23). Stuttgart: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1953. 96 S. DM 3,60.

**Guggenbuhl, Laura: Henri Brocard and the geometry of the triangle.** Math. Gaz. 37, 241—243 (1953).

**Cobb, R. H.: A symbolism for the geometry of the triangle.** Math. Gaz. 37, 174—187 (1953).

Verf. entwickelt einen ziemlich komplizierten Symbolismus für die Elemente der Dreiecksgeometrie, dessen Einzelheiten hier nicht angegeben werden können, und zeigt an einigen Beispielen die Möglichkeit, mit seiner Hilfe Ergebnisse zu finden, z. B. die Eigenschaft des Nagelschen Punktes, Inkreismittelpunkt des anti-medialen Dreiecks zu sein (der Nagelsche Punkt ist der Schnittpunkt der Eckenlinien nach den Ankreisberührungspunkten und das antimediale Dreieck hat die Ecken des Grunddreiecks zu Seitenmitten). *M. Zacharias.*

**Manara, C. F.: Un teorema sui triangoli equilateri.** Periodico Mat., IV. Ser. 31, 186—188 (1953).

Ein Beweis des Satzes von D. Pompeiu: Ist  $ABC$  ein gleichseitiges Dreieck und  $P$  ein Punkt seiner Ebene, so kann man aus den Strecken  $PA$ ,  $PB$ ,  $PC$  ein Dreieck konstruieren. *M. Zacharias.*

**Paolantonio, Raffaele: Alcune proprietà delle trisettrici degli angoli interni di un triangolo.** Periodico Mat., IV. Ser. 31, 246—253 (1953).

Nach einem elementaren, etwas umständlichen Beweis des Morleyschen Satzes von den winkeldrittelnden Eckenlinien des Dreiecks beweist Verf. den, wie er glaubt, neuen Satz, daß die sechs Trisezierenden einen Kegelschnitt berühren, und zieht daraus einige Folgerungen. Der Satz nebst den Folgerungen findet sich für eine die Trisezierenden einschließende allgemeinere Art von Eckenlinienpaaren bereits 1938 in einer Arbeit des Ref. (dies. Zbl. 18, 163). *M. Zacharias.*



**Thébault, Victor:** On cevians of a triangle. Amer. math. Monthly 60, 167—173 (1953).

In einem Dreieck  $ABC$  mit den Seitenlängen  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$  schneiden sich nach Ceva die Eckenlinien  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ , die die Gegenseiten in den Verhältnissen

$$BA_1:A_1C = c^n:b^n, CB_1:B_1A = a^n:c^n, AC_1:C_1B = b^n:a^n$$

schneiden, in einem Punkt  $P_n$ . Nach vielen hieran anknüpfenden metrischen Berechnungen folgen Anwendungen auf ein Tetraeder  $ABCD$ . In jedem der vier Dreiecke  $BCD, \dots$  werden die Eckenlinien gezogen, die die Gegenseiten in den Verhältnissen der  $n$ -ten Potenzen der anliegenden Seiten teilen. Sind  $A_n, B_n, C_n, D_n$  die Schnittpunkte der Eckenlinien in den vier Dreiecken und  $A'_n, B'_n, C'_n, D'_n$  ihre harmonisch Assoziierten, so sind  $AA_n, BB_n, CC_n, DD_n$  vier Geraden der einen Schar und  $AA'_n, \dots$  vier Geraden der anderen Schar eines Hyperboloids. Sind  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3$  irgend sechs den Tetraederkanten  $BC, CA, AB, DA, DB, DC$  zugeordnete Zahlen und  $A_0, B_0, C_0, D_0$  die Punkte der Dreiecksebenen, deren baryzentrische Koordinaten den den Dreiecksseiten zugeordneten Zahlen  $\lambda$  proportional sind, so sind  $AA_0, BB_0, CC_0, DD_0$  vier Geraden der einen Schar eines Hyperboloids. Es folgen noch zwei weitere Sätze über hyperboloidische Geraden im Tetraeder.

*M. Zacharias.*

**Thébault, Victor:** Sur des cercles et des sphères particuliers de Tucker. Mathesis 62, 111—119 (1953).

Der Kreis, der die drei Ankreise eines Dreiecks innen berührt und die Kreise, die den Inkreis innen und zwei Ankreise außen berühren und vom Feuerbachkreis verschieden sind, sind, wie Verf. beweist, vier Tuckersche Kreise (d. h. Umkreise von Dreiecken, die dem Grunddreieck unter konstanten Winkeln einbeschrieben sind). — Im isodynamischen Tetraeder (d. h. einem Tetraeder mit gleichen Produkten der Gegenkanten), und nur in einem solchen, gibt es vier besondere Tuckersche Kugeln, deren jede durch eine der vier Ecken des Tetraeders geht; die Mittelpunkte dieser Kugeln sind die Schnittpunkte des Brocardschen Durchmessers mit den Höhen des Tetraeders.

*M. Zacharias.*

**Marmion, A.:** Sur les six points de Servais d'un tétraèdre. Mathesis 62, 215—233 (1953).

Die vier Drehzylinder über den Umkreisen der Flächen eines Tetraeders  $T$  als Grundflächen haben sechs Punkte, die „Servaischen Punkte“, gemein, die paarweise bezüglich des Umkugelmittelpunktes von  $T$  symmetrisch liegen. Jeder der sechs Punkte liegt in einer Ebene  $\pi$ , die die Fußpunkte der Lote von dem Punkt auf die sechs Kanten von  $T$  enthält. Die sechs Ebenen  $\pi$  gehen durch den Mongeschen Punkt (den Mittelpunkt des Höhenhyperboloids) von  $T$  und berühren die Steinerschen Dreispitze der Flächen von  $T$ . Die Servaischen Punkte sind die Kantennitten zweier Tetraeder  $T', T''$ , deren Kanten auf den entsprechenden Ebenen  $\pi$  senkrecht stehen. Die Kanten von  $T$  sind die Achsen von sechs Drehzylindern, die dem einen jener beiden Tetraeder umschrieben sind. Das Entsprechende gilt von dem zu  $T$  bezüglich  $O$  symmetrischen Tetraeder  $T_1$  und dem andern der beiden Tetraeder. Die Ecken und die Höhenschnittpunkte der Flächen von  $T$  liegen auf einer einzigen Biquadratik  $B$ . Die Höhen von  $T'$  und  $T''$  sind den Asymptoten von  $B$  parallel. Die sechs Servaischen Punkte und die vier Ecken von  $T$  bilden eine Gruppe von zehn Punkten, von denen irgend neun immer auf einem Drehzylinder liegen. Das Fußpunktetraeder jedes Servaischen Punktes bezüglich  $T$  bildet mit  $T$  ein Möbiussches Tetraederpaar. — Das sind einige der zahlreichen Ergebnisse für das allgemeine Tetraeder. Es folgen Anwendungen auf das Tetraeder mit Höhenschnittpunkt, das gleichflächige Tetraeder und das Tetraeder von N.-A. Court, in dem der Fußpunkt des Lotes von  $D$  auf die Fläche  $ABC$  auf dem Umkreis von  $ABC$  liegt.

*M. Zacharias.*

**Bini, Umberto:** Discendenza napoleonica. Archimede 5, 103—108 (1953).

Der Satz von Napoleon besagt: Die Mitten der über den Seiten eines beliebigen Dreiecks (nach außen oder nach innen) konstruierten gleichseitigen Dreiecke sind die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks. Verf. beweist gewisse Eigenschaften von Polygonen, die er nach dem Vorgang von E. Hess (S.-Ber. Ges. Naturw. Marburg 1874, 611—743) halbreghulär nennt, die als Verallgemeinerungen des Satzes von Napoleon betrachtet werden können. Ein halbreghuläres Polygon (h. P.) hat eine gerade Anzahl von Ecken und entweder gleiche Winkel oder gleiche Seiten. Im gleichseitigen h. P. sind die geradzahlig und die ungeradzahlig Winkel je untereinander gleich. Entsprechendes gilt von den Seiten im gleichwinkligen h. P. Über den Seiten des h. P. werden (nach außen oder innen) regelmäßige Vielecke

konstruiert. Dann werden die Bedingungen dafür untersucht, daß die Mitten dieser Vielecke ein regelmäßiges Vieleck bilden. *M. Zacharias.*

**Sz.-Nagy, Gy.: Mittelkante, Mittelebene, Mittelpunkt von Kanten einer Ecke.** Publ. math., Debrecen 2, 161—165 (1953).

Durch einen festen Punkt  $O$  gehende Halbgeraden  $OA_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) heißen Kanten der Ecke  $O$ . Ihre Mittelkante ist die Halbgerade  $OM$  mit  $OM = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OE_k}$ , wobei  $E_k$  der Schnittpunkt von  $OA_k$  mit der Einheitskugel um  $O$  ist. (Wenn  $M = O$ , so heißt  $O$  Mittelpunkt der  $n$  Kanten.) Schließlich wird die Normalebene zu  $OM$  durch  $O$  Mittelebene der  $n$  Kanten genannt. Für diese Begriffe beweist Verf. neben einigen elementaren, wohl trivialen Aussagen Sätze wie z. B.: Haben 3(4) Kanten einer Ecke einen Mittelpunkt, so bilden ihre Endpunkte ein gleichseitiges Dreieck (ein gleichseitiges Tetraeder oder sind Endpunkte von zwei Durchmessern eines Kreises). Für die Ecke  $O$  wird schließlich eine Minimaleigenschaft angeführt und ein Beweis eines von J. Steiner (ges. Werke 2, Berlin 1882, S. 35) aufgestellten Satzes gegeben. *H. R. Müller.*

**Sydler, J.-P.: Sur l'équivalence des polyèdres à dièdres rationnels.** Elemente Math. 8, 75—79 (1953).

Mit wesentlicher Verschärfung des früher vom Verf. erzielten Resultats (dies. Zbl. 48, 136) wird gezeigt: Sind für zwei Polyeder  $A$  und  $A'$  des gewöhnlichen Raumes die notwendigen Dehnschen Bedingungen für die Zerlegungsgleichheit (symbolisch  $A \sim A'$ ) erfüllt, so gibt es zwei Polyeder  $S$  und  $S'$  mit Flächenwinkeln, welche ausschließlich ganzzahlige Multipla von  $\pi/4$  sind, so daß  $A + S \sim A' + S'$  gilt. — Verf. kann nämlich zeigen, daß für jedes Polyeder  $R$  mit „rationalen“ Flächenwinkeln (vgl. Symbolik im oben zitierten Referat) stets  $R \sim S \pmod{W}$  gilt, wo  $S$  ein Polyeder der oben beschriebenen Art bedeutet. Die noch ungelöste Frage, ob Dehns Bedingungen auch hinreichend sind, würde durch den Nachweis, daß  $S \sim W$  ( $W =$  Würfel) gilt, positiv beantwortet. — Zur Beweisführung beansprucht Verf. wieder recht kunstvolle Polyederverwandlungen. *H. Hadwiger.*

**Steiger, Franz: Zu einer Frage über Mengen von Punkten mit ganzzahliger Entfernung.** Elemente Math. 8, 66—67 (1953).

Verf. zeigt, wie im  $R_k$  zu jeder natürlichen Zahl  $N > k$  ein System von mindestens  $N$  Punkten konstruiert werden kann, die lauter ganzzahlige Entfernungen haben und nicht alle demselben linearen Unterraum von  $k - 1$  Dimensionen angehören. *E. Trost.*

**Locher-Ernst, L.: Bilder zur Geometrie der regelmäßigen Figuren.** Elemente Math. 8, 97—102 (1953).

**Jakobi, R.: Einige Parabeleigenschaften.** Elemente Math. 8, 107—109 (1953).

**Thébault, Victor: Recreational geometry: Curvilinear and mixtilinear figures.** Scripta math. 19, 69—77 (1953).

• **Breidenbach, W.: Das Delische Problem. (Die Verdoppelung des Würfels).** 3. Aufl. (Math.-phys. Bibliothek, Reihe I, Nr. 68). Stuttgart: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1953. 59 S.; kart. DM 2,40.

• **Randolph, John F.: Trigonometry.** New York: The Macmillan Company 1953. X, 220 p. \$ 3,25.

Dieses Buch enthält einen elementaren Lehrgang der ebenen Trigonometrie. Die Grundformeln werden mittels rechtwinkliger Koordinaten hergeleitet. Das notwendige Rüstzeug liefern zwei Anhänge über Algebra (29 Seiten) und über Koordinaten (11 S.). Ein dritter Anhang (21 S.) dient der Einführung der Logarithmen und der Behandlung von Exponentialgleichungen. An Tafeln (16 S.) sind beigegeben die vierstelligen gemeinen Logarithmen der Zahlen 1,00 bis 9,99 mit Intervall 0,01 und die fünfstelligen der Zahlen von 1,000 bis 2,009 mit Intervall 0,001, die vierstelligen Werte der trigonometrischen Funktionen einschließlich sec und cosec (sowie die Bogenlängen) für spitze Winkel von  $10'$  zu  $10'$  und ihre vierstelligen Logarithmen. — Der



eigentliche Lehrgang (125 S.) bringt in klarer Darstellung: I. die Einführung der trigonometrischen Funktionen und einiges über die Tafeln, II. die Herleitung der Additionstheoreme für beliebige Argumente, III. das rechtwinklige Dreieck und die Addition von Vektoren, IV. das schiefwinklige Dreieck, V. Identitäten und trigonometrische Bestimmungsgleichungen (u. a. auch  $a \sin \theta + b \cos \theta = c$ ), VI. komplexe Zahlen und Wurzelberechnung, VII. Funktionsbilder und Umkehrfunktionen. — In den Text sind zahlreiche durchgerechnete Beispiele eingestreut, die vielfach praktische Anwendungen behandeln und im Verein mit den reichlich beigegebenen Figuren das Verständnis erleichtern. An die einzelnen Abschnitte schließt sich eine Fülle von Übungsaufgaben an. Etwa für die Hälfte derselben findet der Leser am Schluß die Resultate (16 S.), so daß das Buch besonders auch zum Selbststudium geeignet erscheint. Das gediegen ausgestattete Buch ist mit ausführlichem Inhaltsverzeichnis und mit alphabetischem Register versehen. Seinem elementaren Charakter entsprechend geht es auf Reihenentwicklungen nicht ein. Daher fehlt die Behandlung der trigonometrischen Funktionen kleiner Winkel. Auch wird die Frage der Genauigkeit nur gelegentlich flüchtig gestreift. In rechen technischer Hinsicht wird man vielleicht die Lalandesche Regel vermissen.

E. Schönhardt.

## Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

- Fabricius-Bjerre, Fr.: *Lehrbuch der Geometrie. I. Analytische Geometrie.* 2. Aufl. Kopenhagen: Jul. Gjellerup 1953. 169 S. Kr. 24.— [Dänisch].
- McCrea, W. H.: *Analytical geometry of three dimensions.* 2. ed. New York: Interscience Publishers 1953. VII, 144 p. \$ 1,25.

Cadwell, J. H.: A property of linear cyclic transformations. *Math. Gaz.* 37, 85—89 (1953).

Ausgehend von der Beobachtung, daß die Seitenmitten eines beliebigen Vierecks ein Parallelogramm bilden und daß die fortgesetzte Wiederholung des Halbierungsprozesses auf zwei Serien ähnlicher und ähnlich gelegener Parallelogramme führt, betrachtet Verf. folgenden verallgemeinerten Prozeß: Aus einem gegebenen  $n$ -Eck  $P_0$  im  $R_n$ , dessen Ecken durch die Ortsvektoren  $r_r$  festgelegt seien, wird vermöge  $r'_r = \sum_{s=0}^{n-1} \alpha_s r_{r+s}$  (mit konstanten reellen Koeffizienten  $\alpha_s$ ) ein zweites  $n$ -Eck  $P_1$  abgeleitet, und dieser Prozeß wird ständig wiederholt; der Fall der Seitenhalbierung ist hierin für  $\alpha_0 = \alpha_1 = 1/2$ ,  $\alpha_2 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$  enthalten. Das Hauptergebnis der gehaltvollen Untersuchung, die sich auf eine geschickte Darstellung der Transformationsmatrix stützt, besteht in der Feststellung, daß die Folge der Polygone  $P_m$  sich der Gestalt nach im allgemeinen ebenen  $n$ -Ecken nähert, die zu einem regulären  $n$ -Eck affin sind. Auch das Auftreten von Teilfolgen (nahezu) ähnlicher und ähnlich gelegener Polygone  $P_m$  wird geklärt. Abschließend wird noch auf besondere Ausnahmefälle hingewiesen.

W. Wunderlich.

Lauffer, Rudolf: *Wege in Minimalebenen.* *Math. Nachr.* 9, 241—242 (1953).

Betrachtung der Weglängen in Minimalebenen, in Paaren und geradlinigen Anzahlen von Minimalebenen. Der Sonderfall des isotropen Vierflachs, den auch W. Blaschke (dies. Zbl. 31, 178) studiert hat, spielt übrigens auch in der Zyklographie eine Rolle.

K. Strubecker.

Gutiérrez Novoa, Lino: Über den antimetrischen quadratischen Raum. *Revista Soc. Cubana Ci. Fis. Mat.* 3, 1—7 (1953) [Spanisch].

Allen, E. F.: An extended inversive geometry. *Amer. math. Monthly* 60, 233—237 (1953).

Die „Inversive Geometrie“ von F. Morley und F. V. Morley (London 1933, dies. Zbl. 9, 29) geht von den gewöhnlichen komplexen Zahlen  $z = x + iy$  und  $\bar{z} = x - iy$  mit  $i^2 = -1$  aus und benutzt sie zur Herleitung von Sätzen der Geometrie des Dreiecks mit dem Umkreis  $z\bar{z} = x^2 + y^2 = 1$ . Verf. verallgemeinert den Begriff der inversiven Geometrie: Er geht aus von den Variablen  $z = x + ry$  und  $\bar{z} = x - ry$ , wo  $r^2 = -k^2 + 1$ ,  $+k^2$  sein kann ( $k$  eine reelle Zahl). Die Gleichung  $z\bar{z} = 1$  stellt dann entweder die Ellipse  $x^2 + k^2 y^2 = 1$  oder die gleichseitige Hyperbel  $x^2 - y^2 = 1$  oder die Hyperbel  $x^2 - k^2 y^2 = 1$  dar. Er ist dann

in der Lage, in diesen drei Fällen entsprechende Sätze für Dreiecke, die Mittelpunktskegelschnitten einbeschrieben sind, zu beweisen. So erhält er Sätze für einen Neunpunktekegelschnitt und für eine Pseudo-Eulergerade eines einem Mittelpunktskegelschnitt einbeschriebenen Dreiecks, für eine verallgemeinerte Wallacegerade und eine verallgemeinerte „Bildergerade“ („line of images“). *M. Zacharias.*

**Müller, Hans Robert:** Sulla proiezione cinematica nello spazio euclideo. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. **2**, 407—411 (1953).

Die Geraden des elliptischen Raumes  $E$  kann man nach Hjelmslev, Fubini Study so auf die Punkte zweier Einheitskugelflächen  $K_1, K_2$  beziehen, daß dabei den Bewegungen von  $E$  die Drehungen der  $K_j$  entsprechen. Es werden nun der Raum  $E$  und entsprechend die Kugeln  $K_j$  aus dem reellen ins Gebiet der dualen Zahlen ( $a + \varepsilon b, \varepsilon^2 = 0$ ) erweitert zu  $E^*$  und  $K_j^*$ .  $K_j^*$  kann weiter nach Study, Blaschke auf die Geraden eines reellen Euklidischen Raumes  $R_j$  so abgebildet werden, daß den dualen Drehungen von  $K_j^*$  die reellen Euklidischen Bewegungen von  $R_j$  entsprechen. Somit sind schließlich die dualen Geraden von  $E^*$  auf die Paare reeller Geraden in  $R_1, R_2$  bezogen. Diese Abbildung wird an Beispielen erläutert.

*W. Blaschke.*

**Gambier, B.: Potentiels circulaires. Faisceaux de cercles: points de Poncelet.** J. Math. pur. appl., IX. Sér. **32**, 185—201 (1953).

„Kreispotential“ (potentiel circulaire) mit dem Zentrum  $O$  nennt Verf. den Ausdruck  $(O, \varepsilon R^2) \equiv MO^2 - \varepsilon R^2$ , wo  $O$  ein fester Punkt,  $M$  ein beliebiger Punkt der Ebene,  $\varepsilon = \pm 1$  und  $R$  eine gegebene Länge ist (die auch Null sein kann). Der Kreis um  $O$  mit dem Radius  $R$  heißt das Bild des Kreispotentials, wenn  $\varepsilon = -1$  ist. Der Ausdruck  $[\lambda(MO^2 - \varepsilon R^2) + \mu(MO'^2 - \varepsilon' R'^2)]/(\lambda + \mu)$ , wo  $\lambda, \mu$  veränderlich ist, definiert ein lineares Büschel von Kreispotentialen, dessen  $\infty^1$  Zentren die ganze Gerade  $OO'$  erfüllen. Auf  $OO'$  liegen zwei (reell oder konjugiert komplexe) „Ponceletsche Punkte“  $O_1, O_2$ , für die der Ausdruck für das Büschel der Kreispotentiale die reduzierte Form  $(lMO_1^2 + mMO_2^2)/(l+m)$  annimmt. Der Ausdruck  $MO^2 - \varepsilon R^2$  heißt Potenz des Punktes  $M$  bezüglich des Kreispotentials. Die Punkte gleicher Potenz bezüglich zweier (und damit aller) Kreispotentiale eines Büschels liegen auf der Potenzlinie (axe radical) des Büschels. Weiter definiert Verf. zwei „orthogonale“ Kreispotentialbüschel analog dem Begriff der orthogonalen Kreisbüschel: Die Zentren jedes der beiden Büschel erfüllen die Radikalachse des andern Büschels. Das eine Büschel hat reelle, das andere imaginäre Ponceletsche Punkte. Verf. gibt sodann einige Anwendungen auf Kegelschnittbüschel und Kegelschnittscharen, die den Nutzen seiner neuen Begriffe zeigen sollen.

*M. Zacharias.*

● **Hopkins, E. J. and J. S. Hails:** An introduction to plane projective geometry. Oxford: At the Clarendon Press (Geoffrey Cumberlege) 1953. VI, 276 p. 27 S. 6 d. net.

Ein hübsches Anfängerbuch der algebraischen projektiven Geometrie in der Ebene. Ausgehend von den einfachsten Vorkenntnissen wird der Leser sofort in die projektive Gedankenwelt eingeführt. Eine Fülle von schönen Aufgaben erhöht den Wert des klar geschriebenen Buches.

*J. C. H. Gerretsen.*

**Neville, E. H.: Involution.** Math. Gaz. **37**, 199—202 (1953).

**Lauffer, Rudolf:** Zur Topologie der Konfiguration von Desargues. II. Math. Nachr. **10**, 179—180 (1953).

Vgl. Teil I (dies. Zbl. **50**, 156). Zu jeder Konfiguration von Desargues gehört bekanntlich ein Polarsystem mit null- oder einteiliger Inzidenzkurve 2. Ordnung, in dem jedem Konfigurationspunkt die zugehörige Perspektivitätsachse als Polar zugeordnet ist. Im ersten Teil hat Verf. die sechs topologisch wesentlich verschiedenen Gestalten untersucht, die die Konfiguration annehmen kann. Jetzt beweist er: Hat die Konfiguration die dort mit I bezeichnete Gestalt, so ist die Inzidenzkurve nullteilig; in den fünf anderen Fällen ist sie einteilig. Indem er die Inzidenzkurve als Maßkurve einer nichteuklidischen Geometrie deutet, ergeben sich gewisse Klasseneinteilungen der Dreiecke der elliptischen und der hyperbolischen Maßgeometrie.

*M. Zacharias.*

**Court, N. A.: Pascal's theorem in space.** Duke math. J. **20**, 417—421 (1953).

Man kann den Pascalschen Satz in der Ebene so aussprechen: Die drei Seitenpaare eines Dreiecks  $ABC$  werden von drei geraden Transversalen  $\alpha, \beta, \gamma$  dann



und nur dann in sechs Punkten eines Kegelschnitts geschnitten, wenn die restlichen drei Schnittpunkte  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$  der Dreiecks(gegen)seiten mit den Transversalen auf einer Geraden liegen. Die drei Transversalen können dabei (1) ein Dreieck bilden, (2) durch einen Punkt laufen. Dual dazu kann man den Brianchonschen Satz aussprechen. — Verf. gibt folgende zwei Übertragungen dieser Auffassung des Pascalschen Satzes auf den Raum an: (I) Die vier Kantentripel eines Tetraeders  $ABCD$  werden von vier Transversalebene  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  dann und nur dann in zwölf Punkten einer Fläche zweiter Ordnung geschnitten, wenn die restlichen vier Schnittgeraden  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$  der Tetraeder(gegen)ebenen mit den Transversalebene entweder hyperbolischen Lage haben oder in einer Ebene liegen. Die vier Transversalebene können dabei (1) ein Tetraeder bilden, (2) einen Punkt gemeinsam haben, (3) eine Gerade gemeinsam haben. Dementsprechend läßt der Satz noch verschiedene weitere Formulierungen zu. Es gelten auch entsprechende Umkehrungen dieser Sätze. Dual ergibt sich eine Übertragung des Satzes von Brianchon auf den Raum. — Die zweite Übertragung des Pascalschen Satzes auf den Raum lautet: (II) Die drei windschiefen Kantenvierseite eines Tetraeders werden von drei Transversalebene  $\alpha, \beta, \gamma$  dann und nur dann in zwölf Punkten einer Fläche zweiter Ordnung geschnitten, wenn die in den Transversalebene liegenden Treffgeraden des jeweils dritten Tetraedergegenkantenpaares in einer Ebene liegen. Dual ergibt sich ein zweites Gegenstück des Satzes von Brianchon. — [Bem. des Ref.: Es ist dem Verf. offenbar entgangen, daß seine räumliche Übertragung (I) der Sätze von Pascal und Brianchon nicht neu ist; sie findet sich schon in dem „Aperçu historique“ von Chasles aus dem Jahre 1837. — Der grundsätzliche Nachteil der heute bekannten Ausdehnungen des Pascalschen Satzes auf Flächen zweiter Ordnung liegt darin, daß bei ihnen mehr als zehn Flächenpunkte im Spiele sind. Die wahre Gestalt des Theoremes, dessen Existenz gesichert ist, handelt nur von zehn Punkten; sie ist aber trotz aller Bemühungen noch unbekannt.]

K. Strubecker.

**Alguneid, A. R.: Complete quadric primals in four-dimensional space.** Proc. math. phys. Soc. Egypt. 4, Nr. 4, 93—104 (1953).

Eine „vollständige Quadrik“ eines Raumes  $S_4$  bedeutet eine Quadrik, welche nicht nur als Ort  $Q_0$  von Punkten betrachtet wird, sondern auch gleichzeitig als Ort  $Q_1$  von Berührungsgerade, als Ort  $Q_2$  von Berührungsebene und als Enveloppe  $Q_3$  von Hyperebenen. Verf. bezeichnet mit  $(Q)$  den Inbegriff aller vier Gebilde  $Q_0, Q_1, Q_2, Q_3$ . Im allgemeinsten Falle werden sie durch folgende Gleichungen analytisch dargestellt:

$$(1) \quad \sum a_{rs} x_r x_s = 0; \quad \sum c_{rr', ss'} p_{rr', ss'} = 0; \quad \sum C_{rr', ss'} \pi_{rr', ss'} = 0; \quad \sum A_{rs} u_r u_s = 0;$$

wo die  $x_r, p_{rr', ss'}, \pi_{rr', ss'}, u_r$  Koordinaten von Punkten, Geraden, Ebenen, Hyperebenen bzw. bedeuten, und  $c_{rr', ss'}, C_{rr', ss'}, A_{rs}$  die Unterdeterminanten der Ordnungen 2, 3, 4 der Determinante  $|a_{rs}|$  sind. In den besonderen Fällen, wo Ausartungen auftreten, betrachtet man nur diejenigen Systeme von Gleichungen (1), deren Koeffizienten denselben bilinearen Gleichungen wie im allgemeinsten Falle genügen. Es gibt verschiedene Arten solcher Gleichungen; sie verbinden miteinander: die  $a_{rs}$  und die  $A_{rs}$ ; die  $a_{rs}$  und die  $c_{rr', ss'}$ ; die  $A_{rs}$  und die  $c_{rr', ss'}$ ; ...; die  $c_{rr', ss'}$  und die  $C_{rr', ss'}$  (darunter sind einige besonders wichtig). Auf Grund dieser Relationen und durch die Wahl eines geeigneten Koordinatensystems findet man 15 verschiedene Ausartungen: vier 1. Ordnung, sechs 2. Ordnung, vier 3. Ordnung, und eine einzige 4. Ordnung. Betrachtet man dann die Segresche Mannigfaltigkeit:  $\xi_i = a_{r_1 s_1} \cdot c_{r_2 r'_2, s_2 s'_2} \cdot C_{r_3 r'_3, s_3 s'_3} \cdot A_{r_4 r'_4}$ , so findet man auf ihr eine singularitätenfreie  $M_{14}$ , deren Punkte allen  $(Q)$  eindeutig entsprechen. Die Untersuchung ist eine Verallgemeinerung bekannter Arbeiten über vollständige Kegelschnitte und vollständige Quadriken des Raumes  $S_4$ .

E. Togliatti.

**Puckette, C. C.: The curve of pursuit.** Math. Gaz. 37, 256—260 (1953).

**Deaux, R.: Cubiques anallagmatiques.** Mathesis 62, 193—204 (1953).

Es gibt 14 Familien von Kubiken, die invariant sind bezüglich einer quadratischen involutiven Punkttransformation  $\tau$ , deren vereinigte Punkte und deren singuläre Punkte die Ecken eines vollständigen Vierecks  $U = (U_1 U_2 U_3 U_4)$  mit den Diagonalepunkten  $A = (U_1 U_2, U_3 U_4)$ ,  $B = (U_1 U_3, U_2 U_4)$ ,  $C = (U_1 U_4, U_2 U_3)$  sind. Zwei entsprechende Punkte in  $\tau$  sind konjugiert bezüglich des Büschels der Umkegelschnitte von  $U$  und werden daher aus jedem Diagonalepunkt durch zwei konjugierte Strahlen einer Involution projiziert, deren Doppelstrahlen Gegen-

seiten von  $U$  sind. Ihre Koordinaten  $x, y, z$  und  $x', y', z'$  in einem System, dessen Bezugsdreieck  $ABC$  und dessen Einheitspunkt eine Ecke von  $U$  ist, sind durch die Gleichungen  $xx' = yy' = zz'$  verbunden.  $\tau$  läßt invariant 1. die Kubiken  $I_1$  mit der Gleichung  $a x(y^2 - z^2) + b y(z^2 - x^2) + c z(x^2 - y^2) = 0$ , 2. die Kubiken  $I_2$  mit der Gleichung  $a x(y^2 + z^2) + b y(z^2 + x^2) + c z(x^2 + y^2) + dx y z = 0$  und 3. die 12 Familien von Kubiken  $I_3$ , die einen Doppelpunkt in einer Ecke von  $ABC$  haben und durch eine andere Ecke von  $ABC$  gehen und die Gleichung  $x(a y^2 + 2b y z + c z^2) + \varepsilon z(c y^2 + 2b y z + a z^2) = 0$ ,  $\varepsilon = \pm 1$ , haben. Verf. untersucht die Eigenschaften dieser 14 Familien von Kubiken. Die Veranlassung zu seiner Untersuchung war die Arbeit von L. Droussent (s. nachstehendes Referat).

M. Zacharias.

**Droussent, Lucien:** Cubiques circulaires anallagmatiques par points réciproques ou isogonaux. *Mathesis* 62, 204—215 (1953).

Es handelt sich um Kubiken, die dem Bezugsdreieck  $ABC$  eines Systems baryzentrischer Koordinaten  $\alpha, \beta, \gamma$  umbeschrieben sind. Die bezüglich reziproker Punkte invarianten Kubiken bilden zwei Familien  $A_1, B_1$  mit den Gleichungen  $A \alpha (\beta^2 + \gamma^2) + B \beta (\gamma^2 + \alpha^2) + C \gamma (\alpha^2 + \beta^2) + D \alpha \beta \gamma = 0$ ,  $A \alpha (\beta^2 - \gamma^2) + B \beta (\gamma^2 - \alpha^2) + C \gamma (\alpha^2 - \beta^2) = 0$ , und die bezüglich isogonaler Punkte invarianten Kubiken bilden zwei Familien  $A_2, B_2$  mit den Gleichungen  $A \alpha (\beta^2 b^2 + \gamma^2 c^2) + B \beta (\gamma^2 c^2 + \alpha^2 a^2) + C \gamma (\alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2) + D \alpha \beta \gamma = 0$ ,  $A \alpha (\beta^2 b^2 - \gamma^2 c^2) + B \beta (\gamma^2 c^2 - \alpha^2 a^2) + C \gamma (\alpha^2 a^2 - \beta^2 b^2) = 0$ , wo  $a, b, c$  die Seiten des Dreiecks  $ABC$  und  $A, B, C, D$  Parameter sind. Die Familien  $A_1$  und  $A_2$  einerseits,  $B_1$  und  $B_2$  andererseits haben dieselben projektiven Eigenschaften. Die Untersuchung der Beziehungen dieser Kurven zu den merkwürdigen Punkten und Linien des Dreiecks bildet den Gegenstand der Arbeit.

M. Zacharias.

**Goormaghtigh, R.:** Sur un problème de géométrie infinitésimale. *Mathesis* 62, 99—102 (1953).

Zwei Geraden  $\Delta, \Delta'$  einer Ebene drehen sich in dieser gleichförmig um zwei Punkte  $O, O'$ , ausgehend von zwei Anfangslagen, die miteinander einen Winkel  $\varphi$  bilden, und beschreiben in derselben Zeit zwei Winkel  $\vartheta, \vartheta'$ , die sich wie  $n$  zu  $n'$  verhalten. Der Ort des Schnittpunktes  $M$  von  $\Delta$  und  $\Delta'$  ist eine Kurve ( $M$ ), deren Gleichung in Polarkoordinaten ( $r, x$ ) für den Pol  $O$  und eine mit  $OO'$  den Winkel  $-\vartheta$  bildende Polarachse  $r = OO' \sin(x n' / n - \vartheta) : \sin(n' n - 1)x$  lautet. Verf. entwickelt Konstruktionen der Tangente und des Krümmungsmittelpunktes der Kurve im Punkt  $M$ . — Für  $n = -n'$  ergibt sich der Satz: Die Tangente in einem Punkte einer gleichseitigen Hyperbel ist die Symmediane (d. h. die Winkelgerade der Seitenhalbierenden) in jedem Dreieck, das diesen Punkt und die Endpunkte eines beliebigen Durchmessers zu Ecken hat.

M. Zacharias.

## Algebraische Geometrie:

**Samuel, Pierre:** Quelques tendances récentes de la géométrie algébrique. *Enseignement math.* 39, 180—191 (1953).

This paper is a compact and good essay on the recent progress in „abstract“ algebraic geometry. The author first recollects historically the „position“ of algebraic geometry in mathematics and then lists some remarkable contributions to this field in the last ten years. Most of them are due to Chevalley, Weil, Zariski, and their schools. The author also expresses some of his opinions about the immediate future of this field.

J. Igusa.

**Benedicty, Mario:** La geometria algebrica astratta e il concetto di varietà algebrica. *Archimede* 5, 133—144 (1953).

Eine für einen weiteren Kreis berechnete kurze Einführung in die modernen Richtungen der algebraischen Geometrie. Die „abstrakte algebraische Geometrie“ steht zur klassischen algebraischen Geometrie etwa in demselben Verhältnis wie die „abstrakte Algebra“ zur klassischen Algebra. In beiden Fällen handelt es sich darum, die logische Struktur der Theorie möglichst frei von „konkreten“ Beimischungen, die nichts mit der logischen Schlußkette zu tun haben, herauszuarbeiten. Dabei er-



geben sich neue aussichtsreiche Probleme für die Forschung, und manche Beweise können in überraschender Weise vereinfacht werden, wenn sich auch die Hoffnungen, wesentlich über die klassischen Ergebnisse hinauszugelangen, bisher noch nicht erfüllt haben.

W. Gröbner.

**Piazzolla-Beloch, M.:** Alcune osservazioni sulla simmetria obliqua nelle curve algebriche piane. Ann. Univ. Ferrara, n. Ser. 2, 151—154 (1953).

La droite  $D$ ,  $ax + by + c = 0$  est axe de symétrie oblique de la courbe  $f(x, y) = 0$  par rapport à la direction  $L(l, m)$  si son équation divise l'expression  $l \partial f / \partial x + m \partial f / \partial y$ , le quotient représentant encore une courbe admettant  $D$  pour axe de symétrie relativement à  $L$ . L'application répétée de ce résultat conduit à l'annulation des restes de divisions successives, d'où les conditions liant  $a, b, c, l, m$ . Exemple de la courbe de Lamé  $x^4/a^4 + y^4/b^4 = 0$  dont les axes de symétrie sont les axes de coordonnées (s. orthogonale) et les deux obliques  $bx + ay = 0$  relatif à la direction  $(a, b)$  et  $bx - ay = 0$  relatif à  $(-a, b)$ .

B. d'Orgeval.

**Turri, Tullio:** Sulla classificazione delle trasformazioni involutorie del piano. Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari 22, 16—26 (1953).

Involutions de Geiser et de Bertini dont les courbes unies ont le genre inférieur au genre habituel.

L. Godeaux.

**Godeaux, Lucien:** Ancora sopra una particolare involuzione di Geiser. Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari 22, 1—2 (1953).

L'objection de Turri (cf. ce Zbl. 47, 146) à une construction donnée par l'A., d'une involution de Geiser changeant en lui-même le système des cubiques planes passant par six points est réfutée.

B. d'Orgeval.

**Pisano, Paolo:** Rappresentazione piana di involuzioni sopra superfici cubiche. Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari 22, 27—33 (1953).

L'A. considère une surface cubique  $F$ , un point simple  $O$  et deux droites  $r, s$  de cette surface. Deux droites s'appuyant sur  $r, s$  sont homologues si elles coupent encore  $F$  en deux points alignés sur  $O$ . Etude de l'involution déterminée sur un plan sécant par ces droites.

L. Godeaux.

**Derwiduë, L.:** A propos des variétés exceptionnelles. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 39, 70—76 (1953).

Etude des variétés exceptionnelles qui peuvent exister dans une transformation birationnelle entre deux variétés algébriques privées de singularités.

L. Godeaux.

**Turri, Tullio:** Superficie razionali reali di  $S_3$  rappresentabili su un piano. Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari 22, 3—15 (1953).

Etude des surfaces rationnelles réelles de l'espace ordinaire; surfaces représentables sur le plan réel. Problème déjà résolu par Comessatti: Fondamenti per la geometria sopra le superficie razionali dal punto di vista reale [Math. Ann. 73, 1—72 (1913)].

L. Godeaux.

**Godeaux, Lucien:** Construction de surfaces canoniques de diviseur deux. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 39, 653—665 (1953).

La surface  $\varphi_{2n}(x_1 x_2 x_3, x_2 x_3 x_4, x_3 x_4 x_1, x_4 x_1 x_2) + (x_1 x_2 x_3 x_4)^n$   $\varphi_{2n}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$  passe  $2n$  fois par les arêtes du tétraèdre de référence; ses courbes canoniques ont une partie fixe dans les plans des faces, d'ordre zéro; le reste appartient à des surfaces d'ordre  $6n - 8$  passant  $2n - 3$  fois par les arêtes et  $3n - 4$  fois par les sommets. On établit leur équation d'où les caractères de la surface  $p_6 = p_9 = (n - 1)(4n^2 - 2n + 1)$ ,  $p^{(1)} = 24n(n - 1)^2 + 1$ . Si la surface est telle que  $\varphi_{2n} = \varphi_{2n}(x_1, x_2, x_3, x_4)$  la transformation homographique  $T$   $x_i \rightarrow y_{i+1} y_{i+2} y_{i+3}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) la conserve et si  $n$  pair ne contient pas de points unis de  $T$ . L'involution d'ordre 2 sans points unis définie par  $T$  sur la surface a pour image une surface de diviseur 2 et de caractères  $p_a = p_g = n'(16n'^2 - 12n' + 3)$ ,  $p^{(1)} = 24n'(2n' - 1)^2 + 1$  ( $n = 2n'$ ).

B. d'Orgeval.

Burau, Werner: Lo spezzamento dello spazio delle relazioni quadratiche d'una grassmanniana. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 269–270 (1953).

Burau, Werner: Projektive Klassifikation der Grassmannrelationen und Kennzeichnung der Minimalmodelle für die Gesamtheiten der verallgemeinerten Raumelemente des  $S_n$ . Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 34, 133–160 (1953).

Die vorliegende Abhandlung enthält eine geometrische Untersuchung der quadratischen Relationen, die die Grassmannschen  $S_k$ -Koordinaten eines Raumes  $S_n$  miteinander verbinden, und der Art, wie diese Relationen von den Homographien des Raumes  $S_n$  miteinander vertauscht werden. — In den §§ 1, 2 wiederholt Verf. die wichtigsten Eigenschaften der Segreschen und der Grassmannschen Mannigfaltigkeiten und gibt einige Sätze, welche gestatten, eine Mannigfaltigkeit, die die Punktepaare aus einem  $S_m$  und einem  $S_n$ , oder die  $S_k$  eines  $S_n$ , eindeutig abbildet, als eine Segresche  $S_{m,n}$ , oder als eine Grassmannsche  $G_{n,k}$ -Mannigfaltigkeit zu erkennen. Im § 2 ist, für das folgende, Satz 4 besonders wichtig; er besagt, daß die Inzidenzbedingung von zwei  $S_k$  eines  $S_{2k+1}$  durch Nullsetzen einer symmetrischen oder einer schiefsymmetrischen bilineären Form ausgedrückt werden kann, je nachdem  $k$  ungerade oder gerade ist. [Diese Eigenschaft findet sich schon bei C. Segre, Ann. Mat. pura appl., III. Ser. 27, 75–123 (1918), Fußnote 6) im § 4]. Man findet so, für ein ungerades  $k$ , eine sogenannte Fundamentalquadratik, die  $G_{n,k}$  enthält. — Der § 3 ist den hier genannten Inzidenzmännigfaltigkeiten gewidmet. Sind drei natürliche Zahlen  $n, k, h$ , mit  $-1 \leq h \leq k \leq n$ , gegeben, dann bedeutet  $J_{n;k,h}$  das Bild aller Elemente  $(S_k, S'_h)$ , d. h. aller Paare  $S_k, S'_h$  mit voller Inzidenz ( $S'_h$  liegt in  $S_k$  oder fällt mit  $S_k$  zusammen).  $J_{n;k,h}$  liegt auf dem Segreschen Produkt  $G_{n,k} \times G'_{n,h}$ . Es ist  $J_{n,k,1} = G_{n,k}$  und  $J_{n;n,h} = G'_{n,h}$  zu setzen. Auch  $J_{n;k,h}$  besitzt kennzeichnende Eigenschaften. — Im § 4 wendet sich Verf. seinem Hauptziel zu. Jede  $G_{n,k}$  liegt auf einer bekannten Anzahl  $r(n, k)$  von linear unabhängigen Quadriken, welche den quadratischen Beziehungen entstammen, die die üblichen  $S_k$ -Koordinaten miteinander verbinden. Man kann das Linearsystem aller solcher Quadriken auf einen Raum  $R$ , den sogenannten Relationenraum, abbilden. Die projektive Gruppe  $G$  des ursprünglichen Raumes  $S_n$  liefert im Raume der  $G_{n,k}$  eine projektive Gruppe, die das obengenannte Linearsystem von Quadriken in sich überführt; und so wird auch in  $R$  eine Kollineationsgruppe induziert. Während aber im  $S_n$  und im Raume der  $G_{n,k}$  keine linearen invarianten Unterräume vorhanden sind, gibt es in  $R$  eine endliche Anzahl von linear unabhängigen Unterräumen, die  $R$  selbst aufspannen und die einzeln invariant bleiben; sie sind die Einbettungsräume gewisser wohlbestimmter Inzidenzmännigfaltigkeiten, die etwas verschieden ausgestaltet sind, je nachdem  $k$  gerade oder ungerade ist.

E. Togliatti.

Burau, Werner: Projektive Klassifikation der Veroneses-Relationen und Kennzeichnung aller Punktmodelle für die Linienelemente, Geraden und Punkte-Paare des  $S_n$ . Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 35, 299–326 (1953).

Die vorliegende Untersuchung ist, für Gehalt und Methoden, mit einer früheren desselben Verf. über Grassmannsche Mannigfaltigkeiten  $G_{n,k}$  eng verbunden. Auch eine Veronesesche Mannigfaltigkeit ist die Basis eines Linearsystems von Quadriken, so daß man die Homographien studieren kann, die in einem solchen Linearsystem von den Homographien des ursprünglichen Raumes  $S_n$  induziert werden. — Im § 1 wird zunächst die Veronesesche  $V_n^k$  eingeführt, als Bild des Linearsystems aller Hyperflächen der Ordnung  $k$  des Raumes  $S_n$ ; ihre parametrischen Gleichungen lauten:  $x_{i_0 \dots i_n} = x_0^{i_0} \dots x_n^{i_n} (i_0 + \dots + i_n = k)$ , wo  $x_0, \dots, x_n$  projektive Punktkoordinaten in  $S_n$  bedeuten. Zusammen mit  $V_n^k$  werden auch folgende andere Mannigfaltigkeiten betrachtet: 1. Das Segresche Produkt  $\prod_{2k}^{h,k} = V_n^h \times V_n^k$  mit den Gleichungen:

$$x_{i_0 \dots i_n; j_0 \dots j_n} = x_0^{i_0} \dots x_n^{i_n} y_0^{j_0} \dots y_n^{j_n} (i_0 + \dots + i_n = h; j_0 + \dots + j_n = k);$$

2. die  $V_n^{h,k}$ , mit den Gleichungen:  $x_{i_0 \dots i_n; j_0 \dots j_n} = x_0^{i_0+j_0} \dots x_n^{i_n+j_n} (i_0 + \dots + i_n = h; j_0 + \dots + j_n = k)$ . Schnitt von  $\prod_{2k}^{h,k}$  mit einem geeigneten linearen Raum; 3. die verallgemeinerte Grassmannsche  $G_{n;1}^h$ :  $x_{i_0 \dots i_m} = x_0^{i_0} \dots x_m^{i_m} (i_0 + \dots + i_m = h)$ , wo  $\pi_0, \dots, \pi_m$  die Grassmannschen Linienkoordinaten in  $S_n$  sind; 4. die  $J_{n;1,0}^{h,k}$  mit den Gleichungen:

$$x_{i_0 \dots i_n; j_0 \dots j_n} = x_0^{i_0} \dots x_n^{i_n} \pi_0^{j_0} \dots \pi_m^{j_m} (i_0 + \dots + i_n = h; j_0 + \dots + j_m = k),$$

die als ein verallgemeinertes Bild der Linienelemente von  $S_n$  betrachtet werden kann; 5. die Bildmenge  $P_{2n}^{h,k;1,p}$ :

$$x_{i_0 \dots i_n; j_0 \dots j_n; s_0 \dots s_m} = x_0^{i_0} \dots x_n^{i_n} y_0^{j_0} \dots y_n^{j_n} \pi_0^{s_0} \dots \pi_m^{s_m}$$

( $i_0 + \dots + i_n = h; j_0 + \dots + j_n = k; s_0 + \dots + s_m = p$ ) der geordneten Punktepaare in  $S_n$ . — Im § 2 werden einige Sätze aufgestellt, die gestatten, die eingeführten Mannigfaltigkeiten zu charakterisieren und zu erkennen. — Im § 3 werden schließlich die Quadriken durch eine  $V_n^k$  be-



trachtet. Sie bilden ein Linearsystem und werden auf die Punkte eines Relationsraumes  $R$  linear und eindeutig abgebildet. Die projektive Gruppe  $G$  des Raumes  $S_n$  verwandelt  $V_n^k$  in sich selbst und induziert in  $R$  eine Kollineationsgruppe. Während aber sowohl im  $S_n$  als auch im Raume der  $V_n^k$  kein linearer Raum für die betrachteten Kollineationen invariant war, gibt es in  $R$  eine endliche Anzahl von linear unabhängigen Räumen, die  $R$  selbst aufspannen und die einzeln invariant bleiben. Sie können als die Einbettungsräume gewisser verallgemeinerter Grassmannscher und Inzidenzmannigfaltigkeiten  $G_{n;1}^{2m}$  und  $J_{n;1,0}^{h,k}$  definiert werden.

*E. Togliatti.*

**Gallarati, Dionisio:** Sul massimo numero di complessi lineari di  $S_k$  di  $S_r$  linearmente indipendenti, ai quali appartengono gli  $S_k$  tangenti di una  $V_k$  di  $S_r$ . Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 15, 10—15 (1953).

Es wird hier zunächst folgender Satz bewiesen: Wenn eine algebraische Mannigfaltigkeit  $V_k$  eines Raumes  $S_r$  genau  $\infty^k$  Berührungsräume  $S_k$  besitzt, so können ihre Berührungsräume höchstens  $\theta(r, k) = \binom{r+1}{k+1} - (r-k)(k+1) - 1$  linear unabhängigen linearen  $S_k$ -Komplexen angehören. Diese obere Grenze wird für  $r=5$ ,  $k=2$  von der Veroneseschen Fläche und für beliebige Werte von  $r, k$  von den  $V_k^{r-k+1}$  (Orter von  $\infty^1$  Räumen  $S_k$ ) erreicht; es bleibt unentschieden, ob für  $k > 1$  noch andere Mannigfaltigkeiten mit derselben Eigenschaft existieren. Zweitens beweist Verf., daß die Berührungsräume der Projektion der  $V_k$  auf einen  $S_{r-1}$  aus einem ihrer allgemeinen Punkte wenigstens  $N - \binom{r}{k} + k + 1$  linear unabhängigen linearen  $S_k$ -Komplexen (des  $S_{r-1}$ ) angehören, falls die Berührungsräume der  $V_k$  selbst  $N$   $S_k$ -Komplexen (des  $S_r$ ) angehören.

*E. Togliatti.*

**Boer, J. H. De:** The relation between the Cayley form and the Barsotti form of an algebraic chain. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 56, 158—161 (1953).

Verf. untersucht die nach Barsotti (dies. Zbl. 41, 285) durch allgemeine Projektion einer  $V_d$  auf einen  $S_{d+1}$  gebildete Form und vergleicht sie mit der „zugeordneten Form“ von Chow-v. d. Waerden (dies. Zbl. 16, 40) für dieselbe algebraische Mannigfaltigkeit  $V_d$ . Er weist nach, daß beide Formen im wesentlichen äquivalent sind und den gleichen Grad haben.

*W. Gröbner.*

**Conforto, Fabio:** Un'osservazione sopra le superficie abeliane impure di determinante primo. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 8, 2—6 (1953).

In a paper by C. Bonomi [Rend. Circ. mat. Palermo 43, 47—70 (1919)] on hyperelliptic impure surfaces of a given determinant  $d$ , i. e. containing two elliptic pencils whose general curves (which are elliptic) meet in  $d$  points, it is stated that the above mentioned surfaces, when  $d$  is an odd prime number  $p$ , belong to  $(p-1)/2$  different families. The author, in his researches on Riemann matrices from the view point of equivalence (in the sense of Scorza), has shown that C. Bonomi's result is true only apparently, since the  $(p-1)/2$  families are not distinct, but are actually a single one; a very simple proof of it is given in this paper. For a Riemann matrix belonging to a generic surface of the family (the matrix being singular in the sense of Scorza) the author has also determined all the singular relations, remarking that the corresponding divisor is always an integer multiple of  $p$ . It is thus proved that a singular relation for a Riemann matrix of genus 2 does not imply necessarily singular relations corresponding to all values of the divisor, in contrast with a conjecture expressed by G. Cotty [Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, III. Sér. 3, 209—374 (1913)]. This remark puts clearly into evidence that in a complete study on Riemann matrices (of genus  $\geq 2$ ) with respect to equivalence it is necessary to make more precise statements about the possible values of elementary divisors, since some phenomena (e. g. that of singularity) can occur only with respect to some particular values of the divisors.

*M. Rosati.*

## Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

**Hartman, Philip and Aurel Wintner:** On pieces of convex surfaces. Amer. J. Math. 75, 477—487 (1953).

1.  $X(u, v)$  sei für einen einfach-zusammenhängenden  $(u, v)$ -Bereich der Vektor eines genügend kleinen Flächenstücks  $S$  und von der Klasse  $C^2$ .  $N(u, v)$  sei der Einheitsnormalenvektor von  $S$ . Ist  $X_u \times X_v \neq 0$  und die Gaußsche Krümmung  $K \neq 0$ , dann ist die Abbildung  $X \rightarrow N$  von  $S$  auf die Einheitskugel eineindeutig in der Umgebung jeder Stelle. Das kann auch

noch für  $K \geq 0$  oder  $K \leq 0$  der Fall sein. Es gilt aber nicht mehr, wie bewiesen wird, wenn in jeder Umgebung des betrachteten Punktes  $K$  sowohl positive wie negative Werte annimmt.

2.  $S$  sei eine streng konvexe Fläche der Klasse  $C^1$  und besitze eine sphärische  $C^0$ -Parametrisierung  $X(\lambda, \mu)$ , d. h. es existiere eine eindeutige stetige Abbildung eines ebenen  $(\lambda, \mu)$ -Gebiets auf  $S$  derart, daß  $\lambda, \mu$  zwei der drei Komponenten von  $X$  sind.  $S$  hat stets eine solche Parametrisierung, und für sie ist die Stützfunktion  $H = X \cdot N$  von der Klasse  $C^1$ , obwohl  $X(\lambda, \mu)$  nur von der Klasse  $C^0$  ist. Dieser Satz ist in dem folgenden enthalten: 3. Ist  $z(x, y)$  eine streng konvexe Funktion von der Klasse  $C^1$  in einem konvexen Gebiet  $D$ , so wird  $D$  durch (\*)  $p = z_x(x, y)$ ,  $q = z_y(x, y)$  umkehrbar eindeutig und stetig auf ein  $(p, q)$ -Gebiet  $D'$  abgebildet. Als Funktion von  $p, q$  ist dann  $h = x p + y q - z$  von der Klasse  $C^1$  und in jedem konvexen Teilgebiet von  $D'$  streng konvex. Die Umkehrabbildung von (\*) ist  $x = h_p(p, q)$ ,  $y = h_q(p, q)$ . Die Legendre-Transformation  $(x, y, z) \rightarrow (p, q, h)$  mit der  $C^1$ -Voraussetzung ist also umkehrbar. 4. Die Aussagen in 2 und 3 lassen sich nicht verbessern, wie durch ein Beispiel gezeigt wird:  $h(p, q)$  braucht nicht von der Klasse  $C^2$  zu sein, wenn  $z(x, y)$  analytisch oder gar ein Polynom ist. 5. Ist die konvexe Fläche  $X(u, v)$  von der Klasse  $C^1$  und ist  $c$  von zwei Ausnahmewerten verschieden, so ist  $Y(u, v) = X + cN$  eine Fläche von der Klasse  $C^1$  mit einer  $C^1$ -Parametrisierung. Auch bei zusätzlichen Voraussetzungen für  $X$  braucht  $Y$  nicht von der Klasse  $C^2$  zu sein. 6. Ein Appendix beschäftigt sich mit dem bekannten Existenztheorem von H. Weyl in folgender Fassung: Zu einem metrischen Tensor  $g_{ik}(u, v)$  von der Klasse  $C^n$  mit positiver Krümmung  $K(u, v)$  von der Klasse  $C^{n-1}$  existiert im  $\mathbb{R}_3$  stets eine Eifläche  $X(u, v)$  von der Klasse  $C^{n+1}$ , deren erste Fundamentalform die Matrix  $(g_{ik})$  hat. Es wird gezeigt, daß der Satz nur für  $n = 1$  richtig sein kann.

W. Süss.

#### Löbell, Frank: Flächen mit vorgegebener vektorieller Differentialinvariante.

S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1952, 99—101 (1953).

Die Fläche  $\tilde{x}(u, v)$  im dreidimensionalen euklidischen Raum besitzt  $\tilde{x}_u \times \tilde{x}_v$  als vektorielle Differentialinvariante vom Gewicht 1 (Löbell, S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1943, S. 217 ff.). Verf. untersucht das Problem der Bestimmung aller Flächen mit vorgegebener dritter Fundamentalform und vorgegebener Gaußscher Krümmung als Funktionen der Parameter, welches mit dem Problem der Bestimmung aller Flächen mit vorgegebenem  $(\tilde{x}_u \times \tilde{x}_v)(u, v)$  identisch ist, und vergleicht es mit demjenigen der Bestimmung aller Flächen mit vorgegebener erster Fundamentalform. [Beide Probleme wurden, teilweise verallgemeinert, von Ref. behandelt, vgl. Math. Z. 57, 244—264 (1953).] K. Leichtweiss.

Nirenberg, Louis: The Weyl and Minkowski problems in differential geometry in the large. Commun. pure appl. Math. 6, 337—394 (1953).

Le présent travail contient des solutions des problèmes de Weyl, sur l'existence d'une surface convexe pour chaque métrique définie à courbure partout positive, et de Minkowski, sur l'existence d'une surface convexe pour toute courbure positive donnée. Pour le problème de Weyl la métrique est supposée  $C^4$ , pour celui de Minkowski la courbure doit être  $C^2$ . La démonstration suit la méthode de continuité, l'A. utilise les dérivées de Hölder, pour lesquelles il peut améliorer les estimations de Weyl pour les dérivées ordinaires. L'exposé est particulièrement clair et complet.

H. Guggenheimer.

Minagawa, T. and T. Rado: On the infinitesimal rigidity of surfaces of revolution. Math. Z. 59, 151—163 (1953).

Es werden Rotationsflächen untersucht, die wie der äußere bzw. innere Teil des Torus von 2 parabolischen Kurven mit parallelen Flächennormalen berandet sind und hier konvexe Gürtel (belt) bzw.  $R$ -Flächen heißen. Der Meridian sei eine zweimal differenzierbare konvexe Kurve. Die konvexen Gürtel sind nach Liebmann starr. Verff. beweisen: Die mannigfachen Rotationsflächen, die einen Gürtel enthalten, sind starr. Wenn nämlich der Vektor  $\xi$  der infinitesimalen Verbiegung auf einem Parallelkreis der Nullvektor ist, so besteht Starrheit jeder anschließenden Fläche mit konvexem Meridian. Bei  $R$ -Flächen betrachtet man die einparametrische Schar mit gleicher Meridiankurve, aber variablem Achsenabstand. Es wird gezeigt: Wenn es unter ihnen unstarr gibt, so doch nur abzählbar viele. Die Existenz unstarrer Flächen, die Ref. im analytischen Fall nachgewiesen hat, folgt hier nicht. Ein Ergebnis von Ziebur wird angekündigt, daß im analytischen Fall die unstarren Flächen überall dicht liegen.

E. Rembs.



**Nitsche, Joachim:** Ein mit der Verbiegung der Halbkugel verbundenes Randwertproblem. Arch. der Math. 4, 331—336 (1953).

Die „nördliche“ Halbkugel ( $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $z \geq 0$ ) ist stereographisch aus dem Südpol in die Äquatorebene projiziert und auf rechtwinklige Koordinaten in dieser bezogen.  $L, M, N$  seien die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung einer isometrischen Fläche  $F$ , bezogen auf dieselben Koordinaten, und  $a, b$  sei eins der drei Paare (F. Noether) konjugierter Potentialfunktionen, für die am Rande  $a \cos \varphi + b \sin \varphi = 0$  wird ( $\varphi =$  geogr. Länge). Wenn man dann den Gaußschen Integralsatz auf  $a(L dx + M dy) + b(M dx + N dy)$  anwendet, verschwinden in zweien der drei Fälle die Integranden der Flächenintegrale. Daraus folgt: Ist  $\rho$  die Krümmung der Randkurve von  $F$ , so muß  $\oint \rho \sin \varphi d\varphi = 0$ ,  $\oint \rho \cos \varphi d\varphi = 0$  sein. Man kann also  $\rho$  nicht willkürlich vorgeben. Die dritte Formel, die man erhält, lautet  $\oint \rho d\varphi = 2 \iint H z d\sigma$ ;  $\oint \rho d\varphi$  ist also hier erst mit der mittleren Krümmung  $H$  von  $F$  bestimmt. Wegen  $H \geq 1$  läßt sich zwar  $\oint \rho d\varphi \geq 2\pi$  folgern, aber diese Ungleichung gilt ja nach Fenchel für jede geschlossene Kurve. *E. Rembs.*

**Vaccaro, Giuseppe:** Sull'isometria di calotte appartenenti a due varietà. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 14, 404—407 (1953).

Let  $\sigma_n, \bar{\sigma}_n$  be two „caps“ (calotte) of order  $n$ , belonging to a variety in a euclidean space. According to Bompiani,  $\sigma_n$  and  $\bar{\sigma}_n$  are said to be isometric of order  $k$ , if it is possible to have a one-to-one correspondence between them, in such a way that the expansions of the line elements  $ds^2, d\bar{s}^2$  of  $\sigma_n, \bar{\sigma}_n$ , in the neighborhoods of the respective centers, coincide up to the order  $k - 1$ . The author considers two caps belonging to two manifolds  $V_m, \bar{V}_m$  imbedded in a euclidean  $S_{n+m}$ , and proves that they are always isometric of order two; they are isometric of order three if, and only if, the mean curvatures at the centers of the caps coincide. *V. Dalla Volta.*

**Tsien, T. C.:** Über die Formeln von Dini und Levi-Civita der geodätischen Abbildungen. J. Chinese math. Soc. 2, 144—155 u. deutsche Zusammenfassg. 156 (1953) [Chinesisch].

Beweis der folgenden Sätze: 1. Wenn zwischen zwei Flächen eine Abbildung besteht, welche die beiden Scharen isotroper Linien der ersten Fläche auf zwei Scharen komplexer geodätischer Linien der zweiten Fläche und zugleich die beiden Scharen isotroper Linien der zweiten Fläche auf zwei Scharen komplexer geodätischer Linien der ersten Fläche abbildet, so ist die Abbildung geodätisch. Die Fundamentalformen der beiden Flächen lassen sich auf die klassische Dinische Form bringen. 2. Angenommen zwei Riemannsche Räume haben ein gemeinsames orthogonales Bezugssystem und es besteht eine Abbildung der beiden Räume aufeinander, welche ein gewisses System von  $2^{n-1}$  isotropen Kurvenkongruenzen des ersten Raumes auf  $2^{n-1}$  komplexe geodätische Normalenkongruenzen des zweiten Raumes und zugleich ein gewisses System von  $2^{n-1}$  isotropen Kurvenkongruenzen des zweiten Raumes auf  $2^{n-1}$  komplexe geodätische Normalenkongruenzen des ersten Raumes abbildet, so ist die Abbildung geodätisch. Die Fundamentaltensoren der beiden Räume lassen sich auf die klassische Form von Levi-Civita bringen. *Autoreferat.*

**Finn, Robert:** A property of minimal surfaces. Proc. nat. Acad. Sci. USA 39, 197—201 (1953).

$D$  sei offenes und beschränktes Gebiet und  $\varphi(x, y)$  eine in  $D$  eindeutige Lösung von  $(1 + \varphi_x^2) \varphi_{xx} - 2\varphi_x \varphi_y \varphi_{xy} + (1 + \varphi_y^2) \varphi_{yy} = 0$ . Ist dann der Inhalt der von  $z = \varphi(x, y)$  mit  $(x, y) \in D$  gegebenen Fläche kleiner als  $\mathfrak{A}$ , so gilt in allen Punkten von  $D$ , deren Abstand vom Rand von  $D$  nicht kleiner als  $d$  ist, eine Abschätzung (\*)  $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 \leq K_D(\mathfrak{A}, d)$ . Dabei ist  $K$  bei festem  $d$  nicht abnehmend in  $\mathfrak{A}$  und bei festem  $\mathfrak{A}$  nicht zunehmend in  $d$ . In (\*) kann rechts auch eine Funktion  $K_D^*(M, d)$  genommen werden, wenn  $|\varphi(x, y)| \leq M < \infty$  in  $D$  gilt. Solche Abschätzungen gelten auch für eine allgemeinere Klasse  $C$  von Differentialgleichungen, darunter die vom Typ  $(\rho \varphi_x)_x + (\rho \varphi_y)_y = 0$ , wenn  $\rho = \sqrt{1 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2} + \lambda \varepsilon (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)$  gilt und  $\varepsilon(t)$  für große Werte des Argumentes  $\varepsilon(t) = o(t^{-3/2})$ ,  $d\varepsilon/dt = o(t^{-5/2})$  erfüllt und  $\lambda$  hinreichend klein ist. — Mittels eines Satzes über Auswahlfolgen für Mengen beschränkter Funktionen mit gleichmäßig beschränkter Exzentrizität leitet Verf. her: Sind  $\varphi^n(x, y)$  in  $D$  eindeutige Lösungen einer Gleichung der Klasse  $C$ , sind weiter die Inhalte der von  $z = \varphi^n(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$ , bestimmten Flächen gleichmäßig beschränkt und gilt für einen Punkt  $(x_0, y_0) \in D$ :  $|\varphi^n(x_0, y_0)| \leq K < \infty$ ,

so gibt es eine Teilfolge, die mit Einschluß der 2. Ableitungen in  $D$  konvergiert. — Die Arbeit schließt mit der Erwähnung des Satzes, daß das erste Randwertproblem einer Differentialgleichung der Klasse  $C$  (eindeutig) lösbar sei, wenn  $D$  konvex ist und die Randkurve stetige, nicht-verschwindende Krümmung besitzt.  
*Joachim Nitsche.*

**Hopf, Eberhard:** On an inequality for minimal surfaces  $z = z(x, y)$ . J. rat. Mech. Analysis 2, 519—522 (1953).

Unter wesentlicher Benützung einer Ungleichung von E. Heinz leitet Verf. für die Gaußsche Krümmung  $K$  einer Minimalfläche  $S$  die folgende bemerkenswerte Abschätzung her: ist  $S$  über dem Kreis  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2$  regulär, so gilt in  $x_0, y_0$  die Ungleichung:  $|K| \leq \frac{1}{\zeta^2} (1 + \zeta^2) R^2$ ,  $\zeta = 1 \sqrt{1 + p^2 + q^2}$ ;  $S: z(x, y) = z$ .  
*H. Beckert.*

**Hopf, Eberhard:** Correction to the paper „On an inequality for minimal surfaces  $z = z(x, y)$ “. J. rat. Mech. Analysis 2, 801—802 (1953).

Verf. bemerkt, daß die in der angeführten Arbeit (s. vorherg. Ref.) angegebene Berechnung der günstigsten Konstanten  $\alpha$  lückenhaft ist. Er berichtet über eine neue, allerdings nur Schranken liefernde Schlußweise.  
*H. Beckert.*

**Pinl, M.:**  $B$ -Kugelbilder reeller Minimalflächen in  $R_4$ . Math. Z. 59, 290—295 (1953).

In Verallgemeinerung bekannter Eigenschaften der gewöhnlichen Minimalflächen des  $R_3$  wird für die 2-dimensionalen Minimalflächen des Euklidischen  $R_4$  gezeigt: Die beiden sphärischen Bilder (Blaschke, dies. Zbl. 36, 114) sind konform.  
*W. Blaschke.*

**Strubecker, Karl:** Über die Flächen, deren Asymptotenlinien ein Quasi-Rückungsnetz bilden. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1952, 103—110 (1953).

R. Sauer hatte in einer Arbeit „Infinitesimale Verbiegung der Flächen, deren Asymptotenlinien ein Quasi-Rückungsnetz bilden“ (dies. Zbl. 40, 88) eine Klasse von Flächen angegeben, deren infinitesimale Verbiegungen sich in geschlossener Form durch Quadraturen darstellen lassen. Verf. zeigt, daß sich diese Klasse von Flächen mittels seiner Theorie des isotropen Raumes auf noch einfachere Weise charakterisieren läßt, nämlich als alle Flächen  $z = z(x, y)$  mit fester Relativkrümmung  $K = -1$ . Es gelingt, eine integralfreie Darstellung anzugeben, sowie eine kinematische Erzeugungsweise. Durch Ersetzen von  $z$  durch  $i \cdot z$  erhält man eine Flächenschar der isotropen Krümmung  $K = +1$ . Auch diese Flächenschar läßt sich entsprechend einfach darstellen und geometrisch diskutieren. Verf. gibt einige einfache Beispiele.  
*W. Haack-H. J. von Schnakenburg.*

**Calapso, Renato:** Sulle reti derivate dalle reti  $O$ . Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 287—300 (1953).

Verf. betrachtet im  $n$ -dimensionalen euklidischen Raum  $O$ -Netze; er zeigt, daß  $M$ -Netze, die aus  $O$ -Netzen entstehen, durch eine Transformation von Combescure mit der Bedingung, daß die Summe der reziproken Krümmungen in entsprechenden Punkten konstant und ungleich Null ist,  $O$ -Netze sind, welche ein deriviertes Netz von der Eigenschaft zulassen, daß die Entfernung entsprechender Punkte konstant ist. Die Krümmung  $K$  wird definiert durch  $K = \frac{1}{(h \cdot l)} (\tilde{e} p \tilde{e} r + \tilde{e} q \tilde{e} u)$ , wobei  $h, l, p, q$  Funktionen von  $u, v$  sind, die durch die Integrabilitätsbedingungen bestimmt sind. Zum Schluß wird der Fall der involutorischen Transformation der  $O$ -Netze untersucht; es ergibt sich, daß das  $O$ -Netz mit dem System der Krümmungslinien einer Fläche konstanten Krümmungsmaßes zusammenfällt und die Combescure-Transformierte mit ihrem Gaußschen sphärischen Bild.  
*O. Volk.*

### Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

**Dou, P. Alberto:** Ebene Viergewebe. Mem. Acad. Ci. Art. Barcelona 31, Nr. 5, 92 S. (1953) [Spanisch].

Es werden „Viererbaben“ in der Ebene betrachtet, die durch vier Kurven-



scharen  $u_j(x, y) = \text{fest}$ ;  $j = 1, 2, 3, 4$  mit  $\partial(u_j, u_k)/\partial(x, y) \neq 0$  gebildet worden, und ihre Invarianten gegenüber „beliebigen“ Punkttransformationen  $x^* = x^*(x, y)$ ,  $y^* = y^*(x, y)$  untersucht. Dabei wird insbesondere von folgender Darstellung des Gewebes durch Pfaffsche Formen  $\sigma_j = 0$  mittels zweier Hilfsformen  $\alpha, \beta$  ausgegangen:  $\sigma_1 = +\alpha \cos r - \beta \sin r$ ,  $\sigma_2 = +\alpha \sin r + \beta \cos r$ ,  $\sigma_3 = +\alpha \cos r + \beta \sin r$ ,  $\sigma_4 = -\alpha \sin r + \beta \cos r$ , worin  $r$  mit dem Doppelverhältnis der vier Tangenten an die Wabenkurven zusammenhängt. Auf Grund dieser Darstellung des Gewebes wird ein vollständiges Invariantensystem und eine kanonische Darstellung gewonnen. Für ein Gewebe wird die Höchstzahl  $p$  von Relationen der Gestalt

$$f_{j1}(u_1) + f_{j2}(u_2) + f_{j3}(u_3) + f_{j4}(u_4) = 0,$$

mit  $j = 1, 2, \dots, p$ , als „Rang“ erklärt. Es werden invariante Bedingungen für  $p = 1, 2, 3$  hergeleitet. Die Darstellung ist ausführlich und übersichtlich und ohne Vorkenntnisse lesbar.

W. Blaschke.

**Chung, Tong-Der:** The projective differential geometry of certain pairs of plane curves. J. Chinese math. Soc. 2, 157—165 u. engl. Zusammenfassg. 166 (1953) [Chinesisch].

The projective differential geometry of certain pairs of plane curves at ordinary points has been investigated by Hsiung [Duke math. J. 10, 539—546 (1943); Bull. Amer. math. Soc. 49, 786—792 (1943)]. The purpose of the present paper is to use the same method to study the projective differential geometry of certain pairs of plane curves for the following cases: (1) Two curves in a plane intersecting at an inflexion point (§§ 2, 3, 4); (2) Two curves in a plane having a common tangent at two inflexion points (§ 5). We give a detailed discussion about the curves in case (1), while the theory about the curves in case (2) is easily obtained from this. For the previous case we obtain a projective invariant which is determined by the neighborhood of the fifth order of the curves at the point in question, and by using Bompiani's osculants [Bull. Un. mat. Ital., I. Ser. 5, 118—120 (1926)] of the curve at this point we give the projective invariant a simple geometric characterization. Moreover, by suitably choosing a covariant point for the unit point of the coordinate system, we obtain the canonical power series expansions of the curves at the considered point. According to the invariant obtained vanishes or not, we have four different types. The interpretation of the absolute invariants in the expansions of each type is given in terms of certain cross ratios alone.

Autoreferat.

**Bol, G.:** Über die Flächen, deren Godeaux-Kette sich schließt und die Periode 8 hat. Arch. der Math. 4, 61—74 (1953).

Si on considère une surface  $(x)$  rapportée à ses asymptotiques  $u, v$ , les points  $U, V$  qui représentent les tangentes aux asymptotiques  $u, v$  se succèdent dans une suite de Laplace. Godeaux a étudié le cas où cette suite de Laplace a la période 6; il existe alors une surface  $(x')$  en correspondance avec  $(x)$  telle qu'en deux points homologues, ces deux surfaces ont même quadrique de Lie. L'A. étudie le cas où la suite de Laplace a la période 8; il existe alors une surface  $(x')$  en correspondance avec  $(x)$  telle que les quadriques de Lie de ces surfaces en deux points homologues se touchent en quatre points. Il étudie également quelques questions connexes en utilisant la méthode définie dans son ouvrage Projektive Differentialgeometrie I (Göttingen 1950, ce Zbl. 35, 234).

L. Godeaux.

**Bol, Gerrit:** Über die Flächen, bei denen die Diagonalen der Vierseite von Demoulin linearen Kongruenzen angehören. Math. Z. 59, 97—150 (1953).

Les tangentes asymptotiques en un point d'une surface  $(x)$  non réglée ont pour images sur l'hyperquadrique  $Q$  de Klein de  $S_5$  deux points transformés de Laplace l'un de l'autre et qui déterminent une suite de Laplace  $L$ . Les quadriques de Lie de  $(x)$  ont, en dehors de  $x$ , quatre points caractéristiques, sommets du quadrilatère de Demoulin. L'A. étudie le cas où les diagonales de ce quadrilatère appartiennent à une congruence linéaire. Dans ce cas, il existe dans  $S_5$  une suite de Laplace de période 4, la droite joignant les deux points consécutifs déterminant cette suite coupant  $Q$  aux points images des diagonales considérées. L'A. étudie minutieusement la configuration obtenue et montre qu'il existe des homographies de  $S_5$ , fixes, en relation avec la suite  $L$ . Il étudie aussi le cas où la suite  $L$  est périodique et ensuite les nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie distinctes de  $(x)$ .

L. Godeaux.

**Decuyper, Marcel:** Sur les surfaces dont les lignes asymptotiques des deux familles appartiennent à des complexes linéaires. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 39, 688—696 (1953).

L'A. montre que si les diagonales du quadrilatère de Demoulin coupent les directrices de Wilczynski d'une surface au foyers de ces directrices, les asymptotiques des deux familles de la surface appartiennent à des complexes linéaires. Il donne ensuite un exemple de deux surfaces ayant mêmes quadrilatères de Demoulin, une de ces surfaces dépendant d'un paramètre.

L. Godeaux.

**Muracchini, Luigi:** Sulla geometria differenziale conforme delle trasformazioni puntuali fra due piani. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 8, 252—258 (1953).

Conformal properties of point-transformations (trf.) between two Euclidean planes. Through each point and in each direction there are two elements of the second order  $E_2$  such that there is a circular  $E_3$  containing  $E_2$  to which corresponds a circular  $E_3$  in the other plane. These  $E_2$  belong generally (in each plane) to a system of  $\infty^2$  curves  $C$  determined by the trf.; however their system is only  $\infty^1$  if and only if the trf. is a conformal one; the curves  $C$  are indetermined only for circular affinities. The following theorem is proved: A point trf. which changes  $\infty^2$  circles in circles is necessarily the product of homographic trfs. between the net of lines in one plane and the circles of a net in the other plane.

E. Bompiani.

### Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

**Sun, J. Tseying:** A remark on the equivalence problem for affine and metric spaces. J. Chinese math. Soc. 2, 133—137 u. engl. Zusammenfassg. 138 (1953) [Chinesisch].

An analytic proof for the equivalence of two affine spaces and two metric spaces in terms of their curvature tensors was given by the author in a previous paper [J. Chinese math. Soc. 1, 133—137 (1952)] by making use of a known theorem about differential equations of mixed system (L. P. Eisenhart, Non-Riemannian Geometry, New York 1927, p. 14). In the present note we shall give a proof for the same purpose without any application of the theorem just mentioned, instead of which some identities in curvature tensors and its covariant derivations (this Zbl. 17, 131; 18, 171) are used.

Autoreferat.

**Hartman, Philip and Aurel Wintner:** On the existence of Riemannian manifolds which cannot carry non-constant analytic or harmonic functions in the small. Amer. J. Math. 75, 260—276 (1953).

The main purpose of the paper is to prove the following theorem. If  $ds^2 = g_{ij} dx_i dx_j$  ( $i, j = 1, 2$ ) is a continuous metric [i. e.  $g_{ij}$  are continuous and  $\det(g_{ij}) \neq 0$ ] on the domain  $D_a$  ( $x_1^2 + x_2^2 < a^2$ ) then, no matter how small  $a$  be chosen, there need not exist any transformation  $u_i = u_i(x_1, x_2)$  of class  $C^1$  and non-vanishing Jacobian, which transforms  $ds^2$  into a conformal normal form  $ds^2 = h^2(du_1^2 + du_2^2)$ . The theorem may be generalized, for  $n > 0$ , as follows. If  $ds^2 = g_{ij} dx_i dx_j$  ( $i, j = 1, 2$ ) is a  $C^n$  metric on  $D_a$ , then there [exists a transformation  $u_i = u_i(x_1, x_2)$  of class  $C^n$  but] need not exist any transformation  $u_i = u_i(x_1, x_2)$  of class  $C^{n+1}$  of non-vanishing Jacobian, which transforms  $ds^2$  into a conformal normal form  $ds^2 = h^2(du_1^2 + du_2^2)$ . Some refinements of both theorems are also given.

L. A. Santaló.

**Janenko, N. N.:** Einige Fragen der Theorie der Einbettung Riemannscher Metriken in Euklidische Räume. Uspechi mat. Nauk 8, Nr. 1 (53), 21—100 (1953) [Russisch].

Verf. gibt einen Überblick über die wichtigsten Tatsachen der Theorie der  $m$ -dimensionalen Flächen in einem euklidischen Raume  $E_n$  und der Einbettungstheorie des Riemannschen Raumes  $V_m$  in einem euklidischen Raume  $E_n$ . Die Arbeit beginnt mit der Einführung in die Cartansche  $\omega$ -Symbolik und in die Integrabilitätstheorie. Dann folgt der Existenzsatz für die Fläche, die durch ein System von Grundformen angegeben ist, und es wird der Rang und der Typus einer  $m$ -dimen-



onalen Fläche definiert. Der Beweis des Satzes von Allendörfer über die Unterbiegbarkeit in  $E_n$  der Fläche  $V_{n-p}$  vom Typus  $t > 2$  wird auch durchgeführt. In dem letzten Paragraphen finden wir die allgemeine Formulierung des Problems der Bestimmung der Klasse einer Metrik und ausführliche Erwägungen über die Metrik der Klasse 1. Es wird die algebraische Abhängigkeit der Gaußschen und Peterson-Jodazzi-Gleichungen bewiesen und die Klassifizierung der Metriken der Klasse 1 angegeben.

W. Wróna.

Walker, A. G.: The fibring of Riemannian manifolds. Proc. London math. Soc., III. Ser. 3, 1—19 (1953).

Es sei  $M$  eine zusammenhängende  $n$ -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit der Klasse  $\infty$  (resp.  $C^\omega$ ). Alle auftretenden differentialgeometrischen Begriffe sind  $C^\infty$ - (resp.  $C^\omega$ ) differenzierbar. Es werde vorausgesetzt, daß  $M$  (in bezug auf seine Riemannsche Metrik) vollständig ist und daß in  $M$  ein Parallel-Feld  $\mathcal{R}$  von  $r$ -dimensionalen Ebenen gegeben ist ( $0 < r < n$ ). Dann läßt es das zu  $\mathcal{R}$  orthogonale Parallel-Feld  $\mathcal{S}$  von  $s$ -dimensionalen Ebenen, wo  $s = n - r$ . Die Parallel-Felder  $\mathcal{R}, \mathcal{S}$  sind vollständig integrierbar, man erhält eine Doppel-Blätterung von  $M$ . Die Blätter gehören zwei Familien  $R, S$  von  $r$ - (bzw.  $s$ -)dimensionalen Untermannigfaltigkeiten von  $M$  an. Durch jeden Punkt  $x$  von  $M$  geht genau ein Blatt  $R(x)$  der Familie  $R$  und genau ein Blatt  $S(x)$  der Familie  $S$ . Alle Blätter sind geodätische Untermannigfaltigkeiten von  $M$  und sind vollständig in bezug auf ihre (durch  $M$  induzierte) Riemannsche Metrik. Die Riemannsche Mannigfaltigkeit  $M$  ist lokal reduzierbar. Verf. führt, um speziellere Aussagen erhalten zu können, die folgende Voraussetzung ein, die allem Weiteren zugrunde gelegt wird. Voraussetzung 1: Es gibt ein Blatt  $S_0 = S(x_0)$  derart, daß jeder Punkt von  $S_0$  eine Umgebung in  $S_0$  besitzt, die jedes Blatt  $R(x)$  höchstens einmal trifft. — Verf. beweist:  $M$  ist ein Faserbündel mit den Blättern  $R(x)$  als Fasern, die alle einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $R_0$  isometrisch homöomorph sind. Der Basisraum  $B$  ist eine  $s$ -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, und die lokalen Produkte sind Produkte im Sinne der Riemannschen Metrik. Das Blatt  $S_0$  ist eine isometrische Überlagerung von  $B$  (jeder Punkt  $x$  von  $S_0$  wird auf den der Faser  $R(x)$  entsprechenden Punkt von  $B$  abgebildet). Die Strukturgruppe des Faserbündels  $M/R_0 = B$  ist eine Faktorgruppe der Fundamentalgruppe von  $B$ . — Von jetzt an wird auch noch die folgende Voraussetzung 2 angenommen. Voraussetzung 2: Die Strukturgruppe, die natürlich eine Gruppe von Automorphismen von  $R_0$  ist, enthält, abgesehen von der Identität, keinen Automorphismus mit Fixpunkt. — Verf. beweist: Die Überlagerung  $S_0 \rightarrow B$  ist regulär, und die Strukturgruppe ist isomorph zur Gruppe der Decktransformationen von  $S$ . Alle Blätter  $S(x)$  sind isometrisch homöomorph (mit  $S_0$ ), entsprechende Punkte liegen dabei auf demselben Blatt der Familie  $R$ . Die Riemannsche Mannigfaltigkeit  $R_0 \times S_0$  besitzt in natürlicher Weise eine Gruppe  $G$  von Fixpunktfreien isometrischen Automorphismen, die zur Strukturgruppe isomorph ist, derart, daß  $R_0 \times S_0/G$  isometrisch homöomorph mit  $M$  ist. Jedes Blatt  $R(x)$  trifft jedes Blatt  $S(x')$  in einer Anzahl von Punkten, die unendlich sein kann. Diese Anzahl ist von  $x$  und  $x'$  unabhängig und gleich der Ordnung der Strukturgruppe. — Schließlich führt Verf. noch die Voraussetzung 3 ein, die die Voraussetzungen 1 und 2 impliziert und besagt: Jeder Punkt von  $M$  hat eine Umgebung, in welcher sich jedes Blatt  $R(x)$  mit jedem Blatt  $S(x')$  höchstens einmal trifft. — Aus Voraussetzung 3 folgt, daß  $M$  in zwei Weisen gefasert werden kann. Im ersten Fall sind die Fasern mit den Blättern der Familie  $R$  identisch, im zweiten Fall mit den Blättern der Familie  $S$ . Die jeweiligen Basisräume sollen mit  $B, A$  bezeichnet werden. Die Mannigfaltigkeit  $M$  ist dann eine reguläre Überlagerung von  $A \times B$  mit isometrischer Überlagerungsabbildung. Die Gruppe der Decktransformationen von  $M$  ist isomorph zur Strukturgruppe der Faserung  $M/R_0 \rightarrow B$  und auch isomorph zur Strukturgruppe der Faserung  $M/S_0 \rightarrow A$ . Unter Voraussetzung 3 ist, wie Beispiele zeigen, die Riemannsche Mannigfaltigkeit  $M$  im allgemeinen kein Riemannsches direktes Produkt, aber sie überlagert isometrisch das Riemannsche direkte Produkt  $A \times B$  und wird selbst isometrisch von dem direkten Produkt  $R_0 \times S_0$  überlagert.

F. Hirzebruch.

Nomizu, Katsumi: Sur les transformations affines d'une variété riemannienne. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 1308—1310 (1953).

Es sei  $V$  eine zusammenhängende differenzierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $A(V)$  und  $I(V)$  seien die Gruppen der affinen und isometrischen Transformationen von  $V$ . Verf. zeigt: Ist  $V$  irreduzibel (d. h. ist die homogene Holonomiegruppe irreduzibel), so liegt jede kompakte Untergruppe von  $A(V)$  in  $I(V)$ . Ein zweites Theorem lehrt unter anderem: Ist  $\dim(T_0) \leq 1$ , so liegt jede kompakte Untergruppe von  $A_0(V)$  in  $I(V)$ . Hier ist  $T_0$  der euklidische Teil der kanonischen Zerlegung des Tangentialraums nach de Rham (dies. Zbl. 48, 157) und  $A_0(V)$  der mit der Identität zusammenhängende Teil von  $A(V)$ .

W. Klingenberg.

Eisenhart, Luther P.: Generalized Riemann spaces and general relativity. Proc. nat. Acad. Sci. USA **39**, 546—551 (1953).

The author continues his investigations on concomitants of manifolds in which a non symmetric tensor  $g_{ij}$  is given (see this Zbl. **43**, 373). Here he shows how the equations of Einstein's Fourth Edition of „The Meaning of Relativity“ (Princeton 1953, this Zbl. **50**, 212) can be obtained. There are connections  $\Gamma_{ij}^h$  and  $\Delta_{ij}^h$  where  $\Delta_{ijk} = \frac{1}{2} (g_{ik,j} + g_{kj,i} - g_{ij,k})$ ,  $g_{ij,k} = \partial g_{ij} / \partial x^k$ . Raising and lowering of indices is performed with respect to  $g_{ij}$  and  $g^{ij}$ ,  $g_{ij} g^{jk} = \delta_j^k$ . Then  $a_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h - \Delta_{ij}^h$  is a tensor. It is shown that the equations  $g_{ij,k} - g_{hj} \Gamma_{ik}^h - g_{ih} \Gamma_{kj}^h$  can be satisfied if  $a_{ij}^h = -\frac{2}{3} \Delta_{ij}^h$ . Then  $\Gamma_{ij}^i = \Gamma_{ij}^j = 0$ ,  $\Gamma_{hk}^h = (\log w)_{,k}$  where  $w = |\det g|$ . Then a tensor density  $g^{ij} = w g^{ij}$  is introduced for which  $\tilde{g}_{ij}^{,i} = 0$ . Then follows the expression for the Einstein tensor  $R_{ij}$  and its relation to the other Einstein equations. The notation  $g_{(ij)}$  is used for what usually is written  $g_{(ij)}$ , and similarly  $g_{[ij]}$  for  $g_{[ij]}$ . D. J. Struik.

Deicke, Arno: Über die Finsler-Räume mit  $A_i = 0$ . Arch. der Math. **4**, 45—51 (1953).

In einem  $n$ -dimensionalen Finslerschen Raum mit der Metrik  $ds = L(x^i, \dot{x}^i) du$  kommt dem Vektor  $A_i = L \partial \log |\dot{g}| / \partial \dot{x}^i$ , wobei  $g = \frac{1}{2} \partial^2 L^2 / \partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^k$  ist, eine besondere Bedeutung zu. Seit langem werden die speziellen Räume mit  $A_i = 0$  in der Literatur wegen ihrer Ähnlichkeit mit den Riemannschen Räumen diskutiert. Verf. zeigt aber nun, daß diese Räume mit den Riemannschen identisch sind, falls die Indikatrix  $L(x_0, \dot{x}) = 1$  geschlossen und  $L(x_0, \dot{x})$  in  $\dot{x}^i$  hinreichend oft differenzierbar ist. Wie sich zunächst ergibt, ist die Behauptung äquivalent zu dem Satz, daß alle geschlossenen Affin-Sphären Ellipsoide darstellen. Diese Aussage wiederum beweist Verf. durch eine geschickte  $n$ -dimensionale Verallgemeinerung eines von Blaschke für den  $R_3$  gegebenen Beweises. — Es ist bemerkenswert, wie durch vorliegende Arbeit die Bedeutung der affinen Differentialgeometrie für die Untersuchung der allgemeinen metrischen Räume betont wird. W. Barthel.

Deicke, Arno: Über die Darstellung von Finsler-Räumen durch nichtholonomie Mannigfaltigkeiten in Riemannschen Räumen. Arch. der Math. **4**, 234—238 (1953).

E. T. Davies (this Zbl. **50**, 163) pointed out that it might be possible to represent a Finsler space  $F_n$  as an  $n$ -dimensional non-holonomic subspace of a Riemannian space  $R_{2n}$ . The author investigates the conditions to be satisfied by  $F_n$  such that this representation be possible, which is always the case when  $n = 2$ , as was shown by O. Galvani [C. r. Acad. Sci., Paris **223**, 1088—1090 (1946)]. In this case the „non-holonomic“ subspace turns out to be holonomic, a result which the author confirms for general values of  $n$ . Instead of  $R_{2n}$ , the author chooses the space  $R_{2n-1}$  of line-elements of  $F_n$ . An  $n$ -direction is associated with each point of  $R_{2n-1}$  such that the local metric and the coefficients of the „euclidean connection“ (in the sense of Cartan) of  $F_n$  are obtained by the projection of the Riemannian metric and the connection parameters of  $R_{2n-1}$  onto the  $n$ -direction. The author then shows that a necessary and sufficient condition for such a local representation to be possible is that there exists a twice differentiable  $(n-1)$ -parameter family of fields of directions such that the torsion of Cartan's connection vanishes when the element of support is taken to coincide with the direction of the field at each point. This theorem contains the result of Galvani (loc. cit.) as a special case. H. Rund.

Jongmans, F.: Étude de géométrie kählérienne. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **39**, 77—93 (1953).

La première partie de cette note traite des conditions nécessaires pour qu'une forme différentielle sur une variété kählérienne close soit harmonique. La plupart des résultats est contenue dans un travail du réf. [Tohoku mat. J., II. Ser. **4**, 157—171 (1952)] et dans une conférence de Strasbourg 1952 [Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **36**, 223—246 (1954)]. La seconde partie a affaire à l'étude de la structure multiplicative de l'anneau de cohomologie (à coefficients complexes) d'une variété kählérienne. Est introduite une notion de produit harmonique de formes harmoniques, associant à deux formes harmoniques la partie harmonique de leur produit extérieur. Cette notion paraît assez superflue, comme seule la notion de produit cup (d'une cohomologie appropriée) est utilisée. Les énoncés sont tous formulés pour les variétés kählériennes, mais ont voit tout de suite, en remplaçant



produit harmonique par le produit cup, que les arguments d'algèbre linéaire du no. 10 valent pour tout espace topologique avec quelques modifications: Soient en effet  $X$  un espace topologique de dimension cohomologique  $m$ , et  $\varphi^p, \dots$  des classes de cohomologie, on a trivialement  $\varphi^p \cup \varphi^q = 0$  pour  $p + q > m$ , et toujours  $\varphi^{2k+1} \cup \varphi^{2k+1} = 0$ . L'A. nomme décomposition stricte de zéro toute relation  $\varphi^p \cup \varphi^q = 0$  qui n'est pas des deux cas précités. Le problème est alors de trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une décomposition stricte de zéro. A cet effet, supposons les groupes de cohomologie  $H^p$  être des espaces vectoriels de dimension  $b^p$ . Les éléments de base soient  $\varphi_1^p, \dots, \varphi_{b^p}^p$ ,  $b^p b^q > b^{p+q}$  implique l'existence d'au moins  $b^p b^q - b^{p+q}$  relations  $\sum_{i,k} \varrho_{ik}^{(h)} \varphi_i^p \cup \varphi_k^q = 0$ . Une décomposition stricte de zéro  $(\sum x_i \varphi_i^p) \cup (\sum y_k \varphi_k^q) = 0$  correspond à  $x_i y_k = \sum_h r_h \varrho_{ik}^{(h)}$ . On peut toujours trouver des coefficients  $x_i, y_k$  si  $b^{p+q} \leq b^p + b^q - 2$ . Si  $p = q = 2k + 1$ , on aura une décomposition stricte  $\varphi^p \neq y$  sûrement pour  $b^{2p} \leq 2(b^p - 2)$ . La démonstration se fait en interprétant les  $x_i, y_k$  comme coordonnées dans un espace projectif de dimension  $b^p b^q - 1$ , les points  $x_i y_k$  forment une sousvariété, produit de deux espaces projectifs de dimensions  $b^p - 1$  et  $b^q - 1$ . Par ce résultat, qu'on a vu être de validité générale, l'A. déduit des résultats pour les variétés kähleriennes. Le seul cas d'une variété kählerienne  $V_{2m}$  dont l'algèbre de cohomologie ne possède pas de diviseurs stricts de zéro est celui où cette algèbre est engendrée par la classe fondamentale  $\Omega$ , pour  $m > 1$ . Pour  $m = 1$ , ceci reste vrai pour  $b^1 \neq 2$ , le cas  $b^1 = 2$  n'est pas franché par l'A., mais il est facile de voir que dans ce cas une base de  $H^1$  est formée par une forme analytique et son adjointe de Hodge-de Rham, de façon que le théorème est sûrement en défaut dans ce cas. Il est encore démontré que le produit extérieur de 2 formes analytiques sur un type spécial de  $V_2$  est nul, mais ceci vaut en général comme un tel produit contient toujours  $dz \wedge dz$ . Pour le reste de l'énoncé 12.2, le réf. ne voit pas comme il peut exister une infinité de décompositions strictes de zéro en formes analytiques, s'il n'existe qu'un nombre fini de formes analytiques linéairement indépendantes, et quelle influence doit avoir la propriété multiplicative des formes harmoniques. — A la fin sont trouvées les conditions pour l'existence d'une décomposition de zéro en formes analytiques pour une  $V_{2m}$  kählerienne quelconque (remarque: Si on renonce à l'interprétation en termes de cohomologie, les résultats de ce no. valent pour toute  $V_{2m}$  complexe, même non kählerienne). Il y a là une erreur d'impression, remplacer  $b_{(0)}^p \leq \dots$  par  $b_{(0)}^{2p} \leq \dots$ .

H. Guggenheimer.

Yano, Kentaro: On Killing vector fields in a Kaehlerian space. J. math. Soc. Japan 5, 6—12 (1953).

Bochner [Bull. Amer. math. Soc. 52, 716—747 (1946) und dies. Zbl. 40, 243] hat verschiedene Sätze bewiesen über die Existenz von harmonischen und Killing'schen Vektorfeldern in kompakten Riemannschen und Kählerschen Räumen. Es besteht zwischen diesen beiden Arten von Vektorfeldern eine bemerkenswerte Analogie. Im ersten Abschnitt wird hier der bekannte Satz bewiesen, daß in einem kompakten Kählerschen Raum ein Feld  $\xi_\alpha$  dann und nur dann harmonisch ist, wenn die  $\xi_\alpha$  (oder  $\bar{\xi}_\alpha$ ) analytische Funktionen der Koordinaten  $z^i$  ( $\bar{z}^i$ ) sind. Sodann wird die Beweismethode angewandt auf den analogen Satz für Killingsche Vektorfelder.

J. A. Schouten.

Lichnerowicz, André: Sur les espaces homogènes kähleriens. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 695—697 (1953).

The following theorems on homogeneous Kähler manifolds are announced: Let  $W = G/H$  such a manifold. If the center of  $G$  is not discrete, any invariant Kähler metric contains (locally) a unitary part. — For  $F$  compact, and  $W$  not locally unitary, the center of the connected group of isotropy of the Kähler structure is not discrete. — For  $G$  semi-simple compact,  $H$  connected,  $W$  is direct product of homogeneous Kähler manifolds with simple  $G$ , of center reduced to unity, and where  $H$  is the connected centralisator of the connected part of the unity of his own center, the Kähler structure being the sum of the Kähler structures of the components. — Any fourdimensional homogeneous Kähler manifold with compact  $G$  is symmetric Hermitian.

H. Guggenheimer.

Calabi, Eugenio: Isometric imbedding of complex manifolds. Ann. of Math., II. Ser. 58, 1—23 (1953).

Es handelt sich um das Problem der komplex analytischen Einbettung komplex analytischer

Mannigfaltigkeiten. Die Arbeit geht zurück auf Bochner (dies. Zbl. 35, 104) und Calabi [Ann. Math. Studies Nr. 30, 77–85 (1953)]. — In dem zweiten Abschnitt wird die invariante „diastatische“ Funktion für eine sogenannte Kählersche Metrik definiert. Für ebene unitäre oder Hilbertsche Räume geht diese in die gewöhnliche Entfernung über. — Im dritten Abschnitt wird u. a. bewiesen, daß für die lokale Einbettung in einem solchen ebenen Raum n. u. h. ist, daß die einzubettende Mannigfaltigkeit eine analytische Kählersche Metrik trägt. Auch werden die n. u. h. Bedingungen angegeben für die globale Einbettung einer solchen Mannigfaltigkeit. Der dritte Abschnitt befaßt sich mit der lokalen und globalen Einbettung in eine Mannigfaltigkeit von Fubini-Study (das Analogon der Riemannschen Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung). Auch hier werden die n. u. h. Bedingungen aufgestellt, sowohl für den lokalen als für den globalen Fall. Eine analytische Kählersche Metrik bleibt notwendig. Im letzten Abschnitt wird eine Anwendung gegeben auf die globale Einbettung von Fubini-Studyschen Räumen ineinander. *J. A. Schouten.*

**Libermann, Paulette:** Problèmes d'équivalence relatifs à une structure presque complexe. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 366–369 (1953).

In dieser Note wird über einige Ergebnisse von Ch. Ehresmann und P. Libermann kurz berichtet [Ehresmann, dies. Zbl. 39, 397; Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30–Sept. 6, 1950) 2, 412–419 (1952); Ehresmann, Libermann, dies. Zbl. 42, 159; Libermann, Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci. V. Sér. 36, 742–755 (1950) und dies. Zbl. 42, 406]. Insbesondere werden Ergebnisse über die lokale Äquivalenz fast-komplexer Strukturen im Falle von 2 komplexen Dimensionen angekündigt. *F. Hirzebruch.*

**Egorov, I. P.:** Über Bewegungen in Räumen mit affinem Zusammenhang. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 89, 781–784 (1953) [Russisch].

The author gives a geometrical characterization of an affinely connected space, of non-zero curvature with maximal mobility: a) when the space,  $A_n$ , has no torsion, b) when the space,  $L_n$ , has a semi-symmetric connexion. — It is known [Egorov, this Zbl. 29, 417; Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 87, 693–696 (1952)] that the concerned  $A_n$  is characterized by the presence either of a transitive (complete) group of motions of order  $n^2$ , or of an intransitive group of order  $n^2 - 1$ . — It is also known that the  $A_n$ 's with maximal mobility are necessarily equiaffine and projectively flat, and the components of the Ricci tensor are of the form:  $R_{ij} = (1 - na) \lambda_i \lambda_j + \varepsilon_{ij} - 1$ ;  $\lambda_{i,j} = a \lambda_i \lambda_j$ ,  $a$  being a constant when the group of motions is transitive, and  $\varepsilon$  a function of  $\lambda$  when the group is intransitive. — The author draws from (1) some consequences, of which the most important are: 1. A projectively flat space which admits at least one field of parallel contravariant vectors, is equiaffine. — 2. An  $A_n$  has maximal mobility if, and only if, it admits exactly  $n - 1$  independent fields of parallel contravariant vectors. — 3. For any such space the  $\infty^1$  family of hypersurfaces  $\lambda(x^1, \dots, x^n) = \text{const}$  is a family of imprimitivity (intransitivity). 4. Any hypersurface of the family is totally geodesic. — Using then the geodesic mapping of our  $A_n$  in a euclidean  $E_n$ , the author gives a canonical form for the components of the connexion and shows how, in this  $E_n$ , the motions of the group may be realized as projectivities leaving invariant a suitable hypersurface (absolute). Any such space may also be realized as a hypersurface in a euclidean  $E_{n+1}$ . Besides, the immediately successive value for the order of the group of motion for an  $A_n$  with an intransitive group of motions is  $n^2 - n$ . As for the  $L_n$ 's with maximal mobility, the canonical form for the component of the connexion and for the torsion is given and it is proved that in this case too the highest order for the order of the complete group of motions is  $n^2$  or  $n^2 - 1$ , according that the group is transitive or intransitive; and the immediately successive value is in this case also  $n^2 - n$ . *V. Dalla Volta.*

**Nijenhuis, Albert:** On the holonomy groups of linear connections. Ia. II General properties of affine connections. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 56, 233–240, 241–249 (1953).

Part Ia deals with the holonomy group  $h(M, p)$  at a point  $p$  of a connected  $n$ -dimensional manifold  $M$  with affine connection  $\Gamma_{ij}^k$  (not necessarily symmetric), and its normal subgroup  $h^0(M, p)$  belonging to curves that can be contracted to zero. It is shown that this group  $h^0$  is a Lie subgroup of the centered affine group, and that its Lie algebra is spanned by the matrices arising from the  $R_{ij}^k(x)$ ,  $x \in M$ , by parallel transport to  $p$  along any curves. Here the  $R_{ij}^k$  matrices are determined by the curvature tensor  $R_{ij}^k{}_{\lambda}$  with  $\lambda$  and  $j$  as column and row indices. Then the local holonomy group  $h^*(p)$  is introduced for a connected open set  $U \ni p$ , this group is obtained by taking a sequence  $U_1 \supset U_2 \supset \dots \supset \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = p$  and taking the intersection of the shrinking Lie groups  $h^0(U_i, p)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . It is shown that every element of  $h^0(M, p)$  can by suitable parallel mapping be written as a finite product of elements of the groups  $h^*(x)$



$p \in M$ . The group  $h^*(p)$  at  $p$  is a Lie subgroup of  $h^0(M, p)$ , its Lie algebra is spanned by the matrices arising from the  $R_{\mu\lambda}(x)$  in a suitable neighborhood of  $p$  by suitable parallel support to  $p$ . — Part 1b introduces the infinitesimal holonomy group  $h'$  (which is not an infinitesimal group but a group of infinitesimal homology). It is determined by its Lie algebra and the requirement that it be a connected Lie subgroup of the group of centered affine transformations. It is only defined if  $M$  and the connection are of class  $C^\infty$ . The Lie algebra is spanned by the matrices  $R_{\mu\lambda}(p)$ ,  $1_{\nu} R_{\mu\lambda}(p), \dots, 1_{\nu_1 \dots \nu_k} R_{\mu\lambda}(p), \dots$ ; it is a subgroup of  $h^*(p)$ . If  $h'(x) = h^*(x)$  for all  $x \in M$ , then  $h^0(M, p) = h'(p)$ . The paper ends with the non-analytic case. A result is that if  $p$  is a non-singular point of  $h'$ , and if  $M_i$  is the component of  $M - \Omega^*$  to which  $p$  belongs ( $\Omega^*$  being the set of singular points of  $h^*$ ), and moreover  $Q$  is a quantity invariant under  $h'(p)$ , then in every connected and simply connected open subset of  $M_i$  containing  $p$  there is precisely one covariant constant field  $Q(x)$  such that  $Q(p) = p$ .

D. J. Struik.

Castoldi, Luigi: Attorno alla teoria delle connessioni. — Deduzione autonoma del carattere tensoriale dei sistemi quadrupli di curvatura. Boll. Un. mat. Ital., II. Ser. 8, 127—130 (1953).

This is a new, simple, proof of the well known fact that the Riemann symbols with four indexes  $L_{ijh}^k$ , defined in the usual way for any affine (linear) connection  $L_{ij}^k$ , are actually the components of a tensor. — According to author's expression, this is an „autonomous“ proof, in the sense that it does not use the commutation formulas for the 2nd covariant derivative of a vector, that appear as something non intrinsic to the connection. This is a sketch of the proof: let  $N_{jh}^k$  be a connection, whose components, in a given coordinate system  $x^i$ , are zero and let  $N_{jh}^k$  be the Riemann symbols for  $N_{ij}^k$ ; then, it is easy to prove that the components  $N_{h'j'k'}^{i'}$  are zero in any coordinate system  $x^{i'}$ . If we put  $D_{ij}^k = L_{ij}^k - N_{ij}^k$ , it is well known that  $D_{ij}^k$  is a tensor; if we now express  $L_{ijh}^k$  by means of  $N_{ij}^k$ , (its derivatives) and  $D_{ij}^k$ , it turns out that  $L_{ijh}^k$  is equal to the sum of  $N_{ijh}^k$  and of an expression that is a tensor; since we know that  $N_{ijh}^k = 0$  in any coordinate system, the statement follows.

V. Dalla Volta.

Castoldi, Luigi: Calcolo della connessione affine integrale associata ad un punto di una varietà a connessione affine. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 14, 760—765 (1953).

This Reviewer has introduced the notion of affine integral connection (a. i. c.) associated with a point of an affinely connected space [Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 24, 257—282 (1945)]. The author proves that the a. i. c. is uniquely determined by the following properties: 1. it has at the given point the same paths as the given connection with the same affine parameters; 2. it is symmetric and flat (its curvature tensor vanishes). A method to calculate the derivatives of the a. i. c. at the fixed point is given.

E. Bompiani.

Ruse, H. S.: Simply harmonic affine spaces of symmetric connection. Publ. math., Debrecen 2, 169—174 (1953).

Eine  $V_n$  heißt centro-harmonisch, wenn die Distanzfunktion  $\Omega = e s^2/2$ ;  $e = \pm 1$  in bezug auf einen Basispunkt der Bedingung  $\Delta_2 \Omega = f(\Omega)$  genügt, und einfach centro-harmonisch, wenn  $f$  eine Konstante ist. Patterson (dies. Zbl. 46, 154) definierte die einfach harmonische  $A_n$  mit Hilfe einer Relationenfolge von Walker [Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser. 7, 16—26 (1942)]. Mit Hilfe eines Vektorfeldes  $Y^i$ , das in bezug auf einen Basispunkt mittels Normalkoordinaten definiert werden kann, wird hier bewiesen, daß eine  $A_n$  einfach centro-harmonisch ist, wenn  $\nabla_i Y^i = n$ , und einfach harmonisch, wenn diese Beziehung gilt für alle Felder  $Y^i$  in bezug auf alle Basispunkte.  $Y^i$  spielt in  $A_n$  dieselbe Rolle wie  $\Omega^i = s dx^i/ds$  in  $V_n$ , wie schon von Synge (dies. Zbl. 2, 154) gezeigt wurde. Wenn  $R_{2n}$  die „Riemann Erweiterung“ (Patterson und Walker, dies. Zbl. 48, 156) von  $A_n$  ist, so hat Patterson (l. c.) bewiesen, daß  $V_{2n}$  einfach harmonisch ist, wenn und nur wenn  $A_n$  einfach harmonisch ist. Darüber hinaus wird hier bewiesen, daß schon, wenn  $V_{2n}$  harmonisch ist,  $V_{2n}$  und  $A_n$  einfach harmonisch sind, und daß der Satz gültig bleibt, wenn „harmonisch“ überall durch „centro-harmonisch“ ersetzt wird.

J. A. Schouten.

Sen, R. N.: On pairs of teleparallelisms. J. Indian math. Soc., n. Ser. 17, 21—32 (1953).

Für einen Raum mit Riemannscher Metrik werden zuerst zwei Bedingungen aufgestellt, unter denen zu einem gegebenen Fernparallelismus  $\Gamma_{ij}^t(x)$  jeweils ein

weiterer Fernparallelismus erzeugt werden kann. Schließlich wird in gewisser 3-dimensionalen Räumen mit diesen Bedingungen ein Paar von Fernparallelismen konstruiert. Während der erste Typ von Räumen auf ein neues Paar von Fernparallelismen führt, ergeben die beiden anderen Typen den Cliffordschen Rechts- und Linksparallelismus bzw. den euklidischen Parallelismus. W. Barthel.

### Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:

Zin, Giovanni: Contributo alla geometria infinitesimale diretta delle curve piane. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 34, 41—53 (1953).

$C$ : arc (image biunivoque et bicontinue d'un intervalle fermé) dans le plan orienté.  $P_1, P_2$ : points variables de  $C$  tels que  $P_1$  précède  $P_2$ .  $\chi(P_1, P_2)$ : détermination de l'angle polaire mesuré en radians de la direction  $P_1 P_2$  suivie par continuité sur  $C$ . Amplitude angulaire („ampiezza“) de  $C$ : oscillation de la fonction  $\chi(P_1, P_2)$  sur  $C$ . Oscillation angulaire („angolosità“)  $\omega(P)$  de  $C$  en un de ses points  $P$ : oscillation de  $\chi(P_1, P_2)$  en  $(P, P)$ . Proposition: Les conditions suivantes sont équivalentes: (1)  $\omega(P) < \pi$ , (2)  $C$  est lipschitzien en  $P$ , (3) Le paratingent de  $C$  en  $P$  laisse échapper au moins une direction. Un exemple montre qu'un arc rectifiable peut n'être nulle part lipschitzien. [Rem. du rapp. Il s'agit en d'autres termes d'un arc plan rectifiable dont la tangente prend sur tout arc partiel toutes les directions. Un exemple spatial se trouve chez Z. Zahorski (ce Zbl. 48, 164). En vertu du théorème de G. Choquet (Thèse, Paris 1946 (1948); ce Zbl. 35, 242) relatif à la coïncidence du paratingent et du contingent sur un résiduel, le phénomène ne peut plus se produire si l'arc possède partout une tangente.] Chr. Pauc.

Lane, N. D. and Peter Scherk: Differential points in the conformal plane. Canadian J. Math. 5, 512—518 (1953).

In der euklidischen Ebene  $E_2$  sei  $B$  ein Bogen, d. h. eindeutiges stetiges Bild der Strecke  $S = (0 \leq s \leq 1)$ . Ist  $P(s)$  das Bild von  $s$ , so soll zu jedem  $s$  eine Umgebung  $U$  auf  $S$  gehören, derart, daß  $P(s) \neq P(s')$  für jedes  $s' \in U - \{s\}$ . Als Tangentialkreis  $C(P(s), Q) = C(s, Q)$  an  $P(s)$  werde bezeichnet jeder Limes von Kreisen durch  $P(s), P(s')$  und  $Q$  für  $s' \rightarrow s$ , unter  $Q$  einen beliebigen, von  $P(s)$  verschiedenen, aber festgehaltenen Punkt verstanden.  $P(s)$  selbst werde als Nullkreis zu den  $C(s, Q)$  hinzugerechnet. — I. Forderung: Es ist  $C(s, Q)$  eindeutig durch  $s$  und  $Q$  bestimmt. I. Satz: Bei festem  $s$  bilden die  $C(s, Q)$  ein (Kreis-)Bündel  $t(s)$  von 2. Art mit  $P(s)$  als Grundpunkt, d. h. die  $C(s, Q)$  berühren einander alle in  $P(s)$ . Jeder nicht zu  $t(s)$  gehörige Kreis  $K'$  durch  $P(s)$  hat mit  $B$  in der Umgebung von  $s$  nur endlich viele Punkte gemeinsam, stützt oder schneidet also den Bogen  $B$  in  $P(s)$ ; wird  $B$  in  $P(s)$  von einem einzigen derartigen Kreis  $K'$  gestützt (bzw. geschnitten), so wird  $B$  von allen  $K'$  gestützt (bzw. von allen geschnitten). — 2. Forderung: Es sei  $B$  in  $P(s)$  differenzierbar, d. h. außer Forderung soll noch gelten:  $C(P(s), P(s'))$  hat für  $s' \rightarrow s$  einen Limes, den (eindeutig) bestimmten Schmiegekreis  $C(s)$  an  $B$  in  $P(s)$ ; es ist  $C(s) \in t(s)$ . II. Satz: Jeder von  $C(s)$  verschiedene Kreis  $K$  durch  $P(s)$  hat mit  $B$  in einer Umgebung von  $s$  nur endlich viele Punkte gemeinsam, schneidet oder stützt also. Ist  $C(s)$  der Nullkreis  $P(s)$ , so wird  $B$  in  $P(s)$ , wenn von einem  $K \notin t(s)$  mit  $K \neq C(s)$ , dann von allen  $K$  gestützt (bzw. von allen geschnitten). Ist  $C(s) \neq P(s)$ , dann wird  $B$  in  $P(s)$  von jedem  $K$  gestützt [ $K \in t(s), K \neq C(s)$ ]. — Die Kombination der im I. und II. Satz aufgezeigten Fälle des Stützens oder Schneidens kombiniert ferner mit den Fällen  $C(s) \neq P(s)$  oder  $C(s) = P(s)$  sowie mit den Fällen, daß  $C(s)$   $B$  in  $P(s)$  einen Häufungspunkt besitzt oder daß  $C(s)$  den Bogen  $B$  in  $P(s)$  stützt bzw. schneidet, führt zu einer Klassifikation der differenzierbaren Punkte, die in einer Tabelle zusammengestellt ist. Otto Haupt.

Gale, David: On inscribing  $n$ -dimensional sets in a regular  $n$ -simplex. Proc. Amer. math. Soc. 4, 222—225 (1953).

Nach dem bekannten Satz von H. W. E. Jung läßt sich im  $n$ -dimensionalen euklidischen Raum jede Punktmenge vom Durchmesser 1 durch eine Kugel überdecken, die sich einem regulären Simplex vom Durchmesser 1 umschreiben läßt, ihr Radius ist  $R_n = (n-1)^{1/2}$ . Verf. stellt diesem klassischen Ergebnis ein duales gegenüber: Jede Punktmenge vom Durchmesser 1 läßt sich durch ein reguläres Simplex überdecken, das sich einer Kugel vom Durchmesser 1 umschreiben läßt; sein Durchmesser ist  $D_n = (n-1)^{1/2}$  (Ref. bemerkt hierzu, daß die auch leicht auf Grund der Bemerkung folgt, daß jede Punktmenge vom Durchmesser



in einem Körper konstanter Breite 1 enthalten ist, und daß  $D_n$  der mittlere Durchmesser der einem solchen Körper umbeschriebenen regulären Simplexe ist). — Es bezeichne  $d_n$  bzw.  $d_n^0$  den kleinsten Wert mit der Eigenschaft, daß sich jede Punktmenge bzw. die Kugel vom Durchmesser 1 durch  $n + 1$  Mengen überdecken läßt, deren Durchmesser alle  $\leq d_n$  bzw.  $\leq d_n^0$  sind. Nach einer noch unbewiesenen Vermutung von K. Borsuk gilt  $d_n < 1$ . Trivialerweise ist  $d_n^0 < 1$  und  $d_n^0 \leq d_n$ . Verf. verstärkt die Borsuksche Vermutung, indem er erwägt, daß  $d_n^0 = d_n$  sein könnte. Aus seinem Ergebnis kann er jedenfalls im Falle  $n = 2$  auf  $d_2^0 = d_2 = \sqrt[3]{3}/2$  schließen.

H. Hadwiger.

**Bouligand, Georges:** Sur un type d'énoncé stable en théorie des transformations de contact. C. r. Acad. Sci., Paris **236**, 2136—2138 (1953).

L'A. reprend un théorème d'aplatissement donné dans une note antérieure (ce Zbl. **50**, 164). Il signale que l'indépendance des vecteurs  $\partial M / \partial x + p \partial M / \partial z$ ,  $\partial M / \partial y + q \partial M / \partial z$ , en assurant la biunivocité locale entre  $S$  et son image, est une hypothèse essentielle à la stabilité de l'aplatissement.

Ch. Pauc.

**Hammer, P. C. and Andrew Sobczyk:** Planar line families. I. Proc. Amer. math. Soc. **4**, 226—233 (1953).

The authors call a family of straight lines in the plane „outwardly simple“ if it covers the exterior of some circle simply. [They exclude families consisting of parallel lines only.] Such families can be associated with a continuous involuntary transformation  $T$  without fixed points of the circle into itself; or, alternatively, with a continuous increasing function  $f$  which maps a closed real interval onto itself. To each transformation  $T$  (or function  $f$ ) an outwardly simple line family can be defined, uniquely apart from similarity transformations of the plane. On the other hand  $T$  (or  $f$ ) is not uniquely determined by the family but also depends on the choice of a circle: the connection between different transformations  $T$  arising from the same outwardly simple line family is an interesting but presumably difficult problem. The main result of the paper is the remarkable fact that all orthogonal trajectories of an outwardly simple line family which have a point outside a sufficiently large circle are smooth convex curves of constant breadth; moreover all convex curves of constant breadth are obtained as orthogonal trajectories of outwardly simple line families; to each family  $F$  there belongs a minimal such convex curve  $C$  of constant breadth, which need not be smooth (and may degenerate to a single point). The others belonging to  $F$  are the „exterior associated convex bodies“ of  $C$  in the sense of P. C. Hammer, this Zbl. **43**, 163. The minimal  $C$  is „irreducible“ (cf. op. cit.). The family  $F$  consists of the (extended) diameters of  $C$  and its associated curves; thus it follows incidentally that the plane outwardly simple line families are exactly the families of essential diameters (cf. op. cit.) of convex curves. It is stated that this is no longer true in three dimensions.

B. H. Neumann.

**Ohmann, D.:** Einige dem Vierscheitelsatz verwandte Sätze über Eilinen. J. reine angew. Math. **192**, 74—76 (1953).

$h^{(\mu)}(\varphi)$  sei die  $\mu$ -te Ableitung der Stützfunktion einer Eilinie. Für ein „Linearaggregat“  $y(\varphi) = \sum_{\mu, \nu} a_{\mu\nu} h^{(\mu)}(\varphi + \alpha_\nu)$  gilt: Ein translationsinvariantes stetiges

Linearaggregat der Stützfunktion einer Eilinie [mit  $y(\varphi) + y(\varphi + \pi) = \text{const}$ ] nimmt seinen Mittelwert wenigstens vier- (sechs-)mal an. Anwendung auf verschiedene Linearaggregate ergibt einheitliche einfache Beweise für folgende z. T. bekannte Sätze: 1. Unter allen einer Eilinie (konstanter Breite) umbeschriebenen Vierecken mit vorgegebenen Eckenwinkeln gibt es wenigstens vier (sechs) Kreistangentenvierecke. — 2. Unter allen einer Eilinie (konstanter Breite) des Umfangs  $L$  umbeschriebenen Polygonen mit den fest vorgegebenen Außenwinkeln  $\alpha_\nu$  gibt es wenigstens vier (sechs), deren Umfang den Wert  $L \cdot \sum \text{tg } \alpha_\nu / 2$  annimmt. — 3. Unter allen Teilbögen einer Eilinie (konstanter Breite) der festen Gesamtkrümmung  $\alpha$  existieren wenigstens vier (sechs) der Länge  $\alpha / L / 2\pi$ . — 4. Auf einer Eilinie lassen sich wenigstens drei Paare von Gegenpunkten angeben, die den Umfang hälften. — Die Sätze 2, 3, 4 gestatten Verallgemeinerungen auf Paare von Eilinen.

H. Gericke.

**Ohmann, D.:** Isoperimetrische und verwandte Extremalprobleme für beschränkte ebenen Punktmengen. J. reine angew. Math. **192**, 65—73 (1953).

Verf. untersucht, ob sich die Aussagen (I) über Extremwerte des Umfangs  $U$  eines ebenen

konvexen Bereiches bei gegebenem Durchmesser  $D$  und Dicke 1 und (II) über Bereiche maximalen oder minimalen Inhalts  $F$  bei Vorgabe einer oder mehrerer der Größen  $U, D, 1$ , auf beliebige beschränkte ebene Punktfolgen übertragen lassen.  $U, F, D, 1$  werden als Lebesguesche Maße definiert. Dann findet Verf. „für die erste Gruppe von Extremalproblemen, daß zwischen dem Quermaßintegral und den Quermaßextremalen nur die der Definition unmittelbar zu entnehmenden Ungleichungen bestehen können. Weiter fällt die Gruppe von Extremalproblemen, die sich mit dem minimalen Maß beschäftigt, naturgemäß aus. Hingegen erweisen sich die Extremalprobleme für maximales Maß als weitgehend übertragungsfähig.“ Haupthilfsmittel der Beweise sind: 1. Vergleich der Maße mit denen eines konvexen Mittelpunktsbereichs, des folgendermaßen definierten „Rumpfbereiches“: Ist  $q(q)$  das Quermaß in Richtung  $q$ , so deute man  $q(q) \geq 2$  als Abstand von Geraden  $G(q)$  der Richtung  $q$  vom Nullpunkt. Der Durchschnitt der  $O$  enthaltenden Halbebenen ist der Rumpfbereich. 2. Konstruktion von Mengen, deren inneres und äußeres Quermaß in jeder Richtung zusammenfällt und in einer ausgezeichneten Richtung verschwindet, während es in allen übrigen Richtungen gleichen positiven Wert annimmt, und von Mengen, deren Quermaß in allen Richtungen verschwindet, mit Ausnahme einer Richtung, in der es einen gegebenen Wert annimmt. Die Existenz von Mengen der zweiten Art zeigt z. B. unmittelbar, daß ein Analogon der Ungleichung  $U \leq 2D$  nicht bestehen kann. H. Gercke.

**Rogers, C. A.:** Certain integrals over convex sets. J. London math. Soc. 28, 293—297 (1953).

Mit Hilfe eines Lemmas von Erhard Schmidt aus seinen Untersuchungen zum isoperimetrischen Problem beweist Verf. folgenden Satz, den er a. a. O. (s. folgend. Ref.) verwenden will: Die Funktion  $\varrho(r) \geq 0$  sei für  $0 < r < 1$  nicht-abnehmend, für  $r > 1$  sei  $\varrho(r) = 0$ .  $\mu$  sei das Lebesguesche Maß im euklidischen  $R_n$ ,  $S$  die Einheitskugel um den Ursprung  $O$ ,  $K$  eine abgeschlossene konvexe Menge des  $R_n$ , für die  $\mu(K) < \mu(S)$  ist, und  $S(K)$  sei ein Kugelsegment, das von  $S$  durch eine  $(n-1)$ -dimensionale Hyperebene so abgeschnitten ist, daß  $\mu(S(K)) = \mu(K)$  ist. Ist  $|X|$  die Entfernung des Punktes  $X \in R_n$  von  $O$ , so ist stets

$$\int_K \varrho(|X|) d\mu \leq \int_{S(K)} \varrho(|X|) d\mu. \quad \text{W. Süss.}$$

**Rogers, C. A.:** The volume of a polyhedron inscribed in a sphere. J. London math. Soc. 28, 410—416 (1953).

R. P. Bambas und H. Davenport haben bei Untersuchungen über Kugellagerungen im  $R_n$  (dies. Zbl. 47, 51) die folgende Abschätzung benutzt (Bezeichnungen wie im vorigen Ref.): Ist  $H \subset S$  ein konvexes Polyeder mit  $N$  Seitenflächen, ist  $\delta = 2/(n-1)$  und  $\bar{c} = n \Gamma[(n+1)/2] \mu(H) / N \pi^{(n-1)/2}$ , so gilt stets

$$\frac{\mu(S)}{\mu(H)} \geq \int_0^1 \frac{dt}{|1 - c^\delta (1 - t^\delta)|^n}. \quad \text{Der Beweis beschränkte sich auf den allein benötigten}$$

Fall, daß die Fußpunkte der Lote von  $O$  auf die Seitenflächen in deren Inneres fallen. Verf. beweist dasselbe Ergebnis ohne diese Einschränkung. Als Folgerung zeigt sich: Wachsen  $n$  und  $N$  derart über alle Grenzen, daß  $N^{1/n} \rightarrow \lambda$ , dann ist die obere Grenze von  $\mu(H)/\mu(S) \leq 1 - \lambda^{-2}$ . W. Süss.

**Ohmann, D.:** Über die Summe der Inkreisradien bei Überdeckung. Math. Ann. 125, 350—354 (1953).

Es bezeichne  $\varrho(B)$  den Inkreisradius eines ebenen konvexen Bereiches  $B$ . Verf. beweist: Ist  $B \subset \bigcup B_r$ , d. h. wird  $B$  durch endlich viele  $B_r$  überdeckt, so gilt  $\varrho(B) \leq \sum \varrho(B_r)$ . Der originelle Beweisansatz geht von einer Massenbelegung der Ebene aus, deren Dichte durch  $\mu = (1-r^2)/(1-r^2)$  ( $0 < r < 1$ ) bzw.  $\mu = 0$  ( $1 < r < \infty$ ) gegeben ist; hierbei ist  $r$  der Abstand des Punktes vom Mittelpunkt eines Einheitskreises  $K$ . Bedeutet  $D$  ein Dreieck, so folgt aus  $K \subset \bigcup D_r$  offenbar  $2\pi = M(K) \leq \sum M(D_r)$ , wobei  $M(B)$  die Masse von  $B$  darstellt. Mit der Hilfsaussage  $M(D) \leq 2\pi \varrho(D)$  ist der Satz bereits bewiesen; als  $D_r$  wähle man Um-dreiecke von  $B_r$  mit gleichem Inkreisradius, und  $K$  sei ein Inkreis von  $B$ . Der vom Verf. erbrachte Nachweis der Hilfsaussage ist verhältnismäßig verwickelt.

H. Hadwiger.



Levi, F. W.: Eine Ergänzung zum Hellyschen Satze. Arch. der Math. 4, 222—224 (1953).

Für eine Familie  $F$  von konvexen Mengen  $C_j$  des  $R_n$  wird die Beziehung der beiden folgenden Angaben zueinander untersucht:  $(A_m)$  Die Vereinigungsmenge von je  $m$  Mengen  $C_j$  hat eine zusammenhängende Komplementärmenge;  $(B_m)$ . Der Durchschnitt von je  $m$  Mengen  $C_j$  ist nicht leer ( $m = 1, 2, \dots$ ). Der Satz von Helly besagt, daß jedes  $B_m$  aus  $B_{n+1}$  folgt. Verf. zeigt: Sind alle  $C_j$  abgeschlossen, so folgen alle  $B_m$  aus  $B_n$  und  $A_{n+1}$ . Sind alle  $C_j$  beschränkt, so folgt für  $m > 1$   $A_m$  aus  $B_m$ . Sind alle  $C_j$  abgeschlossen und beschränkt, dann gilt  $A_n$  für  $s \leq n$  und  $n > 1$ . Ein dem sog. Pflastersatz von Lebesgue verwandter Hilfssatz wird benutzt, der ein selbständiges Interesse verdient: Sind  $C_1, C_2, \dots, C_{n+1}$  abgeschlossen und ist  $K = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{n+1}$  konvex, so folgt aus  $B_n$  in  $K$ , daß  $C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_{n+1} \neq \emptyset$  ist. Die Konvexität der  $C_j$  ist hierbei eine notwendige Voraussetzung. W. Süß.

Vincensini, Paul: Les ensembles d'arcs d'un même cercle dans leurs relations avec les ensembles de corps convexes du plan euclidien. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 456—464 (1953).

In Verallgemeinerung von Hellys Satz wird das folgende, als schwierig bezeichnete Problem gestellt: Es sei  $E^n$  der  $n$ -dimensionale euklidische Raum und  $1 \leq h \leq n-1$ : es ist  $p = p(h)$  so zu bestimmen, daß allemal, wenn je  $p$  Körper eines Systems  $\mathcal{C}$  von konvexen Körpern im  $E^n$  von einem  $h$ -dimensionalen linearen Teilraum  $E^h$  von  $E^n$  getroffen werden, sogar alle Körper von  $\mathcal{C}$  von einem  $E^h$  getroffen werden. Zur Behandlung dieser Frage in der Ebene bedient sich der Verf. „konvexer Mengen von Richtungen“, über welche einige Sätze bewiesen werden. Als Anwendung davon ergibt sich: Kann man je 4 Körper eines Systems von konvexen Körpern der Ebene auf einer Geraden aufspießen, so kann man das ganze System auf einer Geraden aufspießen. G. Aumann.

Müller, Hans Robert: Über Momente ersten und zweiten Grades in der Integralgeometrie. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 2, 119—140 (1953).

Es sei  $B$  ein Eibereich in der Euklidischen Ebene mit den Cartesischen Zeigern  $x_1, x_2$ .  $B$  sei belegt mit Masse von der Dichte Eins.  $B^h$  sei der Parallelbereich von  $B$  im Abstand  $h > 0$  nach außen. Es werden die linearen und quadratischen Momente von  $B$  betrachtet:  $F_j[B] = \int_B x_j dF$ ,  $F_{jk}[B] = \int_B x_j x_k dF$ . Für  $B^h$  findet sich dann entsprechend zu Steiners Formel für  $F[B^h]$   $F_j[B^h] = F_j + h U_j + \frac{1}{2} h^2 C_j$ ,  $F_{jk}[B^h] = F_{jk} + h U_{jk} + \frac{1}{2} h^2 (C_{jk} + 2 \delta_{jk} F) + \frac{1}{3} h^3 (T_{jk} + \delta_{jk} U) + \frac{1}{4} h^4 \delta_{jk} \pi$ . Darin haben die rechts auftretenden Festwerte einfache Deutungen, z. B.  $C_{jk} = \int_{B^*} x_j x_k d\tau$ ,

wenn  $B^*$  den Rand von  $B$  und  $d\tau$  den Winkel benachbarter Tangenten von  $B^*$  bedeutet. Ist nun  $B$  ein ruhender,  $B'$  ein bewegter Bereich mit der „kinematischen Dichte“  $dB'$ , ferner  $BB'$  der Durchschnitt von  $B, B'$ , so gilt in Erweiterung von Formeln von Santaló und Blaschke (1936)

$$\int C_j[BB'] dB' = 2\pi \{C_j F'_j + U U'_j + F C'_{jj}\}, \quad \int C_{jk}[BB'] dB = 2\pi \{C_j F'_{jk} + U U'_{jk} + F C'_{jk}\}.$$

Diese Ergebnisse lassen sich auch mittels eines allgemeinen Satzes von H. Hadwiger gewinnen. Man vergleiche dessen Buch über konvexe Körper (Basel 1954). Es werden auch Parallelbereiche nach innen betrachtet. W. Blaschke.

## Topologie:

Sakakihara, Kenenji: The structures of neighbourhood systems and the types of convergences. J. Inst. Polytechn., Osaka City Univ., Ser. A 4, 1—7 (1953).

Relations are studied of the notions of convergence, „conv“, and neighbourhood, „nbd“, defined in an abstract  $R$ . „conv“ is supposed to be defined by means of a given directed set  $X$  (the „base“) and „nbd“ as a relation between points and

subsets of  $R$  fulfilling different sets of axioms. „conv“ given, „nbd“ is defined by (1)  $N \text{ nbd } a = \bigvee_{\varphi} \varphi \text{ conv } a \rightarrow \varphi \text{ ult } N$ , and „nbd“ given, „conv“ is defined by (2)  $\varphi \text{ conv } a = \bigvee_N N \text{ nbd } a \rightarrow \varphi \text{ ult } N$ , where  $\varphi$  is a map from  $X$  to  $R$  and  $\varphi \text{ ult } N = \bigwedge_{x_0 \in x} \bigvee x > x_0 \rightarrow \varphi(x) \in N$ . — The conditions are studied for „nbd“ and „conv“ to be mutually reversible by these transformations. Also the relations between „nbd“, „conv“ and the closure operator  $f$  are investigated. *A. v. Heemert.*

**Thielman, H. P.:** Types of functions. *Amer. math. Monthly* **60**, 156–161 (1953).

$X$  und  $Y$  seien topologische Räume,  $f(x)$  sei eine auf  $X$  definierte Funktion mit Werten aus  $Y$ .  $f(x)$  heißt „nachbarlich“ („neighborly“) in  $c \in X$ , wenn es zu jeder Umgebung  $N_c$  von  $c$  und zu jeder Umgebung  $M$  von  $f(c)$  eine offene Menge  $N \subset N_c$  mit  $f(N) \subset M$  gibt (vgl. W. W. Bledsoe, dies. Zbl. **46**, 403). Ist  $Y$  ein metrischer Raum, so wird  $f(x)$  in  $c \in X$  „sipp-schaftlich“ („eliquish“) genannt, wenn es zu jeder Umgebung  $N_c$  von  $c$  und zu beliebigem  $\varepsilon > 0$  eine offene Menge  $N \subset N_c$  gibt, so daß für  $x_1, x_2 \in N$   $d(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$  gilt. Folgende Behauptungen werden bewiesen: Ist  $f(x)$  „sipp-schaftlich“ in den Punkten einer in  $X$  dichten Menge, so ist sie „sipp-schaftlich“ in jedem Punkt von  $X$ . Ist die Menge der Punkte, in welchem  $f(x)$  nicht „sipp-schaftlich“ ist, dicht in  $X$ , so ist ihre Komplementärmenge nirgendsdicht. Dagegen gibt es für  $X = R_1$ ,  $Y = R_1$  Funktionen  $f(x)$ , so daß die Menge der Punkte, in welchen  $f(x)$  „nachbarlich“ ist, und auch ihre Komplementärmenge dicht in  $X$  sind. Die Grenzfunktion einer Folge von überall „sipp-schaftlichen“ Funktionen kann überall „nichtsipp-schaftlich“ sein.

*A. Császár.*

**Ellis, David and Gaines Lang:** The space of groupoids over a compactum. *Acta math.* **89**, 209–215 (1953).

$M$ : compactum (compact metric space).  $\delta(x, y)$ : distance function of  $M$ . Groupoid  $\alpha$  over  $M$ : single-valued function  $z = x \alpha y$  on  $MM$  to  $M$ . Distance of two groupoids  $\alpha, \beta$ :  $\delta(\alpha, \beta) = \sup_{x, y \in M} \delta(x \alpha y, x \beta y)$ .  $\mathfrak{G}$ : space of all groupoids over  $M$ . Main propositions:  $\mathfrak{G}$  is complete (in the sense of Fréchet). If  $M$  is infinite, then  $\mathfrak{G}$  includes a subset  $\mathfrak{D}$  with the properties (1)  $\mathfrak{D}$  consists of finite-valued groupoids and (2)  $\mathfrak{D}$  is dense in  $\mathfrak{G}$ . If  $M$  is convex, then  $\mathfrak{G}$  is convex. If  $\alpha$  is discontinuous at  $(x, y)$ , then any  $\beta$  in a suitable neighbourhood of  $\alpha$  is also discontinuous at  $(x, y)$ . The set  $\mathcal{C}$  of the continuous groupoids is closed in  $\mathfrak{G}$ . The set  $\mathfrak{L}$ , of the „topological“ quasigroups is closed in  $\mathfrak{G}$ . At the end of the paper the author raises the characterization problem for spaces of groupoids among metric spaces, and the following interesting question: What groupoids may be approximated by semigroups, by loops, by quasigroups, by groups?

*Chr. Pauc.*

**Gottschalk, W. H.:** Intersection and closure. *Proc. Amer. math. Soc.* **4**, 470–473 (1953).

The question of when  $A \cap B$  equals  $A \cup B$  for two subsets of a space is treated for uniformisable ( $T_0$ ) spaces. It is shown that this is true if  $A$  and  $B$  are continuously separable, and further that continuous separability of  $A, B$  is also necessary when  $A$  or  $B$  is conditionally compact. Two subsets  $A, B$  of a topological (uniform) space  $X$  are said to be continuously (uniformly) separated if there is a map of  $X$  in the real unit interval taking  $A, B$  respectively into 0 and 1 such that this map is continuous (uniformly continuous) over  $X$ . And two subsets  $A, B$  of the topological (uniform) space  $X$  are continuously (uniformly) separable if, whenever  $U$  is a neighbourhood of  $A \cup B$  such that  $A \cap B$  is continuously (uniformly) separated from  $X - U$ , then  $A - U$  and  $B - U$  are continuously (uniformly) separated. The above result for uniformisable spaces follows from the following: (i) two subsets of a uniformisable space are continuously separable if, and only if, they are uniformly separable relative to some uniformity for the space compatible with its topology; (ii) two subsets  $A, B$  of a uniform space  $X$  are uniformly separable if, and only if, for any vicinity  $\alpha$  of  $X$ , there exists a vicinity  $\beta$  of  $X$  such that  $A \beta \cap B \beta = (A \cap B) \alpha$ ; (iii) two subsets of a dense subset  $Y$  of a uniform space are uniformly separable in  $Y$  if, and only if, they are uniformly separable in  $X$ ; and (iv) in a uniform space two subsets  $A, B$  which are uniformly separable satisfy  $A \cap B = A \cup B$ , and uniform separability is also necessary for the equality if  $A, B$  are subsets of a dense subset of  $X$  and also  $A$  or  $B$  is conditionally compact in  $X$ . Deductions are made regarding the closure of the intersection and intersection of the closures in the Čech-compactification of the uniform space; for instance



normality is shown to be equivalent to the equality of  $A^* \cap B^*$  and  $(A \cap B)^*$ , for any two closed sets  $A, B$  of the space,  $A^*$  denoting the closure in the Čech-compactification. (Note that „vicinity  $\alpha$ “ is used for „entourage  $V_\alpha$  of diagonal“ in the sense of A. Weil).

V. S. Krishnan.

Isbell, J. R.: Homogeneous spaces. Duke math. J. 20, 321—329 (1953).

The relation between various types of homogeneity of topological spaces are first investigated. A space is termed an  $s$ -space provided any two of its points have neighborhood bases which may be put into one-one correspondence so that corresponding terms are homeomorphic; the space is microhomogeneous if any two of its points  $x$  and  $y$  have homeomorphic neighborhoods under a map sending  $x$  to  $y$ . A space is almost homogeneous provided for any two points  $x$  and  $y$  there exists a homeomorphism of the space into itself sending  $x$  to  $y$ ; the space is shrinkable about the point  $x$  provided there exists for each neighborhood  $U$  of  $x$  a homeomorphism of the space into  $U$ , leaving  $x$  fixed; it is shrinkable if it is shrinkable about all of its points. Interesting examples are given of: 1. a plane set which is an  $s$ -space, not almost homogeneous nor microhomogeneous, locally connected at and shrinkable about some but not all of its points; 2. a subset of the Hilbert cube which is shrinkable and almost homogeneous, but is not an  $s$ -space; 3. a locally Euclidean space, made up of uncountably many planes, which is not involutory homogeneous. Further, it is shown that every microhomogeneous connected, linearly ordered space is locally Birkhoff homogeneous; a linearly ordered space is Birkhoff homogeneous if it is order-isomorphic to all its open intervals. — Reviewer's remarks: a) The authors conjecture that a shrinkable connected space is locally connected is false: let  $E$  be a homogeneous non locally connected continuum; according to the authors theorem 2.10, an infinite power of  $E$  is shrinkable, obviously connected but not locally connected. b) Example 3. above is intended to provide the negative answer to a problem of van Dantzig [Fundamenta Math. 15, 102—125 (1930), Probl. 47] the answer is not very satisfactory since the authors locally Euclidean space has no countable base, whereas von Dantzig's manifolds are always assumed simplicial.

T. Ganea.

Bing, R. H.: A connected countable Hausdorff space. Proc. Amer. math. Soc. 4, 474 (1953).

Examples are constructed of connected countable Hausdorff spaces whose points are the rational points in a Euclidean half-plane, resp., in a quadrant of a Euclidean three space, such that these are infinite-dimensional in the Lebesgue sense, but have dimension 1 and 2 respectively in the Menger-Urysohn sense. The same method could be used to get similar spaces of any finite dimension in the Menger-Urysohn sense. A correction that seems necessary in line 14 is to replace „neighbourhoods“ by „Open sets covering the space“.

V. S. Krishnan.

Yoneda, Nobuo: On the mappings of complexes. J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I 6, 393—419 (1953).

L'A. donne: 1° Une définition de l'isotopie combinatoire de deux sous-complexes d'un complexe au moyen de déformations locales dans l'étoile d'un simplexe; il montre alors que deux applications simpliciales homotopes peuvent être déformées l'une dans l'autre par un produit de telles déformations. 2° Si  $f: K \rightarrow K'$  est une application simpliciale d'un complexe  $K$  de dimension  $m$  dans le complexe  $K'$  de dimension  $n$ , on appelle singularité de  $f$  sur un simplexe  $T^q$  de dimension  $q$  de  $K'$  l'excès sur  $q$  de la dimension du complexe image réciproque  $f^{-1}(T^q)$ ; de même, la „singularité“ de  $f$  sur un sous-complexe  $A$  de  $K'$  est  $\text{Sup}$  des singularités de  $f$  sur les simplexes de  $A$ . L'A. montre alors que si  $K'$  est un complexe qui a les propriétés d'homotopie locale d'une variété de dimension  $n$ , toute application  $f: K \rightarrow K'$  peut être approchée à  $\varepsilon$  près par une application simpliciale  $f'$  pour laquelle la „singularité“ est égale à  $\text{Sup}(m - n, 0)$ . Application en est donnée à la théorie du degré, notamment à la théorie du degré tordu de l'application canonique de  $S^2$  sur le plan projectif réel  $P_2(R)$ .

R. Thom.

Samelson, Hans: A connection between the Whitehead and the Pontryagin product. Amer. J. Math. 75, 744—752 (1953).

Es sei  $X$  ein zusammenhängender, einfach-zusammenhängender Raum ( $\pi_0(X) = \pi_1(X) = 0$ ; 1-zusammenhängend). Es sei  $\Omega(X)$  der Raum der geschlossenen Wege von  $X$ , die einen vorgegebenen Anfangs- und Endpunkt haben. Der Raum  $\Omega(X)$  besitzt eine natürliche Multiplikation: Wenn  $w_1, w_2 \in \Omega(X)$ , dann ist  $w_1 w_2$  der komponierte Weg (erst  $w_1$ , dann  $w_2$ ). Diese Multiplikation erzeugt eine Multiplikation für Homologieklassen  $a, b$  von  $\Omega(X)$ ; wenn  $a \in H_r(\Omega(X))$  und  $b \in H_s(\Omega(X))$ , dann ist  $a * b \in H_{r+s}(\Omega(X))$ , (Pontrjaginsches Produkt). Bekanntlich hat man

einen natürlichen Isomorphismus  $T$  von  $\pi_n(X)$  auf  $\pi_{n-1}(\Omega(X))$  und einen natürlichen Homomorphismus  $h$  von  $\pi_{n-1}(\Omega(X))$  in  $H_{n-1}(\Omega(X))$ . Der Homomorphismus  $h \circ T$  wird mit  $\tau$  bezeichnet. Für die Homotopiegruppen von  $X$  ist das Whitehead-Produkt  $[\cdot, \cdot]$  definiert. Wenn  $\alpha \in \pi_{p+1}(X)$  und  $\beta \in \pi_{q+1}(X)$ , dann ist  $[\alpha, \beta] \in \pi_{p+q+1}(X)$ . Zwischen dem Whiteheadsehen und dem Pontrjaginischen Produkt besteht der folgende Zusammenhang (+): Wenn  $\alpha \in \pi_{p+1}(X)$  und  $\beta \in \pi_{q+1}(X)$ , ( $p, q \geq 1$ ), dann ist  $\tau[\alpha, \beta] = (-1)^p (\tau \alpha * \tau \beta - (-1)^{pq} \tau \beta * \tau \alpha)$ . [Das Vorzeichen  $(-1)^p$  ergibt sich, wenn man die Abbildung  $T$  (mit Vorzeichen) in einer gewissen Weise festlegt.] Verf. gibt am Schluß der Arbeit einige Anmerkungen: 1. Bekanntlich gilt die Vertauschungsregel  $[\alpha, \beta] = (-1)^{p+1-q+1} [\beta, \alpha]$ . Natürlich muß dann auch  $\tau[\alpha, \beta] = (-1)^{p+1-q+1} \tau[\beta, \alpha]$  gelten. Das ergibt sich in der Tat formal aus der rechten Seite von (+). — 2. Wenn  $X$  eine  $n$ -Sphäre  $S^n$  ist und  $\alpha = \beta = i_n \in \pi_n(S^n)$ , ( $i_n$  gehört zur identischen Abbildung), dann ergibt (+):  $\tau[i_n, i_n] = 0$  für ungerades  $n$  und  $\tau[i_n, i_n] = -2\tau i_n * \tau i_n$  für gerades  $n$ . Das entspricht der Tatsache, daß die Hopfische Invariante von  $[i_n, i_n]$  für ungerades  $n$  verschwindet und gleich  $+2$  für gerades  $n$  ist. — 3. Wenn  $\alpha \in \pi_{p+1}(X)$ ,  $\beta \in \pi_{q+1}(X)$  und  $\gamma \in \pi_{r+1}(X)$  ist, dann ergibt sich aus (+), daß das  $\tau$ -Bild von  $[\alpha, \beta, \gamma] = (-1)^{p+1} \tau[\alpha, [\beta, \gamma]] + (-1)^{q+1} \tau[\alpha, \beta, \gamma] + (-1)^{r+1} \tau[\gamma, [\alpha, \beta]]$  verschwindet. Vermutung:  $[\alpha, \beta, \gamma]$  verschwindet selbst. Anm. des Ref.: H. Uehara hat auf dem Baltimore meeting der Amer. Math. Soc. (Dezember 1953) einen Beweis dieser „Jacobischen Identität“  $[\alpha, \beta, \gamma] = 0$  angekündigt. — Verf. gibt für seine Formel (\*) zwei Beweise. Der erste benützt allgemeine Sätze, ergibt jedoch (\*) nur bis auf das Vorzeichen. Der zweite Beweis ist elementar und direkt. Der erste Beweis soll kurz skizziert werden, da einige Dinge vorkommen, die selbständiges Interesse haben: Es sei  $p: E \rightarrow B$  eine Faserabbildung des zusammenhängenden Raumes  $E$  auf  $B$ , die Fasern seien zusammenhängend. Ferner sei  $E'$  eine Teilmenge von  $E$  derart, daß  $p' = p|_{E'}$  eine Faserabbildung von  $E'$  auf  $B' = p'(E')$  ist und daß die Fasern  $p'^{-1}(x)$  wieder zusammenhängend sind. Dann gilt: Es existiert ein natürlicher Homomorphismus  $T_0$  der Homotopiesequenz von  $(B, B')$  in die von  $(E, F)$ , der die Dimension um 1 erniedrigt. Die Abbildung von  $\pi_n(B)$  in  $\pi_{n-1}(F)$  bzw. von  $\pi_n(B')$  in  $\pi_{n-1}(F')$  ist gleich  $(-1)^n \delta \circ p^{-1}$  bzw.  $(-1)^n \delta' \circ p'^{-1}$ . Hier bezeichnet  $p^{-1}$  den natürlichen Isomorphismus von  $\pi_n(B)$  auf  $\pi_n(E, F)$  und  $\delta$  den Randoperator der Homotopiesequenz von  $(E, F)$ . Entsprechend für  $E', F', B'$ . Wenn insbesondere die Räume  $E$  und  $E'$  zusammenziehbar sind, dann bildet  $T_0$  die Homotopiesequenz von  $(B, B')$  eindeutig auf die von  $(F, F')$  ab (mit Erniedrigung der Dimension um 1). Folgerung: Es sei  $X \rightarrow Y$ . Beide Räume seien 1-zusammenhängend. Dann hat man einen Isomorphismus  $T_0$  der Homotopiesequenz von  $(X, Y)$  auf die von  $(\Omega(X), \Omega(Y))$ . — Anwendung dieser Tatsache auf  $X = S^{2p-1} \times S^{2q-1}$ ,  $Y = S^{2p-1} \times S^{2q-1}$  („union“ mit einem gemeinsamen Punkt) zusammen mit Sätzen über die Struktur der Pontrjaginischen Ringe von  $X$  und  $Y$  [vgl. R. Bott und H. Samelson, Commentarii math. Helvet. 27, 320–337 (1953)] ergibt einen Beweis für (+). F. Hirzebruch.

**Spanier, E. H. and J. H. C. Whitehead: A first approximation to homotopy theory.** Proc. nat. Acad. Sci. USA 39, 655–660 (1953).

Die Einhängung (suspension)  $SX$  eines topologischen Raumes  $X$ , in dem ein Punkt  $x_*$  als Basispunkt ausgezeichnet sei, wird folgendermaßen definiert: Es bezeichne  $E^1$  das Intervall  $\{t: 0 \leq t \leq 1\}$ . Der Raum  $SX$  entsteht aus dem cartesischen Produkt  $X \times E^1$ , indem man  $(X \times 1) \cup (X \times -1) \cup (x_* \times E^1)$  auf einen Punkt zusammenzieht. Dieser Punkt von  $SX$  wird ebenfalls mit  $x_*$  bezeichnet. Die  $n$ -fache Einhängung von  $X$  wird mit  $S^n X$  bezeichnet [induktive Definition:  $S^{k+1} X = S(S^k X)$ ]. Nun sei  $Y$  ein topologischer Raum mit dem ausgezeichneten Punkt  $y_*$ . Die Menge der Homotopieklassen  $(x_*, y_*)$  als Basispunkte) von stetigen Abbildungen von  $S^m X$  in  $S^n Y$  kann für  $m \geq 1$  zu einer Gruppe  $\pi((X \rightarrow Y)_n^m)$  gemacht werden (track addition). Die Gruppe  $\pi((X \rightarrow Y)_n^m)$  ist abelsch für  $m \geq 2$ . Anm. des Ref.: Die track addition wird in der vorliegenden Arbeit nicht definiert. Die Verf. verweisen auf eine demnächst in Proc. London Math. Soc. erscheinende Arbeit von M. G. Barrat. Offenbar erfolgt die Definition der track addition in Analogie zur Definition der üblichen Homotopiegruppen. Man hat einen natürlichen Homomorphismus von  $\pi((X \rightarrow Y)_n^m)$  in  $\pi((X \rightarrow Y)_{n-1}^{m-1})$ . Deshalb kann man den direkten Limes  $\pi_*(X \rightarrow Y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi((X \rightarrow Y)_n^m)$  bilden.  $\pi_*(X \rightarrow Y)$  ist eine abelsche Gruppe, deren Elemente  $S$ -Abbildungen von  $X$  in  $Y$  genannt werden. Jede Abbildung  $f$  von  $X$  in  $Y$  bestimmt eine  $S$ -Abbildung  $\{f\}$  von  $X$  in  $Y$ . Wenn  $\tilde{f}$  eine  $S$ -Abbildung von  $X$  in  $Y$  und  $\tilde{g}$  eine  $S$ -Abbildung von  $Y$  und  $Z$  ist ( $Z$ : topologischer Raum mit ausgezeichnetem Punkt  $z_*$ ), dann ist in natürlicher Weise eine  $S$ -Abbildung  $\tilde{g} \circ \tilde{f}$  von  $X$  in  $Z$  definiert. Nun kann man  $S$ -Erweiterungs- und  $S$ -Deformationsprobleme im Sinne des folgenden Beispiels betrachten:  $A$  sei in  $X$  eingebettet, die Einbettungsabbildung werde  $i$  genannt ( $x_* \in A \subset X$ ). Gegeben ist eine Abbildung  $f$  von  $A$  in  $Y$  mit  $f(x_*) = y_*$ . Kann man eine  $S$ -Abbildung  $\tilde{g}$  von  $X$  in  $Y$  finden derart, daß  $\tilde{g} \circ i = f$ ? =  $S$ -Probleme sind im allgemeinen leichter zu lösen als Probleme, die gewöhnliche Abbildungen betreffen. Mit Hilfe der Freudenthalschen Einhängungssätze gelang es die Verf. zu einem Satz, der im wesentlichen besagt, daß innerhalb der „suspension range“ die



natürliche Abbildung von  $\pi(X \rightarrow Y)$  in  $\pi_s(X \rightarrow Y)$  eineindeutig auf ist. Mit  $\pi(X \rightarrow Y)$  wird dabei die Menge der Homotopieklassen (mit  $x_*, y_*$  als Basispunkten) von stetigen Abbildungen von  $X$  in  $Y$  verstanden. (In the case of mappings of a space  $X$  into an  $(n-1)$ -connected space  $Y$  the suspension range for  $\dim X$  is  $\dim X \geq 2n-2$ ). Innerhalb der suspension range sind die gewöhnlichen „Probleme“ mit den entsprechenden  $S$ -Problemen äquivalent. — Die gesamten Überlegungen der Verf. werden allgemeiner durchgeführt als hier im Referat beschrieben wurde. Die relative Homotopietheorie wird nämlich mit Hilfe von „carriers“ berücksichtigt. (Es werden nur Abbildungen und Homotopien zugelassen, die mit einem gewissen „carrier“  $\Phi$  verträglich sind.  $\Phi$  ist eine Abbildung einer Familie von  $x_*$  enthaltenden Teilmengen von  $X$  in eine Familie von  $y_*$  enthaltenden Teilmengen von  $Y$ , die die Inklusionsbeziehung erhält.) Insbesondere betrachten die Verf. eine gewisse exakte Sequenz, die der exakten Sequenz der üblichen relativen Homotopietheorie entspricht. — Einzelheiten der Beweise sollen in einer späteren Arbeit erscheinen.

F. Hürzebruch.

**Wu, Wen-tsun: On squares in Grassmann manifolds.** J. Chinese math. Soc.

2. 205—229 und englische Zusammenfassg. 230 (1953) [Chinesisch].

This paper gives detailed proofs of results announced previously (this Zbl. 35, 249). We determine completely the squares in grassmannian manifolds. As a consequence we prove that for an  $(m-1)$ -sphere bundle the mod 2 Stiefel-Whitney classes are all determined, with the aid of cup products and squares, by those of dimensions a power of 2.

Autoreferat.

**James, I. M.: Note on factor spaces.** J. London math. Soc. 28, 278—285

(1953).

Die Stiefelsche Mannigfaltigkeit  $V_{n,r}$  kann als Faktorraum  $O(n)/O(n-r)$  definiert werden, wo  $O(n)$  die orthogonale Gruppe bezeichnet. Die Grassmannsche Mannigfaltigkeit  $M_{n,r}$  kann als Faktorraum  $O(n)/O(n-r) \times O(r)$  definiert werden. Für  $i \geq 2$  erhält Verf. die Formeln

$$\pi_i(M_{n,r}) \simeq \pi_i(V_{n,r}) + \pi_{i-1}(O(r)) \quad \text{für } 2r \leq n \text{ oder äquivalent}$$

$$\pi_i(M_{n,r}) \simeq \pi_i(V_{n,n-r}) + \pi_{i-1}(O(n-r)) \quad \text{für } 2r \geq n.$$

(Beweis: Für  $2r \leq n$  ist  $O(r)$  in  $V_{n,r}$  auf einen Punkt zusammenziehbar.) Diese Formeln werden folgendermaßen verallgemeinert: Es sei  $H$  das direkte Produkt der orthogonalen Gruppen

$O(r_i)$ , (wo  $r = r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_j$  und  $\sum_{i=1}^j r_i \leq n$ ), und es werde  $H$  in natürlicher Weise als

Untergruppe von  $O(n)$  aufgefaßt. Man schreibe  $H = O(r) \times L$ . Dann hat man für  $i \geq 2$  die Gleichungen  $\pi_i(O(n)/H) \simeq \pi_i(V_{n,n-r}) + \pi_{i-1}(L)$ . Daher sind die Homotopiegruppen der Faktorräume  $O(n)/H$  bekannt, wenn man diejenigen der Stiefelschen Mannigfaltigkeiten kennt. — Schließlich untersucht Verf. die Frage, wann ein Feld von  $r$ -dimensionalen Ebenenelementen auf der Sphäre  $S^n$  durch ein  $r$ -Feld von Vektoren aufgespannt werden kann. Verf. bemerkt, daß nach Steenrod im Falle  $2r \leq n$  die Sphäre  $S^n$  dann und nur dann ein Feld von  $r$ -Ebenen zuläßt, wenn sie ein  $r$ -Feld von Vektoren zuläßt. Es gibt in diesem Falle jedoch im allgemeinen Felder von  $r$ -Ebenen, die nicht durch ein  $r$ -Feld von Vektoren aufgespannt werden können. Dies kommt (unter der Annahme, daß  $2r \leq n$  und daß  $S^n$  wenigstens ein  $r$ -Feld zuläßt) dann und nur dann vor, wenn  $\pi_{n-1}(O(r)) \neq 0$ . Da  $\pi_3(O(3)) = \pi_3(S^3) \neq 0$ , gibt es auf  $S^7$  ein Feld von 3-dimensionalen Ebenen, das nicht durch ein 3-Feld von Vektoren aufgespannt werden kann. — Verf. verweist wiederholt auf Steenrods Buch (The topology of fibre bundles, Princeton 1951).

F. Hürzebruch.

**Hopf, H.: Vom Bolzanoschen Nullstellensatz zur algebraischen Homotopietheorie der Sphären.** J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. 56, 59—76 (1953).

In diesem auf der Tagung der Deutsch. Math.-Verein. in Berlin im September 1951 gehaltenen Vortrag berichtet Verf. über die Entwicklung des Problems der Bestimmung der Homotopiegruppen  $\pi(m, n) = \pi_m(S^n)$ . (Der Bericht ist nachträglich bis 1952 ergänzt worden.) Der Vortrag ist so abgefaßt, daß er insbesondere für den Nicht-Topologen ein sehr interessantes und spannendes Bild dieses wichtigen Problems gibt. Verf. sagt: Der Ausgangspunkt ist der alte Satz von Bolzano: „Auf einer Strecke  $E$  habe man eine stetige reelle Funktion  $f$ , deren Werte in den Endpunkten  $a$  und  $b$  von  $E$  entgegengesetzte Vorzeichen haben; dann besitzt  $f$  in  $E$  eine Nullstelle“. Der Satz von Bolzano führt zu der folgenden allgemeinen Fragestellung: (I) Auf der Sphäre  $S^m$  [= Rand der  $(m+1)$ -dimensionalen Vollkugel  $E$ ] sei ein stetiges Funktionensystem  $(f_0, \dots, f_n)$  ohne gemeinsame Nullstellen gegeben ( $m \geq n$ ); wie kann man entscheiden, ob diese Randwerte wesentlich sind, d. h. ob jedes in ganz  $E$  stetige Funktionensystem, das diese Randwerte hat, in  $E$  eine gemeinsame Nullstelle besitzt? (Bolzano:  $m = n = 0$ ). Das Problem (I) führt zu der Frage (II): Für welche  $m$  und  $n$  existieren Randwertssysteme  $(f_0, \dots, f_n)$  auf der Sphäre  $S^m$ , welche wesentlich sind? Die Probleme (I), (II) können zu (I'), (II') verfeinert werden: (I') Zwei Abbildungen  $F$  und  $G$  von  $S^m$  in  $S^n$  seien gegeben; wie kann man entscheiden, ob sie einander homotop sind? (II') Wie groß ist die Anzahl  $A(m, n)$  der Homotopieklassen von Abbildungen von  $S^m$  in  $S^n$ ? — Verf. bespricht nun die Teilantworten auf (I'), (II'), die bis zur Einführung der Homotopiegruppen durch Hurewicz (dies. Zbl. 10, 378; 11, 371;

13, 229; 13, 283) im Jahre 1935 bekannt waren:  $m = n$  (Kroneckersche Charakteristik, Brouwerscher Abbildungsgrad);  $m \cdot n = 1$  ( $A(m, 1) = 1$ );  $m = 4k - 1$ ,  $n = 2k$  [Hopfsche 7-Invariante,  $A(4k - 1, 2k) = \infty$ , dies. Zbl. 1, 407; 12, 319]. — Nach der Einführung der Homotopiegruppen können gruppentheoretische Begriffe verwendet werden. Man hat das Problem (II\*): Man bestimme die Struktur der Gruppe  $\pi(m, n)$ . Die ersten Teilergebnisse waren:  $\pi(n, n) = \mathbb{Z}$ ;  $\pi(3, 2) = \mathbb{Z}$ ;  $\pi(m, 3) = \pi(m, 2)$  für  $m \geq 3$  (Hurewicz, loc. cit.);  $\pi(4k - 1, 2k)$  enthält eine Untergruppe  $\mathbb{Z}$ . Freudenthal (dies. Zbl. 18, 177) bewies 1937 seine Einhängungssätze, aus denen folgt, daß  $\pi(n + d, n) = \pi(2d + 2, d + 2) = \pi'(d)$  für  $n \geq d + 2$ . Danach kann (II\*) in zwei Teilprobleme zerlegt werden: (II\*<sub>1</sub>) Man bestimme die Struktur der Gruppe  $\pi'(d)$ . Das Problem (II\*<sub>2</sub>) besagt: Man bestimme die Struktur der  $d + 1$  Gruppen  $\pi(n + d, n)$  für  $d \geq 0$  und  $3 \leq n \leq d + 1$ . Verf. bespricht die Fortschritte, die von Freudenthal (loc. cit.), Pontrjagin und G. Whitehead (dies. Zbl. 35, 111; 37, 397), Blakers und Massey (dies. Zbl. 40, 258; 42, 173; 46, 406), Hilton (dies. Zbl. 45, 120), Eckmann (dies. Zbl. 26, 93), G. Whitehead (dies. Zbl. 41, 519) erzielt wurden. — Ein neuer Abschnitt in der Entwicklung des Problems (II\*) wurde durch die Arbeiten von H. Cartan und J. P. Serre eingeleitet [Cartan-Serre, dies. Zbl. 48, 413, C. r. Acad. Sci., Paris 234, 393–395 (1952); Serre, dies. Zbl. 42, 174; 45, 260; 46, 107; 48, 414; 50, 175], die das Problem (II\*) einer Algebraisierung recht nahe brachten. Insbesondere werden die folgenden Sätze von Serre hervorgehoben: A. Alle Gruppen  $\pi(m, n)$  sind endlich, mit der Ausnahme von  $\pi(n, n) = \mathbb{Z}$  und der Gruppen  $\pi(4k - 1, 2k)$ , die die direkte Summe einer unendlich zyklischen Gruppe und einer endlichen Gruppe sind. B. Wenn  $p$  eine Primzahl und  $n \geq 2$ , dann ist  $\pi(n + 2p - 3, n) = 0$ . Schließlich bemerkt Verf., daß die alten Ergebnisse die Vermutung zuließen, daß  $\pi(m, n) = 0$  für  $m \geq n + 1$ . Diese Vermutung wird widerlegt durch die Ergebnisse von Serre, nach denen  $\pi(4) = \pi(5) = 0$ . „Unsere alte Frage (II) hat jedenfalls noch an Aktualität gewonnen, und man wird es verstehen, warum ich am Anfang gesagt habe, daß der heutige Zustand unseres Problems merkwürdig und spannend sei.“

F. Hirzebruch.

Kirchhoff, A.: Beiträge zur topologischen linearen Algebra. Compositio math. 11, 1–36 (1953).

Die Arbeit zerfällt in drei Teile. I. Die linearen Selbstabbildungen orientierter Vektorräume. II. Die Topologie der einseitigen Abbildungen. III. Anwendungen auf differenzierbare Mannigfaltigkeiten. In I. wird der  $n$ -dimensionale Vektorraum  $R^n$  über den reellen Zahlen  $R$  betrachtet.  $\mathcal{A}$  sei die Gruppe der linearen Automorphismen von  $R^n$ , deren Determinante positiv ist.  $R^n$  werde mit einer Orientierung versehen.  $\mathcal{A}$  ist also die Automorphismengruppe des orientierten Vektorraumes  $R^n$ . Zwei lineare Selbstabbildungen  $A, B$  von  $R^n$  in sich (im folgenden kurz Abbildungen genannt) heißen positiv ähnlich, wenn es eine Abbildung  $T \in \mathcal{A}$  mit  $A = TBT^{-1}$  gibt. Die Abbildungen zerfallen in Klassen positiv ähnlicher. Jede Ähnlichkeitsklasse im üblichen Sinne zerfällt in eine oder zwei Klassen positiv ähnlicher Abbildungen. Im ersten Falle heißen die Abbildungen zweiseitig, im zweiten Falle einseitig. Eine Abbildung ist genau dann einseitig, wenn sie mit keiner Abbildung negativer Determinante vertauschbar ist. Daher ist die Determinante einer einseitigen Abbildung stets  $\geq 0$ . Einseitige Abbildungen gibt es nur in Räumen gerader Dimension. Allgemeiner: Wenn es in  $R^n$  zwei zueinander komplementäre Fixräume der einseitigen Abbildung  $A$  gibt, dann sind die Dimensionen dieser Fixräume gerade. Jede einseitige Abbildung  $A$  bestimmt in folgender Weise eine Orientierung des  $R^n$ : Nach bekannten Sätzen ist  $R^n$  die direkte Summe von Fixräumen  $F_i$  von  $A$  derart, daß es in jedem ( $r_i$ -dimensionalen) Fixraum  $F_i$  einen Vektor  $e_i$  gibt mit der Eigenschaft, daß  $e_i, Ae_i, \dots, A^{r_i-1}e_i$  eine Basis des Fixraumes  $F_i$  ist. Da  $A$  einseitig ist, sind alle  $r_i$  gerade. Die durch die Reihenfolge  $e_1, Ae_1, \dots, A^{r_1-1}e_1$  gegebenen Orientierungen der Fixräume erzeugen in eindeutiger Weise eine Orientierung des  $R^n$ , da alle Fixräume von gerader Dimension sind. Verf. zeigt, daß diese Orientierung nicht von der Wahl des Fixraumsystems und der Vektoren  $e_i$  abhängt. Damit hat man die durch  $A$  bestimmte Orientierung von  $R^n$ . — Zwei ähnliche einseitige Abbildungen sind genau dann positiv ähnlich, wenn sie dieselbe Orientierung des  $R^n$  bestimmen. Nun beweist Verf. die Umkehrung eines oben erwähnten Satzes: Jede Abbildung, die keine komplementären Fixräume ungerader Dimension besitzt, ist einseitig. (Hier wird zum erstenmal von der reellen Abgeschlossenheit des Grundkörpers  $R$  Gebrauch gemacht.) Eine Abbildung ist also genau dann einseitig, wenn alle ihre (reellen) Elementarteiler Polynome geraden Grades sind. — Eine Abbildung des  $R^n$  in sich, die keinen reellen Eigenvektor hat, heißt  $I$ -Abbildung (vgl. H. Hopf, dies. Zbl. 33, 25). Die  $I$ -Abbildungen lassen sich auch dadurch charakterisieren, daß sie keine ungerade dimensional Fixräume haben. Die  $I$ -Abbildungen sind also spezielle einseitige Abbildungen. Unter einer speziellen  $I$ -Abbildung wird eine  $I$ -Abbildung verstanden, die die zusätzliche Eigenschaft  $I^2 = -E$  hat, wo  $E$  die identische Abbildung bezeichnet. Je zwei solche  $I$ -Abbildungen sind einander ähnlich. Die speziellen  $I$ -Abbildungen entsprechen eindeutig den linearen komplexen Strukturen, die man auf dem Vektorraum  $R^n$  ( $n = 2m$ ) einführen kann. Verf. definiert eine Funktion  $q_n$ , die jeder  $I$ -Abbildung eine spezielle  $I$ -Abbildung zuordnet und die folgende Eigenschaften hat: Für eine spezielle  $I$ -Abbildung  $I$  ist  $q_n(I) = I$ . Die Abbildungen  $I$  und  $q_n(I)$  bestimmen dieselbe Orientierung



des  $R^n$ . Wenn  $I = T I' T^{-1}$  ist, dann gilt  $\varrho_n(I) = T \varrho_n(I') T^{-1}$ . Diese Funktion  $\varrho_n$  wurde auch von G. de Rham definiert. Mit Hilfe der Funktion  $\varrho_n$  kann also jeder beliebigen  $I$ -Abbildung eine komplexe Struktur des  $R^n$  zugeordnet werden. Im letzten Paragraphen des ersten Teils untersucht Verf. die  $I$ -Abbildungen in Vektorräumen  $R^n$ , die mit einer orthogonalen Struktur versehen sind. Eine spezielle  $I$ -Abbildung ist genau dann orthogonal, wenn sie schiefssymmetrisch ist. Stellt man die spezielle  $I$ -Abbildung  $I$  in der eindeutigen bestimmten Weise als Produkt  $GP$  dar, wo  $G$  eine orthogonale Abbildung und  $P$  eine positiv definite symmetrische Abbildung ist, dann ist  $G$  schiefssymmetrisch. Verf. setzt  $\chi_n(I) = G$ . — II. Die Selbstabbildungen von  $R^n$  in sich werden in natürlicher Weise als Punkte eines topologischen Raumes  $\mathfrak{R}$  betrachtet. Die Menge  $\mathfrak{Z}_n$  der  $I$ -Abbildungen ist eine offene Teilmenge von  $\mathfrak{R}$ , die der offene Kern der Menge der einseitigen Abbildungen ist. Eine Klasse positiv ähnlicher Abbildungen ist stets zusammenhängend. Die Ähnlichkeitsklasse einer zweiseitigen Abbildung ist zusammenhängend, die einer einseitigen Abbildung besteht aus zwei Komponenten, nämlich den beiden Klassen positiv ähnlicher Abbildungen. Mit  $\mathfrak{E}p \mathfrak{Z}_n$  werde die Menge der speziellen  $I$ -Abbildungen bezeichnet.  $\mathfrak{E}p \mathfrak{Z}_n$  ist eine Ähnlichkeitsklasse von einseitigen Abbildungen, besteht somit aus zwei Komponenten  $\mathfrak{E}p \mathfrak{Z}_n^+$  und  $\mathfrak{E}p \mathfrak{Z}_n^-$ . Auch  $\mathfrak{Z}_n$  besteht aus zwei Komponenten  $\mathfrak{Z}_n^+$ ,  $\mathfrak{Z}_n^-$ . Die Abbildung  $\varrho_n$  bildet  $\mathfrak{Z}_n^+$  stetig auf  $\mathfrak{E}p \mathfrak{Z}_n^+$  und  $\mathfrak{Z}_n^-$  auf  $\mathfrak{E}p \mathfrak{Z}_n^-$  ab, und zwar so, daß  $\mathfrak{E}p \mathfrak{Z}_n^+$  (bzw.  $\mathfrak{E}p \mathfrak{Z}_n^-$ ) durch  $\varrho_n$  Deformationsretrakt von  $\mathfrak{Z}_n^+$  (bzw.  $\mathfrak{Z}_n^-$ ) wird. Auch die Menge der einseitigen Abbildungen wird durch die Orientierung in zwei fremde Teilmengen zerlegt. Dies ist aber für  $n \geq 4$  keine Komponentenzerlegung. Die Menge der einseitigen Abbildungen ist nämlich für  $n \geq 4$  zusammenhängend. Nach Einführung einer orthogonalen Struktur in  $R^n$  kann man in  $\mathfrak{Z}_n^+$  die Teilmenge  $\mathfrak{O} \mathfrak{E}p \mathfrak{Z}_n^+$  der orthogonalen speziellen  $I$ -Abbildungen betrachten. Die Funktion  $\chi_n$  ist stetig. Unter  $\chi_n$  wird  $\mathfrak{O} \mathfrak{E}p \mathfrak{Z}_n^+$  Deformationsretrakt von  $\mathfrak{E}p \mathfrak{Z}_n^+$ . Die Homotopieeigenschaften von  $\mathfrak{Z}_n^+$  sind also mit denen von  $\mathfrak{O} \mathfrak{E}p \mathfrak{Z}_n^+$  äquivalent.  $\mathfrak{O} \mathfrak{E}p \mathfrak{Z}_n^+$  ist eine  $n(n-2)/4$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, die in natürlicher Weise mit dem homogenen Raum  $SO(n)/U(m)$  ( $n = 2m$ ) homöomorph ist [vgl. Ehresmann, dies. Zbl. 39, 397, Steenrod, The topology of fibre bundles, Princeton 1951, und A. Borel, Ann. of Math., II. Ser. 57, 115—207 (1953)]. — III. Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit heißt  $I$ -Mannigfaltigkeit, wenn es ein stetiges Feld von  $I$ -Abbildungen  $I_p$  gibt. ( $I_p$  hängt stetig von  $p$  ab und ist eine  $I$ -Abbildung des Tangentialraumes von  $p$ .) Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit heißt fastkomplex, wenn es ein stetiges Feld von speziellen  $I$ -Abbildungen gibt. Aus den I. und II. angegebenen Eigenschaften der Abbildung  $\varrho_n$  folgt, daß eine differenzierbare Mannigfaltigkeit genau dann eine  $I$ -Mannigfaltigkeit ist, wenn sie fastkomplex ist. Verf. bespricht schließlich seinen bekannten Satz: Wenn die Sphäre  $S^n$  fastkomplex ist, dann ist die Sphäre  $S^{n+1}$  parallelisierbar (vgl. Kirchhoff, dies. Zbl. 30, 273 und Eckmann, dies. Zbl. 42, 416). Mit Hilfe anderer Methoden kann bewiesen werden, daß nur die Sphären  $S^2$  und  $S^6$  fastkomplex sind. (A. Borel und J. P. Serre, dies. Zbl. 50, 396).

F. Hirzebruch.

### Chern, Shiing-shen: On the characteristic classes of complex sphere bundles and algebraic varieties. Amer. J. Math. 75, 565—597 (1953).

Es sei  $E$  ein Bündel über dem Basisraum  $X$  mit dem komplexen Vektorraum  $C_q$  als Faser und der linearen Gruppe  $GL(q, C)$  als Strukturgruppe. Die Chernschen Klassen dieses Bündels werden mit  $c_i(E)$  bezeichnet [ $c_i \in H^{2i}(X, Z)$ ,  $c_0 = 1$ ]. Verf. geht von der Definition der  $c_i$  als Hindernisse aus, betrachtet das bekannte Universalbündel für  $GL(q, C)$ , das eine komplexe Grassmannsche Mannigfaltigkeit als Basis hat, bestimmt die Chernschen Klassen des Universalbündels und beweist mit Hilfe bekannter Eigenschaften des Cohomologie-Ringes der Grassmannschen Mannigfaltigkeit (formuliert mit Schubertsymbolen) das sogenannte Dualitäts-Theorem für die Chernschen Klassen: Es seien  $E, E'$  zwei Bündel über demselben Basisraum  $X$  mit  $C_q$  bzw.  $C_{q'}$  als Faser und  $GL(q, C)$  bzw.  $GL(q', C)$  als Strukturgruppe. Dann ist in natürlicher Weise das Produktbündel  $E \boxtimes E'$  definiert, das  $C_{q+q'}$  als Faser und  $GL(q+q', C)$  als Strukturgruppe

hat. Man führt mit Hilfe einer Unbestimmten  $x$  das Chernsche Polynom  $c = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$  ein.

Dann gilt die Formel:  $c(E \boxtimes E') = c(E) \cdot c(E')$ . — Verf. führt auch noch die Cohomologie-

klassen  $c_i \in H^{2i}(X, Z)$  und das entsprechende Polynom  $c = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$  ein. Die Klassen  $c_i$

werden mit Hilfe der Gleichung  $c \cdot c = 1$  definiert. Natürlich gilt das Dualitätstheorem auch für die  $c_i^*$ , d. h. es gilt:  $c(E \boxtimes E') = c(E) \cdot c(E')$ . — [Anm. des Ref.: Aus einer kürzlich erschienenen Arbeit von A. Borel und J. P. Serre (dies. Zbl. 50, 396) ergibt sich, daß die Chernschen Klassen durch drei Eigenschaften axiomatisch charakterisiert werden können. 1. Invarianz bei Abbildungen (d. h., wenn durch  $f: X \rightarrow X'$  aus dem Bündel  $E$  über  $X$  ein Bündel  $E'$  über  $X'$  induziert wird, dann ist  $c(E') = f^*(c(E))$ .] 2. Dualitäts-Theorem. 3. Normierung: Für ein Bündel mit  $C_1$  als Faser und  $C^* = GL(1, C)$  als Strukturgruppe ist  $c_0 = 1$ ,  $c_1$  ist die Hindernis-Klasse (definiert mit einem wohlbestimmten Vorzeichen!), und es ist  $c_i = 0$  für  $i > 1$ . — Nach Borel und Serre (loc. cit.) kann man die Chernschen Klassen direkt als „elementar-symmetrische Funktionen“ definieren. Bei Verwendung dieser Definition sind die Eigen-

schaften 1., 2., 3. sofort einzusehen. Aus dem Dualitäts-Theorem für die Chernschen Klassen im Sinne der Hindernis-Definition ergibt sich, daß diese Definition mit der Definition von Borel-Serre übereinstimmt. In der Literatur treten wiederholt Vorzeichen-Schwierigkeiten bezüglich der Chernschen Klassen auf. Wegen der oben erwähnten axiomatischen Charakterisierung hat man sich nur über das Vorzeichen von  $c_1$  zu einigen. Die meist benutzte Vorzeichenwahl wird wohl durch „ $c_1$  = Hindernis“ gegeben. Ändert man 3. in 3\* ab, indem man verlangt, daß  $c_1^* = -$  Hindernis, dann werden durch die Axiome 1., 2., 3\*, die „kovarianten“ Chernschen Klassen  $c_i^*$  definiert. Es gilt:  $c_i^* = (-1)^i c_i$ . — Einen Beweis des Dualitäts-Theorems findet man auch bei Wu Wen-tsun (Wu, W.-t. et G. Reeb, Sur les espaces fibres et les varietes feuilletées, Paris 1952)]. Verf. entwickelt die folgende Aufspaltungs-Methode, die man auch „Adjunktion der Wurzeln des Chernschen Polynoms“ nennen könnte und die in engem Zusammenhang mit der oben erwähnten Definition der Chernschen Klassen als elementar-symmetrische Funktionen steht: Es sei  $C_r$  der komplexe Vektorraum (Koordinaten  $z_1, \dots, z_n$ ). Es bezeichne  $H(n, r)$  die Untergruppe derjenigen Elemente von  $GL(n, C)$ , die alle  $L_{(i)}$  der  $r$ -Fahne  $\{L_{(0)}, L_{(1)}, \dots, L_{(r)}\}$  als ganzes invariant lassen. Hierbei ist  $L_{(i)}$  der  $i$ -dimensionale lineare Teilraum  $\{z_{i+1} = z_{i+2} = \dots = z_n = 0\}$  von  $C_r$ . Es sei  $K(n, r)$  der Normalteiler von  $H(n, r)$ , der genau diejenigen Elemente von  $H(n, r)$  enthält, die alle Quotienten  $L_{(i)}/L_{(i-1)}$  punktweise invariant lassen ( $i = 1, \dots, r$ ). Nun sei  $E$  ein Bündel über der Basis  $M$  mit  $C_r$  als Faser und  $GL(n, C)$  als Strukturgruppe. Verf. betrachtet das assoziierte Bündel  $B_{n,r}$  über  $M$ , das den Quotientenraum  $GL(n, C)/H(n, r)$  (Links-Restklassen) als Faser hat. (Die Faser ist der Raum aller  $r$ -Fahnen im Ursprung des Vektorraumes  $C_r$ .) Ferner wird das assoziierte Bündel  $\tilde{B}_{n,r}$  mit  $GL(n, C)/K(n, r)$  als Faser betrachtet.  $\tilde{B}_{n,r}$  ist ein „principal“ Bündel über  $B_{n,r}$  mit  $H(n, r)/K(n, r)$  als Faser und Strukturgruppe. Diese Gruppe ist das direkte Produkt von  $r$  Gruppen  $C^* = GL(1, C)$ , die den oben erwähnten Quotienten  $L_i/L_{i-1}$  entsprechen ( $i = 1, \dots, r$ ). Man erhält demnach  $r$  principal Bündel  $U_i$  mit  $C^*$  als Strukturgruppe. Die Hindernis-Cohomologieklassen dieser Bündel sollen der Reihe nach mit  $u_i$  bezeichnet werden [ $u_i = H^2(B_{n,r}, Z)$ ]. Man hat eine natürliche Faserabbildung von  $B_{n,r+1}$  auf  $B_{n,r}$ . Die Faser ist der komplex-projektive Raum  $P_{n-r-1}$ . Daher hat man das Diagramm:  $B_{n,r+1} \rightarrow B_{n,r} \rightarrow \dots \rightarrow B_{n,2} \rightarrow B_{n,1} \rightarrow B_{n,0} = M$ . Die Abbildung von  $B_{n,r}$  auf  $M$  werde mit  $q_{n,r}$  bezeichnet. Der natürliche Homomorphismus bildet den Cohomologie-Ring  $H^*(B_{n,r}, Z)$  isomorph in  $H^*(B_{n,r+1}, Z)$  ab. Wir identifizieren hier im Referat der Kürze halber den Ring  $H^*(B_{n,r}, Z)$  mit seinem isomorphen Bild in  $H^*(B_{n,r+1}, Z)$  und erhalten demnach eine Folge von Inklusionen:  $H^*(M, Z) = H^*(B_{n,0}, Z) \subset H^*(B_{n,1}, Z) \subset \dots \subset H^*(B_{n,r-1}, Z) \subset H^*(B_{n,r}, Z)$ . Der allumfassende Ring  $H^*(B_{n,r}, Z)$  entsteht aus  $H^*(M, Z)$ , indem man zweidimensionale Cohomologieklassen  $u_1, u_2, \dots, u_r$  adjungiert und sie der einzigen Relation  $(1 + c_1 x + \dots + c_n x^n) = (1 + u_1 x)(1 + u_2 x) \dots (1 + u_r x)$  unterwirft ( $x$  ist eine Unbestimmte). Diese Relation erhält man unmittelbar aus dem Dualitäts-Theorem. Der Ring  $H^*(B_{n,r}, Z)$  ist der von  $H^*(M, Z)$  und  $u_1, u_2, \dots, u_r$  erzeugte Unterring von  $H^*(B_{n,r}, Z)$ . Aus (\*) folgt die Formel von Hirsch  $u_i^n = c_1 u_i^{n-1} + \dots + (-1)^n c_n = 0$ , die man auch zur Definition der Chernschen Klassen verwenden könnte. — Nun werde speziell angenommen, daß  $M$  eine kompakte orientierte Mannigfaltigkeit ist, die  $B_{n,r}$  sind dann ebenfalls Mannigfaltigkeiten, und zwar in bestimmter Weise orientiert. Unter  $\theta$  werde der Übergang von Homologieklassen zu dualen Cohomologieklassen verstanden. Verf. betrachtet den Homomorphismus  $\varphi_{n,r} = \theta(q_{n,r}), \theta^{-1}$  der Cohomologiegruppen von  $B_{n,r}$  in die von  $M$  und erhält die Gleichung:

$$(**) \quad \varphi_{n,r}(u_1^{n-2} \dots u_{r-1}^{n-r} u_r^{2n-r}) = (-1)^n c_{n-r+1}.$$

Die Formel (\*\*) wird vom Verf. ganz allgemein für ein Bündel  $E$  mit beliebigem Basisraum  $M$  bewiesen. Der Homomorphismus  $\varphi_{n,r}$  muß dann anders definiert werden („integration over the fibers“). Nun werde angenommen, daß  $M$  eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit ist und daß  $E$  das Tangential-Bündel von  $M$  ist. Wendet man auf  $E$  die gerade beschriebene Aufspaltungsmethode an, dann sind alle auftretenden Bündel komplex-analytisch, die Mannigfaltigkeiten  $B_{n,r}$  sind komplexe Mannigfaltigkeiten. Insbesondere sind die Cohomologie-Klassen  $u_i$  die Hindernis-Klassen gewisser komplex-analytischer  $C^*$ -Bündel  $U_i$ . Falls  $M$  sogar eine (Singularitätenfreie) algebraische Mannigfaltigkeit ist, dann ist auch  $B_{n,r}$  algebraisch, die  $U_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) lassen sich durch Divisoren von  $B_{n,r}$  repräsentieren. Die  $u_i$  sind also dual zu gewissen algebraischen Zyklen von  $B_{n,r}$ . Aus (\*\*) folgt dann, daß die  $c_i$  zu gewissen algebraischen Zyklen von  $M$  dual sind. Daraus ergibt sich schließlich: Die Chernschen Klassen  $c_i$  einer algebraischen Mannigfaltigkeit  $M$  sind dual zu gewissen algebraischen Zyklen von  $M$ . Der letzte Satz ist mit das wesentlichste Ergebnis der vorliegenden Arbeit. Er steht in folgendem Zusammenhang mit den kanonischen Klassen von Eger und Todd [Eger, dies. Zbl. 45, 272; 16, 41; Todd, Proc. London math. Soc., II. Ser. 45, 410—424 (1939)]. Eger und Todd definieren für eine algebraische Mannigfaltigkeit  $M_n$  von  $n$  komplexen Dimensionen für jede komplexe Dimension eine kanonische Klasse, das ist ein gewisser algebraischer Zyklus, der bis auf „lineare Äquivalenz“ eindeutig bestimmt ist. Die Homologieklassen dieser algebraischen Zyklen werden kanonischen Homologieklassen genannt, und die dualen Cohomologieklassen werden mit  $k_i$  bezeichnet ( $k_i = H^{2i}(M_n, Z)$ ). Die kanonische Klasse in der komplexen Dimension



$-1$  ist die Divisorklasse der kanonischen Divisoren. (Der Divisor einer meromorphen  $n$ -Form wird kanonischer Divisor genannt.) Die entsprechende Cohomologieklass ist  $k_1$ , und es ist leicht zu zeigen, daß  $k_1 = -c_1$ . Die kanonische Klasse in der komplexen Dimension 0 ist dual zu  $k_n$ . Es ist  $k_n = (-1)^n c_n$ , und der Wert von  $c_n$  auf der natürlich orientierten Mannigfaltigkeit  $M_n$  ist gleich der Euler-Poincaréschen Charakteristik von  $M_n$ . Hodge (dies. Zbl. 43, 173) hat die Frage behandelt, ob allgemein die Gleichung  $k_i = (-1)^i c_i = c_i^*$  gilt. Er hat diese Frage für spezielle Fälle bejahend beantwortet, z. B. für den Fall, daß  $M_n$  ein vollständiger Durchschnitt von Hyperflächen eines komplex-projektiven Raumes ist. Ein allgemeiner Beweis für die Gleichung  $k_i = c_i^*$  scheint in der Literatur nicht zu existieren. Daher war es bisher offen, ob die Chernschen Klassen durch algebraische Zyklen repräsentiert werden können. Diese Frage hat nun Verf. vollständig gelöst. Aus der Darstellung der Chernschen Klassen durch Differentialformen [Chern, Ann. of Math., II. Ser. 47, 85—121 (1946)] ergibt sich unmittelbar, daß die  $c_i$  den richtigen Typ  $(i, i)$  haben. — Verf. weist auf eine „Lücke“ in seinem Beweis hin. Es scheint in der Literatur bisher kein Beweis für die Tatsache zu existieren, daß die  $B_{n,r}$  einer algebraischen Mannigfaltigkeit selbst algebraische Mannigfaltigkeiten sind. Diese Lücke läßt sich auf Grund neuerer Ergebnisse von Kodaira sofort schließen. Kodaira hat nämlich den Satz bewiesen, daß ein komplex-projektives Bündel über einer algebraischen Mannigfaltigkeit (Faser: projektiver Raum, Gruppe: projektive Transformationen) selbst eine algebraische Mannigfaltigkeit ist. — Die vorliegende Arbeit enthält ferner eine Reihe topologischer Untersuchungen (Leray-Hirsch-Theorem), die insbesondere für die Aufspaltungs-Methode erforderlich sind und die die Lektüre der Arbeit von anderen Arbeiten verhältnismäßig unabhängig machen. *F. Hirzebruch.*

**Hirzebruch, Friedrich:** On Steenrod's reduced powers, the index of inertia and the Todd genus. Proc. nat. Acad. Sci. USA 39, 951—956 (1953).

Soit  $g(z) = \sum a_n z^n$  une série entière. Posons  $\prod_{i=1}^m (1 - \alpha_i z) = \sum_{r=0}^m c_r z^r$ . Alors le produit  $\prod_{j=1}^m g(\lambda_j z)$  est une série entière en  $z$  dont les coefficients  $L_j(c_i)$  sont des polynomes de poids  $j$  en les variables  $c_i$ , indépendants de  $m$  pour  $m > j$ . La suite des polynomes  $L_j(c_i)$  est dite „suite associée“ à la série entière  $g(z)$ . Deux telles suites sont introduites par l'A.: associée à  $g(z) = -z(e^z - 1)^{-1}$  la suite  $T_j(c_i)$  des polynomes de Todd; associée à  $g(z) = \sqrt{z} \cdot (\operatorname{tgh} \sqrt{z})^{-1}$  la suite des polynomes  $L_j(c_i)$ . Soit  $P_p^r$  la puissance de Steenrod qui applique le groupe  $H^{m-2(p-1)r}(V^m; Z_p)$  dans  $H^m(V^m; Z_p)$ ,  $p$  premier impair,  $V^m$  variété différentiable orientée compacte. Si, pour tout  $u \in H^{m-2(p-1)r}(V^m; Z_p)$ , on pose par dualité:  $s_p^r \cdot u = P_p^r u$ , la classe  $s_p^r$  s'exprime en fonction des classes de Pontrjagin  $p_i$  de  $V^m$  par:  $s_p^r = p^r \cdot L_{r(p-1)/2}(p_i) \bmod p$ . Pour  $p = 2$ , les classes  $U^i$  de Wu Wen-tsun, définies de façon analogue, s'expriment en fonction des classes  $W^i$  de Stiefel-Whitney par  $U^i = 2^i T_i(W^j)$ . Si  $m \equiv 0 \bmod 4$ , désignons par  $\tau$  l'excès du nombre des carrés positifs sur celui des carrés négatifs de la forme quadratique définie par le cup-produit sur  $H^{m/2}(V^m; R)$ . Alors  $\tau$  s'exprime en fonction des classes  $p_i$  par  $\tau = L_i(p_j)$ . Les polynomes  $T_j(c_i)$  s'introduisent dans la théorie des variétés presque complexes et complexes; si les  $c_i$  désignent les classes de Chern, ils servent (suivant une conjecture connue) à définir dans le cas algébrique le genre arithmétique de la variété. L'A. donne de nombreuses propriétés arithmétiques (divisibilité) et formelles des nombres caractéristiques associés à ces polynomes  $T_j$ , ainsi qu'au nombre  $T_i(x)$  associé à un diviseur de classe  $x$ . Les résultats de cette Note très dense sont trop nombreux pour être tous cités. *R. Thom.*

**Kodaira, K.:** On cohomology groups of compact analytic varieties with coefficients in some analytic faisceaux. Proc. nat. Acad. Sci. USA 39, 865—868 (1953).

Let  $V$  be a compact complex analytic variety and let  $F$  be an analytic fibre bundle over  $V$  whose fibre is an affine straight line and whose group on the fibre is the multiplicative group of complex numbers. The family of „germs“ of holomorphic  $p$ -forms on  $V$  with coefficients in  $F$  forms a „faisceau“  $\Omega^p(F)$  in a natural topology. This faisceau plays a fundamental role in some recent applications of the faisceau theory to the study of compact complex analytic varieties. The author proves a basic theorem for this faisceau to the effect that the „cohomology group  $H^q(V; \Omega^p(F))$  of  $V$  with coefficients in  $\Omega^p(F)$ “ has a finite dimension for any  $q$ . This can be done by introducing a positive definite Hermitian metric on  $V$  and reducing, by an isomorphism of Dolbeault type, the finiteness of the dimension of the cohomology group to the finite dimensionality of the space of harmonic forms with respect to some elliptic differential operator corresponding to the metric on  $V$ . Therefore the method is not „elementary“ and depends on the theory of general elliptic differential operator on a compact Riemann space. *J. Igusa.*

**Kodaira, K. and D. C. Spencer:** Groups of complex line bundles over compact Kähler varieties. Proc. nat. Acad. Sci. USA 39, 868—872 (1953).

This paper is a nice treatment of the theory of Picard varieties by faisceau theory. The idea of such a treatment is due to J.-P. Serre. Also the fundamental idea to replace a divisor

class by a complex line bundle goes back to A. Weil. Let  $V$  be a compact Kähler variety and let  $F$  be a complex line bundle over  $V$  (cf. the previous review). Using the coordinate transformations of the bundle the authors define a multiplication in the totality  $\mathfrak{F}$  of such  $F$ . If  $c(F)$  is the characteristic class of the associated principal bundle of  $F$ , then  $c$  gives a homomorphism from  $\mathfrak{F}$  onto the 2nd integer cohomology group  $H_{(1,1)}^2(V; \mathbb{Z})$  of type  $(1, 1)$ . The proof depends on a remarkable isomorphism due to Dolbeault. Moreover the harmonic part  $H_c$  of a 1st integer cohomology class  $c$  on  $V$  is a sum of harmonic forms of types  $(1, 0)$  and  $(0, 1)$ . If  $\omega$  is the part of type  $(0, 1)$  multiplied by  $2\pi i$ , then such  $\omega$  form a discrete sub-group of maximal rank in the space of harmonic forms of type  $(0, 1)$ . Therefore the factor space is a complex torus. This complex torus is shown, again by Dolbeault's isomorphism, to be canonically and „analytically“ isomorphic to the kernel  $\mathfrak{P}$  of the homomorphism  $\mathfrak{F} \rightarrow H_{(1,1)}^2(V; \mathbb{Z})$ . The complex torus  $\mathfrak{P}$  is then called the Picard variety of the compact Kähler variety  $V$ . J. Igusa.

**Kodaira, K. and D. C. Spencer:** Divisor class groups on algebraic varieties. Proc. nat. Acad. Sci. USA **39**, 872—877 (1953).

This paper is a treatment of the deeper part of the theory of Picard varieties by faisceau theory. The main theorem is stated simply as the group  $F$  of complex line bundles  $F$  over a compact Kähler variety  $V$  (cf. the previous review) is canonically isomorphic to the group of divisor classes on  $V$  with respect to linear equivalence. Naturally this theorem is not true in general and the authors prove it when  $V$  is a non-singular projective model. The proof is elegant and depends on an important lemma to the effect that the cohomology groups  $H^q(V; \Omega^0(F))$  (cf. the review of Kodaira's paper) vanishes for  $q \geq 1$  when  $F$  is „ample“ in a certain sense. As immediate consequences the authors derive Lefschetz-Hodge's theorem on the characterization of algebraic homology classes and Igusa's duality theorems in the theory of Picard varieties. J. Igusa.

**Kapuno, Isaac:** Sur les courbes dont l'homéomorphie avec une circonférence se prolonge à  $R^3$ . C. r. Acad. Sci., Paris **236**, 1845—1847 (1953).

Es wird folgender Satz bewiesen:  $C$  und  $C'$  seien zwei in einem offenen Gebiet  $D$  homotope Kurven des  $R^3$ . Jede derselben besitze mit einem Kreis eine sich über den ganzen Raum erstreckende Homöomorphie (vom Verf. „absolute Homöomorphie“ genannt). Dann existiert eine homöomorphe Deformation von  $C$  in  $C'$ , bei welcher die Punkte von  $R^3 - D$  invariant sind. E. Schönhardt.

**Plans, Antonio:** Beitrag zum Studium der Homologiegruppen der zu einem Knoten gehörigen verzweigten zyklischen Überlagerungen. Revista Acad. Ci. Madrid **47**, 161—193 (1953) [Spanisch].

Verf. betrachtet die verzweigten zyklischen Überlagerungen der 3-Sphäre, die einen Knoten als Verzweigungslinie besitzen, und erhält für die Homologiegruppen der Dimension 1 folgende Resultate: (1) Für die Überlagerungen ungerader Ordnung ist die Bettische Zahl gerade und die Torsionskoeffizienten bilden Paare gleicher Zahlen. (2) Für Knoten vom Geschlecht 1 sind die Homologiegruppen aller (endlichen) Überlagerungen und das Alexander-Polynom durch die Homologiegruppe der 2-blättrigen Überlagerung bestimmt. (3) Für Knoten vom Geschlecht 1 wiederholen sich die Homologiegruppen der Überlagerungen mit steigender Blätterzahl genau dann, wenn entweder die Homologiegruppen dieselben sind wie für den Kreis (Periode 1) oder dieselben sind wie für die Kleeblattschlinge (Periode 6). Die Resultate sind korrekt, die Beweise zum Teil nicht. Horst Schubert.

**Vaughan, H. E.:** On two theorems of plane topology. Amer. math. Monthly **60**, 462—468 (1953).

Proofs are given for some simple topological theorems used in Knopp, Theory of functions I. New York 1945, for the statement of the general theorems on complex contour integration. No essentially new results are obtained, as the author himself points out; the article is intended as a supplement to the above mentioned book. To the opinion of reviewer the proofs given here could sometimes have been shortened without using other than elementary topological theory. In another case the advance of the present treatment is not clear. A. van Heemert.



Homma, T. and H. Terasaka: On the structure of the plane translation of Brouwer. Osaka math. J. 5, 233—266 (1953).

Gli AA. sviluppano in tutti i dettagli la teoria sulla struttura delle traslazioni piane generalizzate esposta in un loro lavoro precedente (questo Zbl. 50, 178).

G. Scorza Dragoni.

Dirac, G. A.: The colouring of maps. J. London math. Soc. 28, 476—480 (1953).

Im wesentlichen Ergebnisse, die Verf. schon anderwärts gebracht hat (dies. Zbl. 47, 170, 422).

H. Künneht.

Luce, R. Duncan: Networks satisfying minimality conditions. Amer. J. Math. 75, 825—838 (1953).

Ein Netzwerk  $N$  ist ein gerichteter (endlicher, schlingenfreier) Graph, bei dem zwei Punkte höchstens durch zwei Kanten verbunden sind, die dann verschieden gerichtet sein müssen. Bezeichnungen siehe bei König „Theorie der endlichen und unendlichen Graphen“ (New York 1950, dies. Zbl. 40, 103) und bei Luce, dies. Zbl. 46, 169.  $N$  heißt zusammenhängend, wenn es von jedem Punkt zu jedem eine Bahn gibt. Ist  $N$  vom Grad  $k$ , so gibt es von jedem Punkt zu jedem mindestens  $k$  Bahnen, die paarweise keine (gerichtete) Kante gemein haben.  $N$  hat den Grad  $(-k)$  ( $k \geq 0$ ), wenn  $N$  durch Hinzufügen von  $k+1$ , aber nicht weniger, Kanten zusammenhängend gemacht werden kann;  $N$  ist  $(-k)$ -minimal, wenn es durch Hinzufügen irgendeiner zwei Punkte von  $N$  verbindenden Kante den Grad  $(-k+1)$  erhält.  $N$  besteht dann aus  $k+1$  vollständigen, zueinander fremden Graphen, wozu noch ein weiterer vollständiger Graph  $G$  treten kann, dessen Punkte alle mit allen Punkten der übrigen Graphen verbunden sind, wobei die Punkte von  $G$  nur Anfangs- oder nur Schlußpunkte dieser Kanten sind. —  $N$  hat den Index  $i$ , wenn  $N$  durch Streichung von  $i$ , aber nicht weniger, Punkten und den damit inzidenten Kanten zusammenhängend gemacht werden kann. Ist  $m$  die Anzahl der Punkte,  $k$  der Grad und  $d$  der Durchmesser von  $N$ , so ist  $i \leq k \leq (m+i-1)/2$  und für  $d > 2$   $k \leq (m-d+2)/2$ .  $N$  heißt  $h$ -transitiv, wenn es zwischen zwei verschiedenen Punkten in  $N$  wenigstens eine Bahn mit  $h$  Kanten ( $h$ -Bahn) gibt und für jede  $q$ -Bahn zwischen zwei verschiedenen Punkten  $a$  und  $b$  gilt:  $(a,b) \in N$ , wenn  $q > h$ ;  $(a,b) \notin N$ , wenn  $1 < q \leq h$ . Wenn  $h > 1$ , dann gibt es in  $N$  keine  $q$ -Bahn mit  $q > h+1$ , die  $h$ -transitiven Netzwerke zerfallen dann in drei Arten mit dem Grad 1 oder 2 und bestehen beim Vorhandensein einer  $(h+1)$ -Bahn und eines durch ein Kantenpaar verbundenen Punktepaars aus zwei zusammenhängenden zueinander fremden Netzwerken, die durch das Kantenpaar verbunden sind.

H. Künneht.

## Angewandte Geometrie:

Szász, G.: Eine neue Behandlung der metrischen Aufgaben in der Zentralprojektion. Elemente Math. 8, 109—111 (1953).

Jakobi, Robert: Die Konstruktion des orthogonal-axonometrischen Bildes eines Objektes für eine gegebene Projektionsrichtung. Soc. Sci. Fennica, Commentationes phys.-math. 17, Nr. 1, 8 S. (1953).

Verf. zeigt, wie man von einem Objekt mittels des Eckhartschen Einschneideverfahrens den Normalriß gewinnen kann, der zu einer vorgegebenen, zusammen mit dem Objekt durch zugeordnete Normalrisse bestimmten Projektionsrichtung gehört.

H. Horninger.

Parker, Robert L.: Eine praktische Methode zur Transformation von Kristallstereogrammen in gnomonische Projektion. Z. angew. Math. Phys. 4, 497—499 (1953).

Piazzolla-Beloch, Margherita: Triangolazione aerea grafica di terreni pianeggianti. Boll. Soc. Ital. Fotogrammetria Topografia 1, 3 p. (1953).

Mineo, Massimo: Sopra un calcolo più approssimato della deviazione della geodetica da una sezione normale su una superficie qualunque. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 14, 255—261 (1953).

Für den Winkel, den eine vom Punkt  $P_0$  einer allgemeinen Fläche ausgehende geodätische Linie mit dem Normalschnitt in  $P_0$  bildet, der im Abstand  $s$  von  $P_0$  durch einen laufenden Punkt  $P$  der geodätischen Linie geht, wurde in der Literatur bisher nur das Hauptglied angegeben. Es ist in  $s$  von der 2. Ordnung und beträgt im Falle

des Besselschen Ellipsoids für eine 100 km lange geodätische Linie beispielsweise etwa 0,01". Verf. führt die bekannten analytischen Ansätze für eine allgemeine Fläche weiter aus und vervollständigt die gebräuchliche Formel durch das Glied 3. Ordnung. Dieses erreicht beim Besselschen Ellipsoid und bei einer Distanz von 1000 km maximal nur 0,1". Die Erweiterung der Formel wird in manchen Fällen von Nutzen sein, da sie eine Möglichkeit zur Fehlerabschätzung gibt. *W. Hofmann.*

**Boaga, Giovanni:** *Risoluzione del triangolo geodetico ellissoidico per mezzo degli elementi della sua rappresentazione conforme sul piano.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 14, 349—353 (1953).

Verf. geht von dem Gedanken aus, daß die Seiten und Winkel eines ellipsoidischen geodätischen Dreiecks, für dessen Eckpunkte bereits rechtwinklige Koordinaten in einer konformen Abbildung auf die Ebene vorliegen, am einfachsten in der Weise zu berechnen sind, daß man das ebene Dreieck auflöst, dessen Seiten die Sehnen der Bildkurven der geodätischen Linien sind. Der Übergang zu den entsprechenden ellipsoidischen Stücken geschieht durch Richtungs- und Längenkorrekturen. Entsprechende Formeln sind für spezielle, in der Landesvermessung gebräuchliche konforme Abbildungen seit langem bekannt. Verf. leitet mit Hilfe differentialgeometrischer Entwicklungen Ausdrücke für die Längen- und Richtungskorrektur ab, die für eine beliebige konforme Abbildung gelten, sofern die  $x$ -Achse das Bild eines Meridians ist. Die Ergebnisse beschränken sich demgemäß auf die Glieder von der Ordnung  $1/N^2$ , was aber für die geodätischen Dreiecke der Triangulierungen normalerweise ausreicht. *W. Hofmann.*

## Theoretische Physik

● **Krauskopf, Konrad Bates:** *Fundamentals of physical science: an introduction to the physical sciences.* 3. ed. London: McGraw-Hill Publishing Company, Ltd. 1953. XII, 694 p. 48 s.

**Sáenz García, Clemente:** *Neues Essay über physikalische Einheiten.* *Revista Acad. Ci. Madrid* 47, 83—105 (1953) [Spanisch].

**Huldt, Lennart:** *Einheitliche Darstellung eines Maß-Systems der Elektrizitätslehre.* *Elementa* 36, 237—245 (1953) [Schwedisch].

**Gomes, Ruy Luís:** *Die wahre Bedeutung des Invarianzprinzips der modernen Physik.* *Gaz. Mat., Lisboa* 14, Nr. 55, 1—3 (1953) [Portugiesisch].

**Vernotte, Paul:** *A propos de l'application à la physique de la méthode des moindres carrés.* *C. r. Acad. Sci., Paris* 237, 605—606 (1953).

**McCombie, C. W.:** *Fluctuation theory in physical measurements.* *Phys. Soc. Rep. Progr. Phys.* 16, 266—320 (1953).

Die Aussagen der Schwingungstheorie über die maximal erreichbare Genauigkeit einiger einfacher Typen physikalischer Meßinstrumente mit drehbar aufgehängtem Anzeigesystem werden ausführlich und verhältnismäßig elementar diskutiert. Besonders betont werden die zugrunde liegenden mathematischen Methoden (Theorie der Korrelationsfunktion einer Zufallsfunktion, ihre Spektralzerlegung, der Impedanzbegriff) und physikalischen Prinzipien (Anwendung des Äquipartitionstheorems, Wechselwirkungen innerhalb des aufgehängten Systems und mit der Umgebung, Diskussion zur Fürth'schen Kritik der Nyquist'schen Schwingungsformel vgl. dies. Zbl. 31, 140; Systeme, die sich nicht im thermodynamischen Gleichgewicht befinden wie elektronische Geräte verschiedener Art oder stromdurchflossene Halbleiter usw.). Unter anderem werden von speziellen Problemen die Theorie des Zernicke-Galvanometers, der günstige Einfluß einer Rückkopplung bei Messungen mit aufgehängten Systemen, die Meßgenauigkeit von Strahlungsdetektoren und die optimale Charakteristik eines Instrumentes, das eine zeitlich variable Größe bei Gegenwart von Schwankungen (Rauschen) messen soll, behandelt. *J. Meixner.*



● Favre, Henry: *Cours de mécanique. Band I: Statique.* 2. éd. Zürich: Editions Jeemann 1953. X, 374 p. Sfr. 33,65 relié, 30,75 broché.

Das Buch zerfällt in zwei Hauptabschnitte, nämlich den ersten Teil über die Statik der starren Körper und den zweiten Teil über die Statik der festen elastischen Körper. Am Anfang steht ein kurzes Kapitel über die grundlegenden Prinzipien und Gesetze der Mechanik. In der Statik starrer Körper wird zunächst das Gleichgewicht des materiellen Punktes, des starren Körpers in der Ebene und im Raum behandelt. Der Schwerpunkt wird mit Hilfe paralleler, gleichgerichteter Kräfte im Raum eingeführt und für materielle Kurven, Flächen sowie für homogene Körper durch allgemeine Formeln angegeben. Die Gleichungen von Pappus-Guldin zur Berechnung der Schwerpunkte von Kurven und Flächen aus den bei deren Umdrehung entstehenden Rotationsflächen bzw. Rotationskörpern sind abgeleitet. Es folgt ein Kapitel über Reibung, wobei für gleitende Reibung der bei graphischen Konstruktionen sehr anschauliche Reibungskegel eingeführt wird. Bei der Seil- und Kettenreibung wird der Zusammenhang zwischen den Seilkräften abgeleitet und auf die Theorie der Bandbremsen angewandt. Berechnung der Zapfenreibung, Darstellung der Reibung im Zapfenlager sowie der rollenden Reibung bilden wertvolle Ergänzungen. Die Biegung der Balken mit Einführung der Ritterschen Schnittmethode, der Biegemomente und Querkkräfte ist im nächsten Kapitel dargestellt, wobei sowohl die graphische Methode mit Hilfe des Seilpolygons wie die analytische Methode der Gleichgewichtsbedingungen zur Anwendung gelangen. Einige Bemerkungen über statisch bestimmte Systeme geben Einblicke in das Gebiet der Baustatik. Fachwerke einfacher Bauart (Dreiecks-Fachwerke) werden nach den Verfahren von Culman (graphisch), Ritter (analytisch) sowie Cremona (reziproke Kräftepläne) berechnet. Das letzte Kapitel dieses Abschnitts enthält die Theorie des Gleichgewichts der Seile und Ketten, die Gleichung der Kettenlinie, sowie Beziehungen zur Erläuterung ihrer Eigenschaften. Die allgemeinen Gleichungen für das Gleichgewicht der Seile sind ebenfalls abgeleitet. Im zweiten Teil über die Statik der elastischen Körper werden zunächst die inneren Spannungen definiert und der Spannungstensor eingeführt, dessen Symmetrie mit Hilfe der Momentengleichungen nachgewiesen wird. Die Komponenten einer beliebigen Spannung werden als lineare Funktionen der Komponenten des Spannungstensors dargestellt. Im Kapitel über Spannungen und Formänderungen wird die Normalspannung nach einer Maclaurinschen Reihe entwickelt, deren Glieder mit Ausnahme der beiden ersten gestrichen werden. Die Spannung ergibt sich dann linear abhängig vom Moment und vom reziproken Trägheitsmoment, ohne das Hookesche Gesetz zu benutzen. Es folgen die Gleichungen des ebenen Spannungszustandes, der durch die Mohrschen Kreise seine geometrische Interpretation findet (Otto Mohr, Abhandlungen aus dem Gebiet der technischen Mechanik, Berlin 1906, S. 195) und durch Bemerkungen über den räumlichen Spannungszustand ergänzt wird. Beanspruchung und Formänderung gebogener Balken sind im nächsten Kapitel behandelt, wobei die Spannungstrajektorien zur Darstellung gelangen. Unter Anwendung der Hypothese von Bernoulli-Navier wird die Differentialgleichung der elastischen Linie aufgestellt und bei Beschränkung auf kleine Formänderungen linearisiert. Das Verfahren von Mohr zur Berechnung der elastischen Linie wird mit Hilfe der Analogie zur Seilkurve abgeleitet. Das Theorem von Maxwell über die Gegenseitigkeit elastischer Verschiebungen führt unmittelbar zur Theorie der Einflußlinien. Im Abschnitt über exzentrischen Druck werden Nulllinie und Kern eingeführt sowie deren gegenseitige Beziehung erläutert. Die Eulersche Theorie der Knickung wird unter Hinweis auf ihre Gültigkeit im elastischen Bereich entwickelt. Die Torsionstheorie wird zunächst auf kreisförmige Querschnitte mit Anwendungen auf Wellen und Schraubfedern beschränkt. Danach folgt die klassische Elastizitätstheorie unendlich kleiner Formänderungen, wobei das Spannungsellipsoid und die Richtungen der Hauptspannungen eingeführt werden. Es werden weiter die Dehnungen und Gleitungen und damit der Tensor der Formänderung angegeben. Die Beziehung zwischen Spannungs- und Formänderungstensor wird durch das Hookesche Gesetz vermittelt. Es folgen die allgemeinen Elastizitätsgleichungen für den räumlichen Spannungszustand, wobei die Schreibweise in Komponenten beibehalten wird. Die semi-inverse Methode von Saint-Venant wird auf das Problem der Torsion prismatischer Stäbe, insbesondere auf elliptische und rechteckige Querschnitte angewandt. Der Abschnitt wird mit der Analogie der Torsion eines Stabes und der Formänderung einer Membran nach L. Prandtl [Physik. Z. 4, 758—759 (1903)] abgeschlossen. Der dritte Hauptabschnitt bringt das, was man vom technischen Standpunkt über die Hydrostatik wissen muß. Das Buch enthält zu jedem Kapitel eine Reihe von insgesamt 180 gut gewählten Aufgaben, bei deren Lösung der Studierende sofort herausfinden kann, ob er die vorgetragene Theorie wirklich verstanden hat. Auch die Lehrer der Mechanik an unseren technischen Hochschulen werden das Buch als zuverlässigen Ratgeber mit Vorteil benutzen.

R. Gran Olsson.

## **Mechanik:**

● Symon, Keith R.: *Mechanics.* (Principles of Physics Series, Nr. 7.) Cambridge, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1953. XIII, 358 p. \$ 7,50.

Ein Buch zur Unterstützung des Anfängerunterrichtes, in erster Linie für Physiker. Daher häufige Hinweise auf Verwendung der Theoreme in der Physik und ihre Modifikation unter dem Einfluß der heutigen Entwicklung der theoretischen Physik (Relativitätstheorie, Quantentheorie). In neun Kapiteln behandelt es den Stoff von den ersten Anfängen bis zu den Lagrangeschen Gleichungen, mit Ein-schluß der Elemente der Mechanik der Continua. Die Bewegung des starren Körpers im Raume wird nicht mehr behandelt. Das D'Alembertsche Prinzip kommt nicht vor. Zur weiteren Ausbildung wird vielfach auf das Buch von Goldstein (*Classical mechanics*, Cambridge 1951, dies. Zbl. 43, 180) hingewiesen. Weitere Literaturangaben nur von Werken in englischer Sprache. Die Begründung erfolgt mit der üblichen Punktmechanik, über den Kraftbegriff und die Newtonschen Gesetze das Herkömmliche. Anzuerkennen die Erkenntnis, daß das Inertialsystem erst aus der gesamten Mechanik hinterher festgestellt werden kann (S. 9). *G. Hamel.*

**Thomsen, John S.: Coulomb friction with several blocks.** *Amer. J. Phys.* 21, 446—452 (1953).

Es handelt sich um die elementare Aufgabe, die Anfangsbeschleunigungen der einzelnen Stücke eines Stapels von rechtwinkligen Blöcken zu ermitteln, an deren Berührungsflächen Coulombsche Reibung auftritt, die durch irgendwelche Normalkräfte bedingt ist. Die angreifenden äußeren Kräfte sollen parallel zu den Berührungsflächen auftreten. Es ist an einem Stapel von schweren Kisten gedacht. *Th. Pöschl.*

**Storchi, Edoardo: Sul principio dell'azione potenziale stazionaria.** *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. Ser. 14, 771—778 (1953).

Bei konservativen, holonomen Systemen gilt das Hamiltonsche Prinzip, wenn die Zeit nicht variiert wird, das Höldersche dann, wenn die Zeit so variiert wird, daß die Gesamtenergie unverändert bleibt. Verf. findet: das Prinzip kann jede Gestalt  $\delta \int f dt = 0$  haben, wenn die Zeit in einer angemessenen Weise variiert wird. Aus der Funktion  $f(T, U)$  bestimmt sich  $\delta dt$ . Wenn  $f = F(T - U) + T + U$  ist, wo  $T - U = E$  die Gesamtenergie ist, läßt sich ein bestimmtes  $Q = \int q(T, U) dU$  angeben, das konstant zu halten ist. Z. B. gilt das Prinzip  $\delta \int U dt = 0$ , wenn  $Q = \int \sqrt{E} dt$  festgehalten wird. Das ist das in der Überschrift genannte Prinzip. *G. Hamel.*

**Colombo, G.: Un teorema di dinamica ed una sua applicazione al moto di un corpuscolo elettrizzato in presenza di un dipolo.** *Rend. Sem. mat. Univ. Padova* 22, 207—222 (1953).

L'A. considera un sistema meccanico la cui Hamiltoniana  $H$  ha la forma  $H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - U(q_1, q_2)$ . Detto  $h_0$  un valore di  $H$  e supposto: a) convessa la superficie  $\Sigma$  che limita una regione dello spazio  $p_2, q_1, q_2$  in cui  $2[h_0 + U(q_1, q_2) - p_2^2]$  b) esista un moto periodico  $p^*$ , di periodo  $T$ , tale che  $q_1 = q_{10}$  (costante) e rappresentabile con una linea di  $\Sigma$ , c) irrazionale il rapporto fra  $\pi T$  e gli esponenti caratteristici dell'equazione alle variazioni di  $p^*$ , d)  $(e^2 U''(q_1^0, q_2^0)(q_1^0, q_2^0) < 0$ , l'A. dimostra l'esistenza di un altro moto periodico del sistema diverso da  $p^*$  e da quelli ad esso vicini. Da questo teorema deduce l'esistenza di orbite periodiche per il moto di un corpuscolo elettrizzato in presenza di un dipolo magnetico. *D. Graffi.*

**Masotti, Arnaldo: Linea indicatrice della equazione del centro nei moti kepleriani.** *Atti IV. Congr. Un. mat. Ital.* 2, 531—533 (1953).

Vgl. *Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur.* 85, 65—81 (1952).

**Kuerti, G.: On the derivation of the principle of angular momentum about the mass center.** *Amer. J. Phys.* 21, 469—470 (1953).

**Desoyer, K. und A. Slibar: Zur Berechnung von Pendel-Schwingungstilgerm.** *Ingenieur-Arch.* 21, 208—212 (1953).

**Heinrich, G.: Die Bedeutung des Schwingungsmittelpunktes für gewisse Verallgemeinerungen der Pendelbewegung.** *Österreich. Ingenieur-Arch.* 7, 117—125 (1953).



Kann auch bei beliebiger Bewegung des Aufhängepunktes ein physikalisches Pendel durch ein Punktpendel ersetzt werden? Bei ebener Bewegung ja, was die Bewegung angeht, nein, was die Beanspruchung des Aufhängepunktes angeht; beim konischen Pendel muß noch eine besondere Bedingung erfüllt sein. *G. Hamel.*

Müller, Hans Robert: Zur Kinematik des Rollgleitens. Arch. der Math. 4, 239–246 (1953).

Die Grünschen Beziehungen (dies. Zbl. 42, 400) zweier aufeinander rollgleitenden Kurven  $\mathfrak{C}$ ,  $\hat{\mathfrak{C}}$  zu ihren Polbahnen  $\mathfrak{P}$ ,  $\hat{\mathfrak{P}}$  werden einfacher, mit Hilfe komplexer Zahlen, hergeleitet. Bei fester Rollgleitzahl  $\lambda$  werden  $\mathfrak{P}$  bzw.  $\hat{\mathfrak{P}}$  in der Gang- bzw. Rastebene  $\mathfrak{E}$ ,  $\hat{\mathfrak{E}}$  durch  $p = x + i x'$ ,  $-(1-\lambda)/(\hat{K} - \lambda K)$  bzw.  $\hat{p} = \hat{x} + i \hat{x}' (1-\lambda)/(\hat{K} - \lambda K)$  dargestellt. Punkt  $X$  mit den Koordinaten  $x$  bzw.  $\hat{x}$  in  $\mathfrak{E}$  bzw.  $\hat{\mathfrak{E}}$  beschreibt  $\mathfrak{C}$  bzw.  $\hat{\mathfrak{C}}$ . Beide Kurven sind auf ihre Bogenlängen  $s$  bzw.  $\hat{s}$  als Parameter bezogen ( $'$  sind die Abl. nach  $s$  bzw.  $\hat{s}$  und  $K$ ,  $\hat{K}$  die Krümmungen von  $\mathfrak{C}$ ,  $\hat{\mathfrak{C}}$  in  $X$ ). — Verf. findet dann in  $x = -i L e^{iL\vartheta} \int p e^{-iL\vartheta} d\vartheta + A_0 e^{iL\vartheta}$  bzw.  $\hat{x} = -i \hat{L} e^{i\hat{L}\vartheta} \int \hat{p} e^{-i\hat{L}\vartheta} d\vartheta + \hat{A}_0 e^{i\hat{L}\vartheta}$ , wobei  $L = \lambda/(1-\lambda) = \hat{L} - 1$ , jene geordneten Paare  $\mathfrak{C}$ ,  $\hat{\mathfrak{C}}$ , die bei gegebenem  $\mathfrak{P}$ ,  $\hat{\mathfrak{P}}$  aufeinander rollgleiten ( $\vartheta$  ist der Drehwinkel, um den die beiden Koordinatensysteme aus  $\mathfrak{E}$  und  $\hat{\mathfrak{E}}$  gegeneinander verdreht sind,  $A_0 = \hat{A}_0$  Integrationskonst.). Beispiel:  $\mathfrak{P}$ ,  $\hat{\mathfrak{P}}$  speziell Kreise. Resultat: Die Flanken zylindrischer Zahnräder rollgleiten nur dann aufeinander, wenn sie nach Trochoiden geformt sind (vgl. Camus, Mém. de l'Acad., Paris 1733). — Durch die Definition  $\lambda = \lambda(t) = (ds/dt):(d\hat{s}/dt)$  erweitert dann Verf. den Grünschen Begriff der Rollgleitzahl  $\lambda$ , der nunmehr als Spezialfall  $\lambda = \text{const.}$  erscheint.  $L$  und  $\hat{L}$  sind nun von  $t$  abhängig, und es wird  $x = -i e^{i\Phi} \int L p e^{-i\Phi} d\vartheta + A_0 e^{i\Phi}$ , analog  $\hat{x}$ , wobei  $\Phi = \int L d\vartheta$ . Die Verknüpfung der Krümmungsverhältnisse von  $\mathfrak{C}$ ,  $\hat{\mathfrak{C}}$ ,  $\mathfrak{P}$  und  $\hat{\mathfrak{P}}$  wird durch die geometrische Deutung  $\lambda = (PX\hat{M}\hat{M})$  der Rollgleitzahl  $\lambda$  als Doppelverhältnis ( $P$  Momentanpol,  $X$  Berührungspunkt von  $\mathfrak{C}$  und  $\hat{\mathfrak{C}}$ ,  $\hat{M}$  bzw.  $M$  Krümmungsmittelpunkte von  $\hat{\mathfrak{C}}$  bzw.  $\mathfrak{C}$  in  $X$ ) charakterisiert. *R. Jakobi.*

Funaioli, Ettore: Sullo slittamento elastico nel rotolamento. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 15, 15–24 (1953).

Zu den Ursachen für einen Energieverlust beim Rollen einer Walze auf einer Unterlage gehört auch das Gleiten, das durch eine elastische Formänderung der Körper bedingt ist. Die gegenseitige Einwirkung der beiden Körper ist dann nicht nur durch eine Normalkraft darstellbar, sondern auch durch eine Kraft  $T$ , die in der Gegenrichtung der Bewegung des Mittelpunktes der Walze beim Rollen weist und außerdem durch ein Kräftepaar  $TR$ , so daß sich die Walze ähnlich wie ein Schlepper (rimorchiatore) verhält. — Es ist das Ziel dieser Arbeit, den Zusammenhang des Gleitens mit  $T$  zu ermitteln, sowohl für den Fall, daß die Reibungszahl zwischen Rolle und Unterlage von der Geschwindigkeit unabhängig ist, als auch für den Fall, daß sie von dieser abhängig ist. Für die Berechnung der elastischen Verformungen werden die Verteilung des Drucks nach einer Halbellipse und Formeln von St. Timoshenko angenommen. *Th. Pöschl.*

● Golubev, V. V.: Vorlesungen über die Integration der Bewegungsgleichungen eines schweren starren Körpers in der Nähe eines Fixpunktes. Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1953. 287 S. R. 6,15 [Russisch].

Le présent ouvrage est consacré au problème d'intégration du système différentiel ( $E$ ) de six équations d'Euler, qui régit le mouvement d'un solide pesant, mobile sans frottement autour d'un point fixe. L'exposé débute (chapitre I) par le rappel des résultats élémentaires: mise en équations du problème, transformation de ( $E$ ) sous la forme de Hess, formation des trois intégrales premières classiques. La théorie du dernier multiplicateur, brièvement résumée, donne le moyen de réduire le problème aux quadratures dès qu'on connaît une quatrième intégrale première de ( $E$ ); l'A. indique les liens du dernier multiplicateur avec la théorie des invariants intégraux. Au chapitre II, l'A. aborde l'exposé de la méthode même d'intégration de Mme S. Kowalevsky. On ramène le problème à l'étude des conditions nécessaires d'existence des intégrales premières uniformes de ( $E$ ). Cette réduction est faite par les méthodes de Poincaré, mais la voie originale est esquissée. Signalons, à cette occasion, les compléments et les perfectionnements de la théorie initiale de Mme Kowalevsky, dus à Appelroth et à Liapounov. Les trois cas, aujourd'hui classiques, de Lagrange, d'Euler, de Kowalevsky, apparaissent à l'issue de la discussion. On montre ensuite que ( $E$ ) possède une quatrième intégrale première algébrique chaque fois que les conditions nécessaires d'uniformité sont remplies. Les propriétés remarquables

de  $(E)$  permettent de retrouver, par une méthode régulière, les formules résolutes explicites des cas de Lagrange et d'Euler. C'est l'objet du chapitre III. Il reste à réaliser effectivement la réduction aux quadratures de  $(E)$  dans le cas de Mme Kowalevsky. C'est ce que fait l'A. au cours du chapitre IV. Le problème est ramené, après quelques transformations appropriées, à l'inversion des intégrales ultra-elliptiques qu'il faut effectuer pour expliciter la solution. L'A. est ainsi conduit à présenter l'essentiel de la théorie des fonctions algébriques dans les champs complexes, donc à parler des fonctions de Riemann, des intégrales abéliennes; c'est là la substance du chapitre V. Ces résultats permettent d'aborder, d'une manière générale, le problème de l'inversion des intégrales: elliptiques, d'abord, au moyen des fonctions  $\theta$  à une variable et des intégrales hyperelliptiques, au moyen des fonctions  $\theta$  à deux variables de Rosenhain. Les théories précédentes, exposées au chapitre VI, donnent au lecteur les instruments indispensables pour aborder, au chapitre VII, le problème de l'inversion des intégrales de Mme Kowalevsky. L'A. traite le problème avec tous les détails désirables: les 6 inconnues de  $(E)$  sont, dans le cas de Mme Kowalevsky, exprimées en fonction de deux paramètres auxiliaires: des indications sont données pour définir ceux-ci en fonction du temps. La discussion des cas de dégénérescence des intégrales hyper-elliptiques de Delaunay, Mlodzeevsky, complète le chapitre. Le dernier chapitre est essentiellement consacré aux cas d'intégrabilité de  $(E)$  qu'on obtient en particularisant les conditions initiales: cas de Hess, complété par une remarque de Nekrassof, cas de Goriatchev-Tchaplyguine, cas de Bobylev-Steklov. La rédaction de l'A. est très claire; les calculs sont toujours explicités. On a donc là un exposé très accessible d'une théorie classique, dont les conclusions essentielles sont familières à tous sans qu'on puisse en dire autant des calculs justificatifs. L'A. insiste sur le rôle de précurseur de Mme Kowalevsky. Elle serait la première à avoir appliqué à un problème de Mécanique la théorie analytique des équations différentielles dans le domaine complexe, qu'elle a contribué à fonder; car il est certain que son travail, analysé dans le présent livre, a influencé les travaux ultérieurs de Poincaré, de Picard, de Painlevé sur l'intégration des équations différentielles algébriques, et sur l'étude des singularités des solutions des systèmes différentiels. Enfin, le cas d'intégrabilité de Mme Kowalevsky serait le seul exemple d'un problème de Mécanique résolu au moyen des fonctions hyper-elliptiques mis à part les exemples artificiels des forces dont la nature ne nous fournit par d'exemple. On voit que l'A. s'est placé à un point de vue classique. On ne peut, des lors, lui faire grief d'avoir négligé les développements modernes de la théorie. Rappelons ici les travaux de Jules Drach qui reprend le problème des corps solides mobiles autour d'un point fixe au moyen de sa théorie de l'intégration logique et les recherches beaucoup plus récentes de E. Cartan et de F. Gallissot dont les méthodes permettent d'abrégier singulièrement les calculs de Mme Kowalevsky.

J. Kravtchenko.

**Grammel, R.: Die stationären Bewegungen des selbsterregten Kreiseis und ihre Stabilität.** Ingenieur-Arch. 21, 149—156 (1953).

Soient:  $S$ , un solide mobile sans frottement autour d'un point fixe  $O$ ;  $A, B, C$ , ses moments principaux d'inertie en  $O$ ;  $\vec{M}$ , le moment résultant en  $O$  des forces extérieures, appliquées à  $S$ ;  $\vec{\omega}$ , le vecteur rotation instantanée de  $S$ . L'A. étudie la classe  $C$  des mouvements, de  $S$ , caractérisés par la double propriété suivante: 1.  $\vec{\omega}$  est fixe dans  $S$ , 2.  $\vec{M}$  est fixe dans  $S$ . Il détermine tous les mouvements  $C$ ; puis il discute leur stabilité, au sens de la méthode des petits mouvements. Parmi les conclusions les plus saillantes, notons celles-ci: 1. Si  $\vec{M} \neq 0$ ,  $A > B > C$ , il existe une triple infinité de mouvements  $C$ , qui sont presque tous instables. 2. L'A. indique un moyen de stabiliser les mouvements précédents. Il semble que plusieurs remarques de l'A. doivent être utiles dans l'art de l'Ingénieur.

J. Kravtchenko.

**Bordoni, Piero Giorgio: Limitazioni per il raggio di girazione baricentrale delle figure piane a contorno convesso.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII, Ser. 14, 413—418 (1953).

Detto  $\tau$  un'asse baricentrale di una figura piana convessa  $\sigma$ ,  $q$  il raggio di girazione di  $\sigma$  rispetto a  $\tau$ ,  $d$  la distanza fra le tangenti al contorno di  $\sigma$  e parallele a  $\tau$ ,  $s$  la distanza fra  $\tau$  e la retta che dimezza la striscia compresa fra quelle tangenti, l'A., applicando anche considerazioni esposte in altra Nota (questo Zbl. 50, 388), ricava per  $q$  le seguenti limitazioni:

$$\frac{d^2}{24} + \frac{s^2}{2} \leq q^2 \leq \frac{d^2}{12} + s^2.$$

Stabilisce poi limitazioni più forti valide nell'ipotesi  $\tau$  asse di simmetria di  $\sigma$ .

D. Graffi.



**Forte, Bruno:** Di alcune proprietà cinematiche riguardanti il moto rigido di una sfera su se stessa. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 14, 765—770 (1953).

Considerato il moto di una figura sferica su una sfera, e definita distanza cinematica  $c$  fra due punti  $P$  e  $P'$  (il primo sulla sfera fissa, l'altro solidale con la figura mobile) la somma delle lunghezze degli archi di cerchio massimo  $PI$  e  $P'I$  ( $I$  polo istantaneo di rotazione) l'A. determina le condizioni a cui devono soddisfare  $P$  e  $P'$  affinché sia:  $d^2c/dt^2 = d^3c/dt^3 = \dots = d^nc/dt^n = 0$  per  $n = 2, 3, 4$ . *D. Graffi.*

**Stoppelli, Francesco:** Sull'applicabilità del principio dell'effetto giroscopico a sistemi di solidi mutuamente vincolati. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 565—567 (1953).

**Consiglio, Alfonso:** Sopra la dinamica di un sistema di punti vincolati con vincoli anolonomi. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 486—500 (1953).

Übersicht über bekannte Sätze über nichtholonome Systeme. *G. Hamel.*

**Bolie, Victor Wayne:** Periodic orbits in the neighborhood of libration points in certain rotating systems. (Abstract of a thesis.) Iowa State College, J. Sci. 27, 131—133 (1953).

**Colombo, Giuseppe:** Sopra un particolare sistema quasilineare in due gradi di libertà. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 484—485 (1953).

**Koenig, J. Frank:** On the zeros of polynomials and the degree of stability of linear systems. J. appl. Phys. 24, 476—482 (1953).

Verf. gibt eine, auf die Belange in den Anwendungen abgestimmte Zusammenstellung neuer Sätze über die Wurzeln (reeller und komplexer) Frequenzgleichungen mechanischer Systeme. Insbesondere wird ausführlich die Lage der Wurzeln in Abhängigkeit von zwei variabel angenommenen Koeffizienten (root trajectory diagram) sowie die Umkehrung eines Satzes des Ref. [Bilharz, Z. angew. Math. Mech. 24, 77—82 (1944)] und E. Frank's [Bull. Amer. math. Soc. 52, 144—157, 890—898 (1946)] diskutiert. *H. Bilharz.*

**Staržinskij, V. M.:** Über die Stabilität eines mechanischen Systems mit einem Freiheitsgrad. Priklad. Mat. Mech. 17, 117—122 (1953) [Russisch].

Considérons les intégrales  $f(x)$  et  $\varphi(x)$  de l'équation:  $(1) y'' + a y' + p(x) y = 0$  (où:  $a$  est une constante positive;  $p(x)$  est une fonction continue, non négative, périodique, de période  $\omega$ ) telles que:  $f(0) = 1$ ;  $f'(0) = 0$ ;  $\varphi(0) = 0$ ;  $\varphi'(0) = 1$ . L'A. montre que la solution de (1) est asymptotiquement stable si

$$A = [f(\omega) + \varphi'(\omega)] / (1 + e^{-a\omega}) < 1.$$

Le numérateur de  $A$  ne peut être calculé explicitement, en général, mais Liapounov a réussi à discuter la condition:  $A < 1$  dans le cas où  $a = 0$ . L'A. étend partiellement l'analyse de Liapounov à l'équation (1) avec  $a \neq 0$ . *J. Kravtchenko.*

**Colombo, G.:** Sul moto di due corpi rigidi pesanti collegati in un punto, di cui uno ha un punto fisso. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 22, 305—312 (1953).

Nach dem Vorgang von Agostinelli werden alle Möglichkeiten aufgestellt dafür, daß ein räumliches Doppelpendel mit konstanten Winkelgeschwindigkeiten schwingt. *G. Hamel.*

**Haacke, Wolfhart:** Über die nichtlineare Mechanik. Phys. Blätter 9, 398—405 (1953).

Es wird ein Bericht gegeben über Fragestellungen und wichtigste mathematische Methoden bei nichtlinearen Schwingungen. (Beschränktheit von Lösungen, Existenz periodischer Lösungen mit Benutzung von Fixpunktsätzen, Störungsrechnung, Iterationsverfahren; Arbeiten von Reuter, Haag, Minorski, McLachlan u. a.). *L. Collatz.*

**Sansone, Giovanni:** Le equazioni delle oscillazioni non lineari. Risultati analitici. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 1, 186—217 (1953).

Verf. gibt einen zusammenfassenden Bericht über analytische Resultate in der Theorie der nichtlinearen Schwingungen. Zunächst werden einige wichtige Typen nichtlinearer Schwingungsgleichungen bei einem Freiheitsgrad zusammengestellt, dann an der Liénardschen Gleichung  $\ddot{x} + \omega f(x) \dot{x} + \omega^2 x = 0$  (mit  $\omega > 0$ ) und an allgemeineren Typen die Methoden von Kryloff-Bogoliuboff und Minorski zur asymptotischen Darstellung periodischer Lösungen beschrieben; es folgen Existenzsätze über periodische Lösungen bei  $\ddot{x} + f(x, \dot{x}) \dot{x} + g(x) = e(t)$  von Levinson, Massera, Miranda, Langenhop u. a. und Sätze von Cartwright. Littlewood und Reuter über Existenz periodischer Lösungen (und Eindeutigkeit bei hinreichend geringer Abweichung von der Linearität) bei Einführung eines Parameters  $k$ . [Gleichungen der Form  $\ddot{x} + k f(x) \dot{x} + g(x, k) = p_1(t) + k p_2(t)$ .] Weitere Existenz- und Eindeutigkeitsätze stammen von Milne, Sansone, Tricomi, Amerio, Cacciopoli, Ghizzetti, Ceccconi u. a. und bei mehreren Freiheitsgraden von Cacciopoli, Ghizzetti, Colombo, Graffi, Pöschl, Reeb. 57 Fußnoten mit vielen Literaturangaben ergänzen den übersichtlichen Bericht.

*L. Collatz.*

**Graffi, Dario:** Equazioni delle oscillazioni non-lineari in relazione alle applicazioni. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 1, 218—231 (1953).

Verf. knüpft an den Bericht von Sansone an und gibt einen zusammenfassenden Bericht über nichtlineare Schwingungen in den Anwendungen, hauptsächlich in der Mechanik, in elektrischen Schwingungskreisen und in der Radiotechnik (Röhrenschwingungen). Im Vordergrund steht wieder die Frage nach der Existenz periodischer Lösungen, wobei besonders auch energetische und geometrische Gesichtspunkte (Untersuchungen in der Phasenebene) herangezogen werden.

*L. Collatz.*

**Erdős, Paul:** Kleine Schwingungen dynamischer Systeme. Z. angew. Math. Phys. 4, 215—219 (1953).

Verf. behandelt das Problem kleiner Schwingungen unter den von Weierstraß (Gesammelte Werke, Bd. I, 233) gemachten Voraussetzungen: Die Hamiltonfunktion sei eine positiv definite quadratische Form in den generalisierten Koordinaten und Impulsen, mit nur einfachen Wurzeln in der charakteristischen Gleichung, gyrokopische Terme sind zugelassen. Die Anwendung der Methoden der linearen Algebra, insbesondere eines vom Verf. im Anhang bewiesenen Hilfssatzes gestattet eine kurze und übersichtliche Darstellung.

*F. Penzlin.*

**Pöschl, Theodor:** Sull'estensione del concetto di oscillazioni principali ai sistemi non-lineari a più gradi di libertà. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 542—549 (1953).

Verf. zeigt den Erfolg seiner Theorie der „Hauptschwingungen“ am Beispiel des Doppelpendels. Die Jacobische Form des Prinzips von Maupertuis-Euler führt auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen den Koordinaten, die sich für die hier interessierende singuläre Lösung auf eine Differentialgleichung erster Ordnung reduziert. Der Beweis fehlt.

*G. Hamel.*

**Pöschl, Th.:** Über Hauptschwingungen mit endlichen Schwingweiten. II. Ingenieur-Arch. 21, 396—398 (1953).

Nachweis, daß die in der ersten Mitteilung (dies. Zbl. 46, 173) eingeführten Grenzkurven für  $n = 2$  die Hilbertsche Transversalitätsbedingung des zugehörigen Variationsproblems in der Jacobischen Fassung erfüllen. Anwendung auf das Doppelpendel.

*G. Hamel.*

**Pong, William:** Principal frequencies of a double spring-mass system. Amer. J. Phys. 21, 546—548 (1953).

Verf. behandelt das angegebene Problem unter Berücksichtigung einer endlichen Federmasse. Die Rechnung ergibt ein unendliches Frequenzspektrum. Für gleiche Federn und gleiche Massen zeigt der Grenzfall verschwindender Federmassen,



daß die beiden tiefsten Frequenzen den Normalschwingungen entsprechen. Die Wirkung der Federmasse läßt sich näherungsweise als (von der Schwingungsform abhängige) Änderung der schwingenden Massen berücksichtigen. *F. Penzlin.*

**Saxon, David S. and A. S. Cahn:** Modes of vibration of a suspended chain. *Quart. J. Mech. appl. Math.* **6**, 273—285 (1953).

Verf. betrachten die freien Schwingungen einer nicht dehnbaren Kette, die an ihren Enden in gleicher Höhe befestigt ist. Bewegungen der Kette sind nur in der Ebene zugelassen, die durch die Befestigungspunkte und den Vektor der Schwerkraft bestimmt ist. Von der statischen Gleichgewichtslage (Kettenlinie) ausgehend, wird eine Störungsrechnung angesetzt. Unter Vernachlässigung der quadratischen Glieder ergeben sich für die horizontale ( $\xi$ ) und die vertikale ( $\eta$ ) Störungskomponente wie für die Störungskomponente der Spannung ein System linearer Differentialgleichungen mit nichtkonstanten Koeffizienten mit dem Winkel ( $\alpha$ ) der Tangentenrichtung als unabhängiger Veränderlichen, wenn man die Störungsglieder proportional  $\exp(-i\omega t)$  ansetzt. Der Eigenwertparameter  $\lambda$  ergibt sich aus  $\lambda^2 = L\omega^2/(2g \cdot \tan \alpha_0)$  mit der Erdbeschleunigung  $g$ , der Bogenlänge  $L$  und der Tangentenneigung  $\alpha_0$  bei der Ruhe im Endpunkt. Als erste Näherung erhält man  $\xi = 0$ ,  $\eta = \text{const.}$ , nicht aber  $\xi = \text{const.}$ ,  $\eta = 0$ . Zunächst wird kurz der Fall  $|\alpha| \leq |\alpha_0| < 1$  approximativ untersucht. — Um asymptotische Lösungen für große  $|\lambda|$  zu erhalten, wird statt  $\xi, \eta$  die Normal- und Tangentialrichtung ( $u, v$ ) an der Kette gewählt. Für  $v$  ergibt sich eine Differentialgleichung 4. Ordnung, für  $u$  die Gleichung  $u = v'$  bei  $v = v' = 0$  für  $\alpha = \pm \alpha_0$ . Mit Hilfe der WBK-Methode wird diese Aufgabe bewältigt. Graphische Darstellungen für mehrere Eigenwerte vergleichen die erhaltenen Ergebnisse mit verschiedenen Experimenten.

*W. Haacke.*

**Hahn, Wolfgang:** Die mechanische Deutung einer geometrischen Differenzengleichung. *Z. angew. Math. Mech.* **33**, 270—272 (1953).

Analog der Untersuchung von Bottema (dies. Zbl. **5**, 224) betrachtet Verf. ein masseloses, im homogenen Schwerfeld schwingendes Seil, das mit Massepunkten besetzt ist. Hier aber verhalten sich die Massen und ihre Abstände voneinander wie eine geometrische Folge. Die Auslenkungen lassen sich durch Orthogonalpolynome beschreiben. Läßt man die Anzahl der Massenpunkte bei konstanter Gesamtmasse gegen unendlich gehen, so ergeben sich die Auslenkungen aus einer geometrischen Differenzengleichung. Als Lösung erhält Verf. eine Heinesche Reihe. Für diese Lösung wird eine Orthogonalrelation bewiesen. — Abschließend wird gezeigt, daß sich durch Grenzübergang die Besselsche Lösung für das homogene Seil ergibt.

*W. Haacke.*

**MacNeal, R. H.:** Application of the compensation theorem to the modification of redundant structures. *J. aeronaut. Sci.* **20**, 726—727 (1953).

Die Ermittlung der Momenten- und Kräfteverteilung in einem hochgradig statisch unbestimmten System erfordert umfangreiche numerische Rechnungen. Beim Entwurf solcher Konstruktionen müssen die Berechnungen oft wiederholt werden, um die günstigste Kombination der konstruktiven Ausbildung zu erzielen. Viele dieser Kombinationen mögen unverändert bleiben, ausgenommen Änderungen an wenigen Punkten der Konstruktion. Es ist daher vorteilhaft, den Einfluß solcher Änderungen auszuwerten, ohne die Notwendigkeit einer Wiederholung der ganzen Rechnung. In einer Arbeit haben H. F. Michielsen und A. Dijk [*J. aeronaut. Sci.* **20**, 286 (1953)] auf eine einfache Methode hingewiesen, die von G. C. Best [*J. aeronaut. Sci.* **12**, 298—304 (1945)] herrührt und die in gewissen Fällen den Umfang an numerischer Rechnung herabsetzt. Der Zweck vorliegender Arbeit besteht darin, das Verfahren zu verallgemeinern und in solche mathematische Form zu bringen, daß es für beliebige Probleme, die eine Lösung von Systemen linearer Gleichungen erfordern, angewandt werden kann.

*R. Gran Olsson.*

**Fung, Y. C.:** Statistical aspects of dynamic loads. *J. aeronaut. Sci.* **20**, 317—330 (1953).

**Desoyer, K. und A. Slibar:** Die rechnerische Ermittlung des Ungleichförmigkeitsgrades bei Kolbenmaschinen. *Österreich. Ingenieur-Arch.* **7**, 100—110 (1953).

Duncan, D. B.: Response of undamped systems to noise. J. appl. Phys. 24, 1252—1253 (1953).

● Flüge-Lotz, Irmgard: Discontinuous automatic control. Princeton, N. J.: Princeton University Press 1953. VII, 168 S. \$ 5,00.

In verschiedenen Zweigen der Technik treten bei Störung einer Hauptbewegung Schwingungen auf, deren Eigendämpfung den Forderungen nach schnellen Abklingen nicht genügt oder sogar fehlt. Um in diesen Fällen dennoch rasch auf kleine Amplituden zu kommen, hat man automatische Regelungen (automatic controls) geschaffen, die die Störbewegung möglichst schnell zum Verschwinden bringen sollen. Solche Regelungen können entweder stetig oder unstetig arbeiten, wobei die unstetig arbeitenden den Vorteil apparativer Einfachheit haben, dafür aber ihrerseits neue unerwünschte und komplizierte Phänomene am schwingenden System hervorrufen. Dem Studium dieser Bewegungen eines mechanischen Systems unter dem Einfluß von unstetigen Regelungen (Schwarz-Weiß-Regelungen, On-Off-Controls, ist das vorliegende Buch gewidmet. Die Ergebnisse sind nicht auf mechanische Systeme beschränkt, sondern gelten für alle Bewegungen, die im unregelten Zustand durch eine Differentialgleichung der Form  $a\ddot{x} + 2b\dot{x} + cx = 0$  ( $a > 0$ ) mit konstanten Koeffizienten beschrieben werden. Die Differentialgleichung der geregelten Bewegung  $a\ddot{x} + 2b\dot{x} + cx = N\beta$  ( $N \neq 0$ ) ist nichtlinear, jedoch von der Art, daß sie sich in gewissen Zeitintervallen, in denen die Regelfunktion ihr Vorzeichen nicht wechselt, auf eine lineare inhomogene Differentialgleichung reduziert. Die Methode, die allen Untersuchungen des Buches zugrunde liegt, ist graphischer Natur: die Bewegung des geregelten Systems wird durch eine Kurve in der Phasenebene dargestellt, die sich aus Stücken zweier logarithmischer Spiralen zusammensetzt. Wesentlich für den Ablauf der Regelung ist dann die Wahl des Vorzeichens der Rückstellkraft (System A, System B) und die Lage der sukzessive zu konstruierenden Schaltpunkte in der Phasenebene, in denen der Übergang von einem Spiralenstück zum nächsten erfolgt; sie sind dadurch charakterisiert, daß in ihnen die Regelfunktion ihr Vorzeichen wechselt. Nach Aufstellung der Systemgleichung und Angabe ihrer allgemeinen Lösung für den Fall einer Bewegung mit nur einem Freiheitsgrad werden im ersten Teil des Buches die beiden wichtigsten Arten unstetiger Regelungen behandelt: Regelungen mit Stellungszuordnung (position control) mit der Reglergleichung  $\dot{\beta} = -\beta_0 \operatorname{sgn} F$  ( $\beta_0 > 0$ ) und der Regelfunktion  $F = q_1 x + q_2 \dot{x}$ , und Regelungen mit Laufgeschwindigkeitszuordnung (velocity control) mit der Reglergleichung  $d\beta/dt = \dot{\beta} = -v_0 \operatorname{sgn} F$  ( $v_0 > 0$ ), und den Regelfunktionen  $F = q_1 x + q_2 \dot{x}$  bei Regelungen ohne Rückführung oder  $F = q_1 x + q_2 \dot{x} + q_3 \beta$  bei Regelungen mit Rückführung. Es wird ein genauer Überblick gegeben über die verschiedenen möglichen Bewegungstypen, über das Verhalten der Regelfunktion in der Umgebung eines Schaltpunktes, über die daraus folgenden Eigenschaften gewisser Schaltpunkte, Endpunkte, Anfangspunkte oder Ruhepunkte der Regelung zu sein (nichtreguläre Schaltpunkte) und über deren Lage in der Phasenebene. Gesondert untersucht werden noch periodische Bewegungen, die nur für gewisse Werte der Regelparameter existieren und für deren Anfangswerte (in Abhängigkeit von der Periodenlänge) Formeln angegeben werden, die teilweise schon von H. Bilharz [dies. Zbl. 28, 249; Luftfahrtforschung 18, 317—326 (1941)] und Z. angew. Math. Mech. 22, 206—215 (1942)] hergeleitet wurden. Eine Diskussion der für die Technik günstigsten Auswahl der Regelparameter beschließt den ersten Teil des Buches. — Wurden bisher „ideale Regelungen“ (d. h. Umschaltung gleichzeitig mit dem Vorzeichenwechsel der Regelfunktion) vorausgesetzt, so nähert sich der zweite Teil des Buches mehr den wirklichen Gegebenheiten und bezieht die stets vorhandenen Unvollkommenheiten des Regelmechanismus in den Kreis der Betrachtungen mit ein. Während Fehler im Fühler und im Mischaggregat immer noch vernachlässigt werden dürfen, können sowohl „Kommando“ als auch „Schaltung“ des Regelmechanismus unabhängig voneinander gegen den Nulldurchgang der Regelfunktion  $F$  verschoben sein (Regelung mit Schaltverschiebungen). Dies führt, wie gezeigt wird, häufig sogar zu einer erheblichen Verbesserung der Regelung gegenüber dem „idealen“ Fall. Folgende speziellen Schaltverschiebungen werden untersucht: 1. Kommando beim Nulldurchgang von  $F$ , Schaltung erfolgt, sobald  $F$  einen bestimmten positiven Wert erreicht hat (konstante Nachhinkzone, „threshold“). 2. Kommando beim Nulldurchgang von  $F$ , Schaltung um eine bestimmte Zeit verzögert (konstante Nachhinkzeit, „time lag“). 3. die Regelung schlägt nicht sofort von einer Grenzlage in die andere um, sondern bleibt dazwischen solange in der Nullage stehen, wie  $|F| < C$  ist (neutrale oder „tote“ Zone). Kommando und Schaltung erfolgen gleichzeitig, sind aber gegen den Nulldurchgang von  $F$  nach beiden Seiten verschoben. Während die sehr ähnlichen Schaltverschiebungen 1. und 2. gute Ergebnisse hervorrufen, solange die Nachhinkwerte klein sind, führt 3. allein zu keinen Verbesserungen in der Regelung. Jedoch werden sich in der Praxis diese Verschiebungen meist überlagern. — Im letzten Teil des Buches wird als Spezialfall der automatischen Regelung einer Bewegung mit mehr als einem Freiheitsgrad die Regelung der Längsschwingungen einer Rakete (bei Stellungszuordnung) untersucht (3 Freiheitsgrade). Es ergibt sich ein System von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten für die aero-



dynamischen Funktionen  $\alpha, \Theta$  und  $\nu$  von der Form:

$$p_{11}\alpha + p_{12}\Theta + p_{13}\frac{\nu}{V_0} = 0, \quad p_{21}\alpha + p_{22}\Theta + p_{23}\frac{\nu}{V_0} = 0, \quad p_{31}\alpha + p_{32}\Theta = 0$$

( $p_{11}, p_{12}, p_{13}$  sind Konstanten,  $p_{13}, p_{21}, p_{22}, p_{31}$  von der Form  $a + b \, d/dt$ ,  $p_{32}$  von der Form  $a \, d/dt + b \, d^2/dt^2$ ). Bei Regelung durch Querruder (ailerons) wird die rechte Seite durch  $\{0, -N_2 \eta, 0\}$ , bei Regelung durch das Höhenruder (elevator control) durch  $\{0, 0, N_3 \eta\}$  ersetzt ( $\eta = \pm \eta_0 \operatorname{sgn} F$  mit  $F = \Theta + \alpha \dot{\Theta}$ ). Die graphische Darstellung der Bewegung wird gegeben durch zwei „partielle“ Phasenkurven in zwei Ebenen. Auch hier liefern Schaltverzögerungen bei richtiger Parameterwahl verbesserte Ergebnisse. Als Anhang wird schließlich noch eine Konstruktionsanleitung für logarithmische Spiralen gegeben, die von L. S. Jacobsen stammt. Das vorliegende Buch ist das Ergebnis von Untersuchungen, die I. Flügge-Lotz während des Krieges gemeinsam mit H. F. Hodapp, K. Klotter, H. Meissinger und K. Scholz in Deutschland begonnen und in den vergangenen Jahren in den USA fortgeführt hat. Viele Beispiele und über 100 Diagramme erleichtern das Verständnis der oft sehr komplizierten Regelungsprobleme für den Techniker.

St. Schottlaender.

Grémillard, Jean: Sur les solutions périodiques de la troisième sorte dans le problème des trois corps. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 2339—2341 (1952).

Grémillard, Jean: Sur certaines solutions périodiques du problème des trois corps. C. r. Acad. Sci., Paris **236**, 49—51 (1953).

Grémillard, Jean: Sur la recherche des solutions périodiques de la troisième sorte. C. r. Acad. Sci., Paris **236**, 1952—1953 (1953).

Unter Zugrundelegung der Poincaréschen Gleichungen für die oskulierenden Elemente (vgl. H. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste I, Paris 1892, S. 144—152):

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial e} - k A_0 \frac{e \cos i}{\sqrt{1-e^2}} &= 0, & \frac{\partial R}{\partial e'} - k A'_0 \frac{e' \cos i'}{\sqrt{1-e'^2}} &= 0, \\ \frac{\partial R}{\partial i} - k A_0 \sqrt{1-e^2} \sin i &= 0, & \frac{\partial R}{\partial i'} - k A'_0 \sqrt{1-e'^2} \sin i' &= 0, \end{aligned}$$

$f_1 \equiv A_0 \sqrt{1-e^2} \cos i + A'_0 \sqrt{1-e'^2} \cos i' - C = 0$ ,  $f_2 \equiv A_0 \sqrt{1-e^2} \sin i - A'_0 \sqrt{1-e'^2} \sin i' = 0$ , (wobei  $R$  der mittlere Wert der Störungsfunktion während einer Periode der Bewegung,  $C$  die Flächenkonstante,  $k$  eine unbekannte Hilfsgröße ist), weist Verf. in der ersten Arbeit die Existenz von periodischen Lösungen der dritten Gattung nach (mit den Anfangsexzentrizitäten Null und geradem  $p - q > 4$  [ $n/n' = p/q$ ;  $p, q$  relativ prim, ganz;  $n, n'$  ( $n > n'$ ) die mittleren Bewegungen der beiden Planeten]). Für die Anfangsneigungen werden Entwicklungen nach Potenzen von  $q$  ( $q^2 = 2.4_0 + 2.1'_0 - 2C$ ) gegeben (vgl. C. L. Charlier, Die Mechanik des Himmels II, Leipzig 1907, S. 238, wo die Existenz solcher Lösungen bestritten wird). — In der zweiten Arbeit wird der Fall untersucht, daß  $p - q$  ungerade ist. In Anwendung einer Transformation von Poincaré (l. c. S. 150) erhält Verf. für hinreichend kleine  $q$  Entwicklungen nach Potenzen von  $q$  für  $e, e', i, i'$ , die erschließen lassen, daß für  $p - q > 1$  periodische Lösungen der dritten Gattung mit von Null verschiedenen Anfangsexzentrizitäten und kleinen Neigungen existieren; die Neigungen sind bezüglich  $q$  von der ersten Ordnung, die Exzentrizitäten von der Ordnung  $p - q - 1$ . Für  $q = 0$  kommt man auf die Bedingung für die Existenz von periodischen Lösungen der ersten Ordnung (vgl. Poincaré, l. c. S. 97—103). — In der dritten Arbeit werden die Betrachtungen von Poincaré über die Extremwerte von  $R$  ergänzt, indem gezeigt wird, daß der Lagrangesche Ansatz  $R + k f_1 + k' f_2$  in der Tat auf  $k' = 0$  führt.

O. Volk.

Sitnikov, K. A.: Über die Möglichkeit des Einfangs beim Dreikörperproblem. Mat. Sbornik, n. Ser. **32** (74), 693—705 (1953) [Russisch].

Die von anderer Seite bestrittene Möglichkeit des Einfangs beim Dreikörperproblem, die (1947) von O. J. Schmidt durch mechanische Integration an einem Gegenbeispiel bewiesen wurde, wird hier an einem weiteren Beispiel ohne das Hilfsmittel der mechanischen Integration gezeigt: Für  $t = 0$  befinden sich drei gleiche Massen in einem Bewegungszustand, der noch durch drei Parameter charakterisiert ist. Wenn gewisse Ungleichungen zwischen diesen Parametern bestehen, läßt sich nachweisen, daß für  $t \rightarrow -\infty$  die drei Abstände über alle Grenzen wachsen, während für  $t \rightarrow +\infty$  der Abstand zweier Körper unter einer gewissen Schranke bleibt, während der Abstand des dritten von diesen beiden gegen  $\infty$  strebt. Die Lösung ist stabil, da dieser Befund bei kleinen Änderungen der Anfangsbedingungen erhalten bleibt.

K. Stumpff.

Moser, Jürgen: Periodische Lösungen des restringierten Dreikörperproblems, die sich erst nach vielen Umläufen schließen. Math. Ann. 126, 325—335 (1953).

Im Anschluß an Untersuchungen von C. L. Siegel (Himmelsmechanik, Göttingen 1952, S. 175) wird die Frage nach der Existenz von periodischen Lösungen des restringierten Dreikörperproblems, die sich nach vielen Umläufen schließen, zurückgeführt auf die Untersuchung der Fixpunkte von  $\mathfrak{A}^p$  ( $p = 1, 2, \dots$ ), wo  $\mathfrak{A}$  eine inhaltstreue Abbildung im Kleinen bedeutet.  $\mathfrak{A}$  kann, wie gezeigt wird, auf die Normalform

$$A = a \cos \chi + b \sin \chi + \mathfrak{P}_4, \quad B = -a \sin \chi + b \cos \chi + \mathfrak{Q}_4$$

mit  $\chi = c_0 + c_1(a^2 + b^2)$  gebracht werden;  $\mathfrak{P}_4, \mathfrak{Q}_4$  sind Potenzreihen in  $a, b, \mu$ , die, nach  $a, b$  geordnet, nur Glieder von mindestens 4. Grade enthalten;  $c_0, c_1$  sind Potenzreihen in  $\mu$ . Unter der Voraussetzung daß  $c_1 \neq 0$  — was Siegel nicht prüft — kann der Birkhoffsche Fixpunktsatz angewendet werden; die Fixpunkte führen zu periodischen Lösungen, die sich erst nach  $p$  Umläufen ( $p$  Primzahl) schließen. Es gelingt dem Verf. der Nachweis, daß  $c_1 \neq 0$  und für  $\mu = 0$  ist:

$$\chi = 2\pi/\omega - [3(\omega + 1)/\omega^2] \pi(a^2 + b^2), \quad \lambda = e^{\pm 2\pi i/\omega};$$

für ein fest gewähltes  $\omega$  [ $\omega^3 \neq 0, 3n, 4n$  ( $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ )] gibt es für jedes feste hinreichend kleine  $\mu$  und zu einer genügend großen Primzahl  $p$  in der Nähe der Ausgangslösung periodische Lösungen, die sich erst nach  $p$  Umläufen schließen, somit zu jedem hinreichend kleinem  $\mu$  unendlich viele solcher Lösungen. O. Volk.

### Elastizität. Plastizität:

• Galerkin, B. G.: Gesammelte Werke. Bd. II. Moskau: Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR 1953. 438 S. R. 30. — [Russisch].

(Bd. I, dies. Zbl. 48, 421). Der vorliegende zweite Band enthält eine Sammlung der in den Jahren 1915—31 erschienenen Arbeiten des Verf. über die dünnen elastischen Platten. Von den vielen behandelten Problemen mögen hier die folgenden hervorgehoben werden: Biegung rechteckiger, auf nachgiebigen Randbalken aufliegender Platten durch gleichförmige Belastung (1915). — Biegung von Rechteckplatten mit freigestützten und eingespannten Rändern in verschiedener, jedoch der Lösungsmethode von Lévy stets zugänglicher Anordnung bei gleichförmiger und hydrostatischer Belastung (1916). Auch Einzellasten, die sich gleichförmig auf Rechteckflächen verteilen, sind in späteren Arbeiten (1923, 1931) behandelt worden. Der praktische Wert aller vorerwähnten Arbeiten besteht vor allem in einer großen Zahl numerischer Daten für die Durchbiegungen und Biegemomente von Platten in sämtlichen behandelten Fällen. — Durchlaufende Platten bilden den Gegenstand einer weiteren Arbeit (1927). — Eine große Zahl von Veröffentlichungen ist den freigelagerten Platten in Form eines gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecks gewidmet (1918, 1919, 1926, 1927), desgleichen den Kreissektor-Platten, die längs ihrer radialen Ränder gelenkig auflagern, sonst aber verschiedenen Randbedingungen unterworfen sind. — In einer Arbeit (1924) werden Wärmespannungen in Platten mit verschiedener Begrenzung behandelt. — Einen wesentlichen Teil des im vorliegenden Band abgedruckten Aufsatzes über die Behandlung von Plattenproblemen in isothermischen Koordinaten findet man auch in der Z. angew. Math. Mech. 3, 113—117 (1923). Auch die Lösung des Problems der punktweise gestützten Pilzdecke findet man in dem Sammelband. Bis auf wenige Ausnahmen sind die entwickelten Lösungen streng im Sinne der Kirchhoffschen Plattentheorie. Die nach dem Verf. benannte Näherungsmethode findet im Rahmen der vorliegenden Sammlung überhaupt keine Anwendung. Bei der Benutzung des Buches ist es wichtig, die in der Fußnote S. 55 festgelegte, sonst wenig gebräuchliche Bezeichnungsweise für die Plattenmomente zu beachten. S. Woinowsky-Krieger.

Pailloux, Henri: Nouvelles applications du calcul fonctionnel à la mécanique. Ann. sci. École norm. sup., III. Sér. 70, 1—49 (1953).

L'A. poursuit les applications de la méthode des „fonctions-paramètres“ qu'il a exposée dans un précédent mémoire (ce Zbl. 47, 422). Rappelons en quoi elle consiste: quand les configurations possibles du système ne constituent pas une variété de dimension finie, elles peuvent être obtenues en remplaçant les paramètres en nombre fini par des fonctions-paramètres; la transformation de Lagrange appliquée à l'équation de d'Alembert peut être alors généralisée au moyen du calcul fonctionnel. L'A. applique la méthode: 1° au mouvement d'une coque élastique isotrope en coordonnées curvilignes (nos. 1 à 7); 2° au problème élastique général à 3 dimensions (no. 8); 3° au mouvement des fluides parfaits (no. 9); 4° à des membranes dotées de diverses propriétés élastiques, planes au repos, et qui schématisent des assemblages réguliers de poutres (membrures de ponts) (nos. 11 à 16). Enfin les numéros 10 et 17 traitent de deux problèmes particuliers, dont le rapporteur n'aperçoit pas le lien avec la méthode de la fonction-paramètre, à savoir le mouvement „à une dimension“ d'un fluide parfait, et la recherche de la forme optimale des colonnes de révolution pour résister au flambement. Ce dernier problème conduit à une



équation simple, mais les constantes d'intégration semblent difficiles à déterminer. — Résumons les trois parties essentielles. I. Coque élastique. La méthode nécessite la détermination de l'énergie cinétique, du „potentiel de forme“, et des travaux virtuels des forces extérieures de volume et de surface. Ces expressions doivent être mises sous forme d'intégrales étendues à la surface médiane  $\Sigma$  de la coque. Une 1<sup>re</sup> et une 2<sup>e</sup> approximation sont envisagées successivement, selon que l'on néglige ou non les termes du 1<sup>er</sup> ordre par rapport à l'épaisseur. Le potentiel de forme est d'abord déterminé en coordonnées curvilignes à 3 dimensions. Il est obtenu à partir de son expression en coordonnées rectangulaires en remplaçant les dérivations par des dérivations covariantes. 1°  $\Sigma$  est définie par  $z = f(x, y)$ . Les équations sont établies en 2<sup>e</sup> approximation, puis appliquées en 1<sup>re</sup> approximation au cas d'une plaque plane homogène. Le problème est poussé assez loin au moyen du calcul symbolique dans le cas où la plaque est en équilibre sous l'action d'une pression, ou bien vibre librement. 2°  $\Sigma$  est de révolution. Le potentiel de forme est déduit de son expression générale. Supposant l'épaisseur et la densité constantes, l'équation des vibrations libres est obtenue en 2<sup>e</sup> approximation. On en recherche les solutions qui sont périodiques et de révolution. Dans le cas de la 1<sup>re</sup> approximation, l'épaisseur disparaît des équations, ce qui contredit les résultats expérimentaux connus sur les cloches, sauf peut-être pour des épaisseurs très faibles. — Recherche de la période fondamentale d'une cloche dont le sommet et le plan tangent en ce point sont fixes, la vibration étant dans le plan méridien. Une condition est nécessaire pour obtenir une période fondamentale unique. Le problème se ramène à des équations de Bessel quand la méridienne est de la forme  $z = \int \left[ \left( \frac{r}{a} \right)^{2k} - 1 \right]^{1/2} dr$ . 3°  $\Sigma$  est quelconque. Pour expliciter le potentiel de forme, l'A. met le  $ds^2$  de l'espace sous plusieurs formes remarquables. Il développe les calculs dans le cas des coordonnées orthogonales, puis plus explicitement quand  $\Sigma$  est rapportée à ses lignes de courbure. — II. Fluides parfaits. Pour appliquer la méthode, il faut tenir compte de l'équation de conservation de la masse, ce qui revient à imposer une condition aux mouvements virtuels. L'obtention des équations du mouvement semble ici plus compliquée que par les méthodes classiques mais donne lieu à des remarques intéressantes. — III. Assemblages de poutres élastiques. Le potentiel de forme est obtenu à partir des poutres en faisant augmenter leur nombre indéfiniment. L'assemblage comprend un cadre rectangulaire élastique rigide de côtés 1, 2, 3, 4 réunis par un ou deux systèmes de poutres parallèles équidistantes articulées ou encastrées avec ces côtés. Les poutres sont encastrées entre elles à leurs points de rencontre. L'A. étudie d'abord trois problèmes où l'assemblage reste plan, les côtés 1 et 3 subissant des charges données dans ce plan. 1° Les poutres sont parallèles à 2 et 4 et articulées avec 1 et 3. On obtient des équations différentielles ordinaires. 2° Les poutres sont encastrées avec 1 et 3. On obtient des équations aux dérivées partielles à 2 variables. 3° Il y a en outre un autre système de poutres parallèles à 1 et 3 et encastrées avec 2 et 4. L'équation est du 6<sup>e</sup> ordre à coefficients constants à 2 variables. — Considérant ensuite des problèmes où le plan initial se déforme, il calcule en général les courbures d'un plan déformé, puis étudie les deux questions suivantes, qui conduisent à des équations du 4<sup>e</sup> ordre: 4° Deux séries de poutres équidistantes inclinées symétriquement sur les côtés 1 et 3 réunissent ces deux côtés et sont encastrées avec eux, les côtés 1 et 3 étant toujours chargés dans la direction du plan. 5° Même assemblage qu'au 3° mais la charge est répartie sur tout le système et normale à son plan (plancher de béton). La méthode semble particulièrement bien adaptée à la mise en équations de ces types de problèmes.

R. de Possel.

Wegner, U.: Zwei Probleme der ebenen Elastizitätstheorie. Z. angew. Math. Mech. 33, 300—303 (1953).

Zwei aus Fragestellungen der Praxis entstandene Probleme der ebenen Elastizitätstheorie werden mit Hilfe der Variationsmethode gelöst: 1. rotierende Rechteckscheibe mit rechteckigem Hohlraum, 2. Rechteckscheibe, deren Hälften I und II verschieden beheizt sind. Für das erste Problem dient ein Potenz-, für das zweite ein Fourier-Ansatz. Über die numerischen Ergebnisse im einzelnen soll an anderer Stelle berichtet werden; beim Problem 1. ist interessant der Vergleich der Formeln mit denen der Balkentheorie, auf die man im Notfall als erste Näherung zurückgreifen würde.

K. Marquerre.

Tiffen, R.: Generalized stress problems in infinite elastic strips. Quart. J. Mech. appl. Math. 6, 344—369 (1953).

Nach der von verschiedenen Forschern verwendeten Methode der Lösung ebener elastostatischer Probleme durch komplexe Potentiale werden hier die folgenden Fälle für Streifenbereiche behandelt: Beliebige gegebene Spannungen oder Verschiebungen an den beiden Streifenrändern, gegebene Spannungen an dem einen

und Verschiebungen am anderen Rande. Einzelkräfte im Innern des Streifens mit denselben Randbedingungen. — Durch die verwendete Methode werden gewisse Konvergenzschwierigkeiten von Integralen, die bei den Lösungen mittels Fourier-scher Integrale auftreten, vermieden.

*Th. Pöschl.*

**Dean, W. R.:** The Green's function of an elastic plate. Proc. Cambridge philos. Soc. **49**, 319—326 (1953).

Verf. betrachtet eine dünne, unendlich ausgedehnte Platte, die längs des Randes  $y = 0$  von  $x = -1$  bis ins Unendliche fest eingespannt und durch eine Einzellast an beliebiger Stelle belastet ist. Die Verschiebung  $w$  in einem beliebigen Punkt  $(x, y)$  senkrecht zur Plattenebene wird durch eine biharmonische Funktion  $z - z_0^2 \log z - z_0$  gegeben, die an den Rändern mit ihren ersten Ableitungen verschwindet. Die Durchbiegung  $w$  hängt außerdem von den Koordinaten des Angriffspunktes  $z_0 = x_0 + i y_0$  ab. Es ist ferner bekannt, daß die Durchbiegung in bezug auf die Wertepaare  $(x_0, y_0)$  und  $(x, y)$  symmetrisch ist. Der gefundene geschlossene Ausdruck für  $w$  stellt somit die der Differentialgleichung und deren Randbedingungen zugeordnete Greensche Funktion dar. — Für die eingespannte Kreisplatte ist die Greensche Funktion der Durchbiegung von J. H. Michell aufgestellt, siehe z. B. Love, Mathematical Theory of Elasticity, 4. Aufl., New York 1944, S. 491.

*R. Gran Olsson.*

**Woinowsky-Krieger, S.:** Über die Biegung von Platten durch Einzellasten mit rechteckiger Aufstandsfläche. Ingenieur-Arch. **21**, 331—338 (1953).

Wenn eine dünne elastische Platte einer Belastung durch eine Punktlast ausgesetzt wird, ergeben sich unendlich große Biegemomente unter dem Angriffspunkt der Last. Dies hängt mit den bei der Aufstellung der Biegetheorie für die Platte gemachten Vereinbarungen zusammen. Bei der Dimensionierung einer Platte muß daher eine endliche Ausdehnung des Lastgebietes in mindestens einer Richtung angenommen werden, um zu praktisch brauchbaren Ergebnissen zu kommen. — Die Einzelkraft greife zunächst als Punktlast an und erzeuge gewisse Biegemomente am Anfang eines um den Lastangriffspunkt geschlagenen Kreises, dessen Halbmesser im Vergleich zu den Abmessungen der Platte klein sein möge. Danach verteile sich die gleiche Last achsensymmetrisch auf die Fläche jenes Kreises und verursache gewisse endliche Biegemomente in der Kreismitte. Das Verfahren von A. Nadai (Die elastischen Platten, Berlin 1925, S. 62) gestattet, von den erstgenannten durch die Greensche Funktion definierten Momenten auf die Momente im Mittelpunkt der Druckfläche zu schließen. — Das vom Verf. für rechteckige Lastflächen entwickelte, analoge Verfahren gestattet, von der Spannungsverteilung in der Umgebung einer Punktlast auf die Biegemomente im Schwerpunkt einer rechteckigen Druckfläche der Last zu schließen, dessen Lage mit der Stellung der Punktlast zusammenfällt. Die Genauigkeit des Verfahrens scheint völlig ausreichend zu sein und ist in der Regel um so besser, je stärker konzentriert die Last auftritt, d. h. je schlechter die Reihen der zugehörigen strengen Lösung konvergieren. Wie Verf. bemerkt, kann das neue Verfahren die Methode der Einflußflächen nicht ersetzen, scheint aber für den speziellen, in der Arbeit beabsichtigten Zweck mehr geeignet.

*R. Gran Olsson.*

**Strasser, A.:** Zur Beulung versteifter Platten. Österreich. Ingenieur-Arch. **7**, 262—270 (1953).

**Sengupta, H. M.:** On the bending of an elastic plate. IV. Bull. Calcutta math. Soc. **45**, 9—19 (1953).

[Teil III s. Bull. Calcutta math. Soc. **44**, 111—123 (1952)]. Ermittlung der Durchbiegung einer elastischen Platte von elliptischer Form, die am Rande eingespannt ist und die auf einer Rechtecksfläche, deren Seiten den Achsen der Ellipse parallel sind, mit einer gleichförmigen Flächenlast belastet ist. Es werden isometrische elliptische Koordinaten verwendet, und die Lösung wird durch geeignete Lösungen der Bipotentialgleichung aufgebaut.

*Th. Pöschl.*

**Neuber, H.:** Theorie der Druckstabilität der Sandwichplatte. I, II. Z. angew. Math. Mech. **32**, 325—337 (1952), **33**, 10—26 (1953).

Die Druckstabilität von Verbundplatten (im Englischen Sandwichplatten genannt) ist während und nach dem Kriege viel untersucht worden. Hier wird der zwei- und dreischichtige breite Stab behandelt — da Randführungen fehlen, handelt es sich nicht um eine „Platte“ im engeren Sinne. Die Arbeit geht aus von den all-



gemeinsten Stabilitätsgleichungen für die drei beliebig dicken Schichten und dringt durch schrittweise Vereinfachung bis zu Anwendungsdiagrammen vor. Natürlich ist der aus zwei kräftigen Außen- und einer weichen Innenschicht bestehende Stab (der nach Art eines I-Trägers arbeitet) dem zweischichtigen als Konstruktions- element weit überlegen.

K. Marguerre.

**Livesley, R. K.: Some notes on the mathematical theory of a loaded elastic plate resting on an elastic foundation.** Quart. J. Mech. appl. Math. 6, 32—44 (1953).

Es werden zunächst die nötigen angenäherten Voraussetzungen einer mathematischen Behandlung des im Titel der Arbeit angegebenen Problems erörtert. Die wichtigste in der Theorie enthaltene Näherung liegt in der Beziehung zwischen dem Gegendruck der Unterlage (d. h. des Fundaments) und der Durchbiegung der Platte. Ein kurzer Abriß über die Beziehungen, die in dieser Hinsicht von früheren Verf. vorgeschlagen worden sind, wird gegeben. Die Fälle, wo die Belastung rein statisch auftritt und der Bodendruck der örtlichen Durchbiegung der Platte direkt proportional angenommen wird, sind in Einzelheiten sowohl für die unendliche wie für die nach einer Seite unendliche („semiinfinite“) Platte erörtert. Wenn alle Ränder der Platte einfach unterstützt sind, werden Fourierintegrale zur Lösung der Aufgabe benutzt. Die Schwierigkeiten, die beim Auftreten anderer Randbedingungen entstehen, werden erörtert, und ein Verfahren zur Lösung bei eingespannten Rändern wird angegeben. Das Problem der nach einer Seite unendlichen Rechteckplatte, die einer vorgegebenen Verteilung der Querkkräfte und Biegemomente längs des freien Randes unterworfen ist, wird gelöst. — Weiter wird die gleichmäßig fahrende Einzellast auf einer unendlich ausgedehnten Platte in Einzelheiten diskutiert. Danach besteht eine gewisse kritische Geschwindigkeit, oberhalb welcher Spannungen und Durchbiegungen unendlich groß werden. Die maximalen Durchbiegungen und Biegemomente verglichen mit den entsprechenden statischen Werten sind als Funktionen eines Parameters  $\lambda$  ausgedrückt, der das Verhältnis der wirklichen zur kritischen Geschwindigkeit der bewegten Last kennzeichnet. Es wird nachgewiesen, daß, obwohl diese Durchbiegungen und Spannungen größer als ihre statischen Werte sind, die Steigerung gering bleibt, solange sich der Parameter  $\lambda$  nicht Eins nähert.

R. Gran Olsson.

**Capildeo, R.: Flexure with shear centres: A general treatment with complex variable.** Proc. Cambridge philos. Soc. 49, 308—318 (1953).

Im Nachgang zu einer demnächst erscheinenden Arbeit des Verf. gemeinsam mit A. C. Stevenson über die Anwendung der Torsionsfunktion (Stevenson, dies. Zbl. 31, 52) bei der Lösung von Biegeproblemen werden einfach zusammenhängende Querschnitte behandelt, die sich auf den Einheitskreis abbilden lassen, und doppeltzusammenhängende Querschnitte, die auf den Kreisring abgebildet werden können (Beispiele: Biegungszentrum von Epizykloide und Kardioid; Hohlwelle, deren Querschnittsberandungen exzentrische Kreise sind).

J. Pretsch.

**Karunes, B.: On the distribution of stress round the edge of a hole in a deep beam under a uniform bending moment.** Indian J. Phys. 27, 373—378 (1953).

Es wird eine Lösung des Problems der Spannungskonzentration infolge der Anwesenheit eines spannungsfreien Loches von einigermaßen allgemeiner Gestalt in einem hohen Plattenbalken unter der Einwirkung eines konstanten Biegemomentes gegeben. Die Lösung wird für die Fälle des kreisförmigen und elliptischen Loches bestätigt, die bereits bekannt sind. Außerdem werden einige neue Ergebnisse mit Hilfe der Lösung gefunden. Die vom Verf. benutzte Methode wurde von A. E. Green [Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 184, 231—252 (1945)] eingeführt.

R. Gran Olsson.

**Karunes, B.: On the concentration of stress round the edge of a hole bounded by two intersecting circles in a large plate.** Indian J. Phys. 27, 208—212 (1953).

In einer Arbeit hat C. B. Ling [J. appl. Phys. 19, 405—411 (1948)] die Spannungskonzentration angegeben, die in einer unendlich ausgedehnten Platte um ein Loch entsteht, das durch zwei sich schneidende Kreise vom gleichen Durchmesser begrenzt wird, wobei verschiedene Annahmen über die im Unendlichen wirkenden Druck- oder Zugspannungen gemacht wurden. Diese Untersuchung wird nun dahin erweitert, daß im Unendlichen Schubspannungen konstanter Größe in Betracht gezogen werden. Bei der Lösung werden Bipolarkoordinaten benutzt, die eine einfache Formulierung der Randbedingungen (spannungsfreie Ränder) gestatten. Die Dif-

ferentialgleichung der zugehörigen Airyschen Spannungsfunktion sowie die allgemeinen Ausdrücke der Spannungen konnten von G. B. Jeffery [Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 221, 265–273 (1920)] übernommen werden. Bezeichnen  $a$  die halbe Entfernung der Lochmittelpunkte und  $b$  den Lochdurchmesser, wird der Spannungsverlauf abhängig vom Parameter  $a/b$  angegeben. *R. Gran Olsson.*

**Mansfield, E. H.:** Neutral holes in plane sheet. Reinforced holes which are elastically equivalent to the uncut sheet. Quart. J. Mech. appl. Math. 6, 370–378 (1953).

**Lein, G.:** Die Torsionssteifigkeit von kreuzförmigen Querschnitten. Ingenieur-Arch. 21, 352–364 (1953).

**Federhofer, Karl:** Der senkrecht zu seiner Ebene belastete, elastisch gebettete Kreisringträger. Z. angew. Math. Mech. 33, 292–293 (1953).

**Bressan, Aldo:** Sulle deformazioni dei corpi cristallini cilindrici nello schema di de Saint Venant. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 22, 281–293 (1953).

L'A. considera il problema di De Saint-Venant per un solido cristallino cilindrico omogeneo,  $C^*$ , dotato di tre piani di simmetria cristallografica e dimostra che nei casi di estensione semplice, flessione pura e torsione, se le costanti elastiche di  $C^*$  verificano una certa condizione esistono cilindri omogenei ed isotropi,  $C_1$ , geometricamente uguali a  $C^*$  che sotto opportune sollecitazioni dello stesso tipo di quelle agenti su  $C^*$  ne assumono la medesima deformazione. In tali casi il problema di determinare la deformazione di  $C^*$  si riconduce all'analogo per  $C_1$ . Se invece  $C^*$  è sollecitato a flessione non uniforme l'A. dimostra che non esiste un  $C_1$  avente la medesima deformazione di  $C^*$  ad eccezione del caso che il risultante delle forze agenti su una delle basi di  $C^*$  sia parallelo ad uno dei due assi centrali di inerzia trasversali di  $C^*$ . La soluzione è in tal caso rappresentata da uno stato tensionale polinomiale di secondo grado. A tal proposito l'A. osserva che il problema della flessione non uniforme ammette un tal tipo di soluzione anche in casi diversi da quello ben noto dei corpi cilindrici a sezione ellittica. *G. Grioli.*

**Föppl, Ludwig:** Spannungen und Formänderungen von Ringschalen mit elliptischen Meridiansechnitten. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1952, 75–92 (1953).

Gegeben sei eine Ringschale von elliptischem Querschnitt (Halbachsen  $a, b$ , Abstand des Ellipsenmittelpunktes von der Rotationsachse  $r_0$ ) und der Wandstärke  $h$ . Die Belastung bestehe im Vorhandensein eines konstanten, inneren Überdruckes  $p$ . Welche Spannungszustände treten auf? Nach H. Lorenz [Z. VDI 54, 1865–1867 (1910)] treten nur Längs-, nicht aber auch Biegespannungen auf. Nun treten aber bereits beim geraden, elliptischen Rohr unter Innendruck Biegespannungen auf, da der Druck den Querschnitt kreisförmig zu gestalten trachtet. – Ähnliches ist daher auch hier zu erwarten. Verf. bringt eine Neulösung des Problems, indem er von vornherein den Innendruck in zwei Teile zerlegt:  $p = p_1 + p_2$ , von denen der eine,  $p_1$ , nur Längsspannungen, der andere,  $p_2$ , nur Biegespannungen erzeugen soll. Diese Methode wird erst am geraden, elliptischen Rohr ausprobiert und dann auf das eigentliche Problem, die Bestimmung des Spannungszustandes von Ringschalen mit elliptischen Meridianquerschnitten, übertragen. *E. Hardtwig.*

**Krettnner, J.:** Beitrag zur Anwendung der Tensorrechnung auf die Theorie der Schalen. Ingenieur-Arch. 21, 339–345 (1953).

In einer früheren Arbeit hat Verf. mit Hilfe der Tensorrechnung die Gleichungen der Elastostatik für die schiefwinklge Platte angegeben, während in vorliegender Arbeit die Untersuchungen auf die Theorie der Schalen erweitert werden. Die Formänderungsgrößen der Schalenmittelfläche sowie der Schale selbst werden wieder mit Hilfe der Tensorrechnung abgeleitet und der Verzerrungstensor der Schale aufgestellt. Wegen seiner praktischen Bedeutung wird auf den Fall der orthogonalen Formänderung besonders eingegangen. Am Beispiel der Zylinderschale wird der Vorteil des angewandten Verfahrens veranschaulicht. In einer weiteren Arbeit soll auf einige Sonderfälle der Schalentheorie noch näher eingegangen werden. [Ref. kann weder i



dieser noch in der früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 50, 399) in der Methode oder im Inhalt etwas Neues finden. Sofern es die methodische Behandlung des vorliegenden Themas mit Hilfe von Tensoren betrifft, gibt es Darstellungen von größerer Klarheit in älteren Arbeiten wie z. B. in den Arbeiten von I. Brillouin [Ann. de Physique, X. Sér. 4, 528—586 (1925)], F. D. Murnaghan (dies. Zbl. 17, 155), F. S. Sokolnikoff, Tensor analysis, theory and applications (New York 1951, dies. Zbl. 45, 243), wo weitere Hinweise zu finden sind; siehe auch F. S. Sokolnikoff, Mathematical theory of elasticity (New York 1946), wo man ebenfalls viele Hinweise auf weiteres Schrifttum findet.

R. Gran Olsson.

**Krettner, J.: Anwendung der Tensorrechnung auf die Theorie der Rotationschalen.** Österreich. Ingenieur-Arch. 7, 246—254 (1953).

Anwendung der in der ersten Mitteilung (dies. Zbl. 50, 399) entwickelten Tensorrechnung elastischer Systeme auf die Theorie der Rotationsschalen. Berechnung der Deformationen und Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen. Die Ergebnisse werden durch Spezialisierung aus den allgemeinen Formeln des Ref. (Theoretische Mechanik, Berlin 1949, Kap. III, § 4, dies. Zbl. 36, 243) gewonnen werden können. Bemerkenswert, daß in d) Formel 3 die Beziehung zwischen den Torsionsmomenten richtig angegeben ist.

G. Hamel.

**Neuber, H.: Vereinfachung der Grundgleichungen der elastischen Stabilität mit Anwendung auf Stäbe, Platten und Schalen.** Z. angew. Math. Mech. 33, 286—290 (1953).

Die linearen Stabilitätsprobleme werden aus der Elastizitätstheorie großer Deformationen durch vereinfachende Annahmen heraus-, „präpariert“. Will man das Verhalten des elastischen Körpers zwischen dem spannungsfreien Zustand und dem kurz vor der Instabilität in die Rechnung einbeziehen, so entstehen gewisse Unsicherheiten über das zu wählende Elastizitätsgesetz. Der Gedanke des Verf. ist es, diese Unsicherheiten dazu auszunützen, in den Gleichungen kleine Terme, die auf die Höhe der Kriechlast ohne Einfluß sind, die mathematische Behandlung aber erschweren, weinzuswerfen. Diese Experimental-Mathematik erweist sich als zulässig bei Stab und Platte, und sie mag daher auch bei komplizierteren Problemen heuristischen Wert haben. (Anmerkung des Ref.: Wesentliches über den Fragenkomplex findet sich in der nicht zitierten Arbeit von R. Kappus, dies. Zbl. 22, 86. — Es ist vielleicht interessant, darauf hinzuweisen, daß der Neubersche Dreifunktionensatz im Kern auf Boussinesq zurückgeht und in USA nach Papkowitch genannt wird, der ihn in dieser Vollständigkeit zuerst vorgeschlagen hat, dies. Zbl. 5, 226.)

K. Marguerre.

**Reissner, Eric: On a variational theorem for finite elastic deformations.** J. Math. Physics 32, 129—135 (1953).

Ein Variationsprinzip, aus dem Gleichgewichts- und Elastizitätsbeziehungen gewonnen werden können, hat der Verf. 1950 (dies. Zbl. 39, 405) veröffentlicht. Die vorliegende Arbeit zeigt, daß das Prinzip sich auch für endliche Deformationen aussprechen läßt, wenn man die Spannungs- und Dehnungsdefinitionen von Trefftz-Kappus benutzt. Als ein Beispiel für eine über Hooke hinausgehende Energiefunktion  $W$  (die Ableitungen nach den Spannungen liefern die Verzerrungen) wird Rivlins Ansatz diskutiert (dies. Zbl. 29, 327). Als eine Anwendung des Prinzips werden die Plattengleichungen für kleine und für große Deformationen hergeleitet.

K. Marguerre.

**Ziegler, Hans: Linear elastic stability. A critical analysis of methods.** Z. angew. Math. Phys. 4, 89—121 (1953).

Verf. stellt die verschiedenen Verfahren zur Lösung von Stabilitätsproblemen in elastischen Systemen zusammen und unterwirft sie an vielen durchgerechneten Beispielen einem kritischen Vergleich. Die Übersicht ist auf holonome und skleronome Systeme mit linearisierbaren Differentialgleichungen beschränkt und behandelt mechanische Systeme, lineare Systeme und elastische Stabilität; im zweiten Teil soll folgen Ausbeulen durch Druck, Ausbeulen durch Torsion, kritische Winkelgeschwindigkeiten.

J. Pretsch.

● **Novozhilov, V. V.: Foundations of the nonlinear theory of elasticity.** Translated from the first (1948) russian ed. by F. Bagemihl, H. Komm and W. Seidel. Rochester, N. Y.: Graylock Press 1953. VI, 233 p.

Etwa drei Viertel des Buches betreffen die allgemeinen Entwicklungen über den

Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen in einem isotropen elastischen Körper, ohne irgendwelche Beschränkungen über die Größe der auftretenden Verschiebungen, Dehnungen und Drehungen der Teilchen der betrachteten Körper. Auf exakte Formulierung der Grundgleichungen und der Randbedingungen wird besonderer Wert gelegt. Den Rest des Buches bildet eine Darlegung der folgenden Probleme in allgemeiner Formulierung: Die Stabilität des elastischen Gleichgewichts und die Theorie der Stäbe, Platten und Schalen bei großen Verformungen. Ausführliches Schriftenverzeichnis.

Th. Pöschl.

Koiter, W. T.: Einige ergänzende Bemerkungen zum Aufsatz des Herrn Woinowsky-Krieger im Ingenieur-Archiv, Bd. XX, Seite 391. Ingenieur-Arch. 21, 381 (1953).

Die Bemerkungen beziehen sich erstens auf die Wahl des Integrationsweges für die Mellinsche Umkehrformel, die in der Arbeit von Woinowsky-Krieger nicht näher begründet wurde (dies. Zbl. 47, 425); zweitens auf die Berechnung des Randmomentes, das für eine Querdehnungszahl  $\nu = 0$  bei einem Öffnungswinkel  $\alpha = \pi/2$  gegen den endlichen Wert  $P\pi/2$  und nicht gegen Unendlich geht. Die dritte Bemerkung gilt ebenfalls einer Platte mit dem Öffnungswinkel  $\alpha = \pi/2$ , wo der Verlauf des Randmomentes in der Nähe der Ecke für  $\nu = 0$  vom Verlauf für  $\nu = 1$  wesentlich verschieden ist. Bei der Diskussion des Spannungsmomentes für einen Öffnungswinkel  $\alpha = \pi$  macht Verf. endlich auf den oszillierenden Charakter der Singularität in der Ecke aufmerksam, herrührend von gewissen trigonometrischen Funktionen, die das Spannungsmoment darstellen.

R. Gran Olsson.

Jung, H.: Berechnung des Niederhalterdrucks beim Tiefziehen. Österreich. Ingenieur-Arch. 7, 273—284 (1953).

Aus einer runden Blechscheibe vom Durchmesser  $2r_a$  und der Dicke  $h$  soll ein kreiszyndrisches Näpfchen vom Durchmesser  $2r_0$  und der Wandstärke  $h$  hergestellt werden. Die Blechscheibe wird auf eine Matrize aufgelegt und im Bereich  $r_0 < r < r_a$  durch einen Niederhalter mit der Kraft  $P_N$  festgedrückt. Die zur Herstellung des Näpfchens erforderliche Verformung wird durch Tiefziehen mittels eines zylindrischen Stempels, der im Raum zwischen dem Niederhalter bewegt wird, bewerkstelligt. Ziel der Arbeit ist die Analyse der Vorgänge beim Tiefziehen. Dabei bedient sich Verf. der theoretischen Entwicklungen einer vorhergehenden Arbeit (dies. Zbl. 50, 400). Zunächst wird der Ziehvorgang unter der Annahme behandelt, daß das Blech seine Dicke beibehält. Sodann wird eine Näherungstheorie zur Bestimmung der Beulgrenze aufgestellt und schließlich die Berechnung des Niederhalterdrucks angegeben. Ein Zahlenbeispiel und ein Vergleich mit Versuchsergebnissen beschließt die Arbeit.

F. Reutter.

Colonnetti, Gustavo: Expression généralisée du théorème de réciprocité. I. I. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 589—591, 635—637 (1953).

Ausgehend von einem Volumenteil  $V$  mit Oberfläche  $S$  des undeformierten Grundzustandes seien zwei durch den Index  $i$  unterschiedene infinitesimal verzerrte Gleichgewichtszustände vorgelegt mit:  $u_i$  = Verschiebungsvektor,  $\tilde{\varepsilon}_i$  = irreversibler Anteil der Verzerrungsmatrix,  $\tilde{\varepsilon}_i$  = elastischer Anteil der Verzerrungsmatrix,  $\mathfrak{P}_i$  = Spannungsmatrix,  $\mathfrak{f}_i$  = Volumkräfte,  $\hat{f}_i$  = Oberflächenkräfte. Nimmt man für den Ansatz des Kräftegleichgewichtes in jedem der beiden Zustände a virtuelle Verrückungen die Verschiebungen des anderen Zustandes, so entsteht wegen  $\int_V [\mathfrak{P}_1 \tilde{\varepsilon}_2 - \mathfrak{P}_2 \tilde{\varepsilon}_1] dV = 0$  die Beziehung:

$$\int_V [\mathfrak{f}_1 \cdot u_2 - \mathfrak{f}_2 \cdot u_1 - \mathfrak{P}_1 \tilde{\varepsilon}_2 + \mathfrak{P}_2 \tilde{\varepsilon}_1] dV + \int_S [\hat{f}_1 \cdot u_2 - \hat{f}_2 \cdot u_1] dS = 0$$

als allgemeinste Gestalt des Reziprozitätsgesetzes infinitesimaler Verzerrungen.  $\tilde{\varepsilon}_1 = \tilde{\varepsilon}_2 = 0$  liefert das Theorem von Betti der klassischen Elastizitätstheorie. Weitere bekannte Ergebnisse entstehen bei  $\tilde{\varepsilon}_1 = \mathfrak{f}_2 = \hat{f}_2 = 0$  und bei  $\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{f}_2$ ,  $\hat{f}_1 = \hat{f}_2 = 0$ .

H. Richter.



**Shield, R. T.:** Mixed boundary value problems in soil mechanics. Quart. appl. Math. 11, 61—75 (1953).

Der Boden wird als plastisches Material angenommen, in dem Gleiten oder Fließen gemäß der Coulombschen Reibungsbedingung erfolgt. Es werden einfache Geschwindigkeitsfelder untersucht, die gewissen Scharen von geraden Linien als Gleitlinien zugeordnet sind, und Unstetigkeiten im Geschwindigkeitsfeld zugelassen. Die erhaltenen Ergebnisse werden angewendet, um das anfängliche Geschwindigkeitsfeld für das Eindringen eines flachen Stempels oder eines Keils in einen unendlichen Halbraum zu erhalten.

*Th. Pöschl.*

**Torre, C.:** Beziehung zwischen den Charakteristiken und einer Berührungs-transformation. Österreich. Ingenieur-Arch. 7, 32—38 (1953).

Es handelt sich um die Identität zwischen: a) den Richtungen, die durch den Berührungspunkt eines Mohrschen Spannungskreises mit seiner Enveloppe definiert sind — wobei die Kreisschar durch eine Beziehung  $F(\sigma_1, \sigma_2) = 0$  zwischen den Hauptspannungen gegeben ist, und b) den charakteristischen Richtungen des zugehörigen ebenen Plastizitätsproblems. (Die gleichen mathematischen Verhältnisse finden sich in mehreren Anwendungsgebieten.) Dieser, hier nur andeutungsweise formulierte Satz wurde 1942 von J. Mandel bewiesen (Equilibres par tranches planes..., Diss. Paris), 1950 von Hill (The mathematical theory of plasticity, London 1950, insbesond. S. 295; dies. Zbl. 41, 108) und 1952 von Geiringer (dies. Zbl. 48, 183; insbesond. S. 385 der Arbeit) in wohl kaum mehr zu vereinfachender Weise dargestellt. Der Ref. kann nicht sehen, daß mathematisch zu diesen Beweisen durch die vorliegende Arbeit etwas hinzugekommen ist (eher das Gegenteil, da der Teil b) aus der Literatur übernommen wird), außer daß statt von „Einküllenden“ von „Berührungstransformationen“ gesprochen wird. — Es wird weiter untersucht und mit Erfolg diskutiert, wie weit die mathematischen Ergebnisse mit Beobachtungen übereinstimmen.

*H. Geiringer.*

**Torre, C.:** Theorie zähfester und firmo-viskoser Stoffe. Z. angew. Math. Mech. 33, 300 (1953).

**Ono, Akimasa:** Tube-wall of material without a significant yield-point — a study of the plastic distortion caused by the internal pressure. Proc. Japan Acad. 29, 115—120 (1953).

**Ono, Akimasa:** Stress and strain in metals undergoing plastic flow. Tube-wall subjected to axial pull and internal pressure. Proc. Japan Acad. 29, 224—229 (1953).

**Prager, William:** On the use of singular yield conditions and associated flow rules. J. appl. Mech. 20, 317—320 (1953).

Zur Darstellung des mechanischen Verhaltens eines vollständig plastischen Stoffes ist es erforderlich, dieses als die Aufeinanderfolge einer Fließbedingung und eines Fließgesetzes zu betrachten: Die Fließbedingung gibt ein Kriterium für den Eintritt, das Fließgesetz für den Verlauf des Vorganges. Nach Tresca wird die Verteilung der Fließspannungen durch ein rechtwinkliges hexagonales Prisma, nach v. Mises die Richtung des Fließens proportional den Cosinus der äußeren Normalen der Fließfläche angenommen. Diese Normale ist aber in den Ecken der Fließfläche nicht definiert, daher ist es erforderlich, für die Seitenflächen einen Ansatz von der Form  $\dot{\sigma} = \alpha_1 \sigma_1 + \alpha_2 \sigma_2 + \alpha_3 \sigma_3$  mit geeignet gewählten Konstanten anzunehmen. Dieser Gedanke wird für den Fall eines kreisförmigen Hohlraums und für den Vorgang der Dehnungsverfestigung näher ausgeführt.

*Th. Pöschl.*

**Thomas, T. Y.:** Singular surfaces and flow lines in the theory of plasticity. J. rat. Mech. Analysis 2, 339—381 (1953).

Verf. betrachtet die Fließlinien, die an der Oberfläche von Metallen und anderen Substanzen, die über die Fließgrenze gedehnt werden, entstehen, als die Schnittlinien von gewissen singulären Flächen mit der Oberfläche der Körper, die verschiedene Bereiche im Innern begrenzen. Zwei Arten von solchen Flächen sind von

besonderer Bedeutung, nämlich die Gleitflächen (slip surfaces) und die  $W$ -Flächen ( $W$ -surfaces). Diese umschließen jeweils „geschwächte“ Bereiche des Körpers, die durch eine der bekannten Fließbedingungen gekennzeichnet werden. Auf diese Weise scheint es möglich, eine Erklärung dafür zu gewinnen, daß die Gleitlinien ein System von diskreten Flächen in bestimmten Abständen bilden. Die exakte Bestimmung der  $W$ -Flächen erfordert die Integration eines ziemlich verwickelten nicht-linearen Randwertproblems, und zwar schon für den Fall des einfachen Zugs oder Drucks, für welche die meisten experimentellen Daten zusammen gestellt werden. Es wird auch die Transformation der Gleichungen auf Zylinder koordinaten gegeben, auch schraubenförmige Gleitflächen werden betrachtet.

Th. Pöschl.

**Neuber, H.: Bruchflächentheorie für das ebene anisotrope Plastizitätsproblem.** Z. angew. Math. Mech. 33, 293—299 (1953).

Verf. versucht die Bruchbedingung anisotroper Stoffe mathematisch zu formulieren, erhält aber — wie er auch zugibt — gleiche Ausdrücke wie für isotrope Stoffe. Hier gibt es jedoch keine Widersprüche, weil eine allgemein angegebene Grenzbedingung  $\sigma_1 = \sigma_1(\sigma_3)$ , mit der in diesem Fall gearbeitet wird, sowohl für isotrope als auch für anisotrope Stoffe gilt. Erst in einem quantitativen, zahlenmäßig angegebenen Ausdruck dieser Grenzbedingung kommt die Isotropie bzw. die Anisotropie zur Geltung [siehe v. Mises, Z. angew. Math. Mech. 8, 161—185 (1928)]. Dann hängt freilich auch der Bruchwinkel von der Anisotropie ab, der mit der Auswahl der Grenzbedingung veränderlich ist:  $\operatorname{tg}^2 \beta_0 = d\sigma_1/d\sigma_3 = \sigma'_1$  [siehe C. Torre, Österreich. Ingenieur-Arch. 1, 36—50 (1946)]. Dann muß auch die Hüllkurve, die Grenzfläche im KS. ( $\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1$ ), usw. von der Anisotropie abhängen. Es läßt sich leicht berechnen, daß sich der Gleitwinkel nach obiger Gleichung für ideal-plastische anisotrope Stoffe  $\beta_0 = 45^\circ$  gleich dem bei isotropen Stoffen ergibt (mit der Grenzbedingung von v. Mises, loc. cit.). Erst die Annahme des linearen Gliedes ( $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ ) in der quadratischen Grenzbedingung liefert einen Unterschied zwischen den Bruchwinkeln isotroper und anisotroper Stoffe. Ein Paraboloid z. B. im KS. ( $\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1$ ) mit der Hauptachse  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  ist für isotrope Stoffe (Metalle) ein Rotationsparaboloid, für anisotrope Stoffe dagegen ein elliptisches Paraboloid. Die Mohrschen Spannungskreise bleiben Spannungskreise in beiden Fällen, denn das Bild 2 von Neuber hat eine spezielle Koordinate ( $\sigma_x - \sigma_y$ ) entsprechend den zwei zu den  $x$ - und  $y$ -Achsen senkrechten Schnitten, während die  $\sigma$ -Abszisse bei Mohr die Normalspannungen des gesamten Spannungszustandes enthält. Nur im ideal-plastischen Fall sind die Fließlinien mit den Charakteristiken der partiellen Differentialgleichungen identisch. Im allgemeinen Fall stimmen diese nicht ganz überein: Im Druckgebiet besser als im Zuggebiet [siehe C. Torre, Österreich. Ingenieur-Arch. 1, 338, Abb. 14 (1946)]. Wie ersichtlich, sind die allgemeinen Gleichungen der Bruchtheorie in der Art abgeleitet, daß auch die anisotropen Stoffe erfaßt sind, so daß sich das Verfassen einer Abhandlung von prinzipieller Bedeutung erübrigt. Es wäre jedoch der Mühe wert, quantitative Grenzbedingungen für isotrope und anisotrope Stoffe anzugeben und die Theorie mit den Versuchsergebnissen zu vergleichen.

C. Torre.

**Kupradze, V. D.: Die Randwertaufgaben der Theorie der stationären elastischen Schwingungen.** Uspechi mat. Nauk 8, Nr. 3 (55), 21—74 (1953) [Russisch].

L'A. expose l'état actuel du problème des vibrations des corps élastiques, soumis aux forces massiques sinusoïdales. Les corps vibrants, supposés homogènes et isotropes, peuvent remplir un domaine borné  $D_1$ , limité par une surface  $S$ , régulière au sens de Liapounov, ou le complémentaire  $D_2$  de  $D_1$ . On sait que la question revient à définir dans  $D_1$  (problème intérieur) ou  $D_2$  (problème extérieur) un champ vectoriel  $\vec{V}(x, y, z)$ , solution régulière de:

$$(1) \quad \Delta \vec{V} + [(\lambda + \mu)/\mu] \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{V} + k^2 \vec{V} = 0$$

assujettie à vérifier des conditions aux limites de trois types: 1.  $\vec{V}$  est connu sur  $S$ , 2. Les tensions sont connues sur  $S$ , 3. Les données sur  $S$  sont du type 1 sur une portion de  $S$  et du type 2 sur la portion restante. Bien entendu, les données frontières et l'allure de  $\vec{V}$  à l'infini sont soumises à des restrictions convenables. A noter que pour  $k = 0$ , on retombe sur le problème de l'équilibre élastique. — L'objet essentiel du présent travail est de donner des théorèmes d'existence et d'unicité pour les trois problèmes aux limites qu'on vient d'énoncer. En gros, la marche des raisonnements est analogue à celle suivie, autrefois pour résoudre, au moyen d'équations intégrales, les problèmes classiques de Dirichlet et de Neumann, relatifs à l'équation de Laplace. L'A. commence par construire des solutions, dites élémentaires de (1), de divers types et d'en décrire avec soin les propriétés essentielles. L'usage de ces solutions, combiné avec celui des théorèmes de l'énergie permet d'obtenir des énoncés d'unicité. Puis, l'A. introduit divers



types de potentiels dont les propriétés conduisent aux équations intégrales des problèmes 1, 2, 3. Les équations sont du type de Fredholm, mais elles sont singulières. Des précautions supplémentaires sont nécessaires avant de leur appliquer les conclusions de la théorie ordinaire. Les énoncés d'existence sont obtenus. — L'A. passe rapidement en revue les cas où les problèmes posés sont susceptibles d'être résolus explicitement. Au point de vue bibliographique, signalons que les théorèmes d'unicité sont de l'A.; l'étude des équations intégrales singulières du type utilisé dans le présent travail est de Michlin.

*J. Kravtchenko.*

**Szegö, Gabor:** On the vibrations of a clamped plate. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 573—577 (1953).

Soient  $D$  un domaine plan;  $\Gamma$ , sa frontière;  $A$ , son aire. Considérons dans  $D$  les solutions régulières de l'équation de la membrane (1)  $\Delta u + \lambda^2 u = 0$ , nulles sur  $\Gamma$ . Relativement à la plus petite valeur propre  $\lambda_1$  ( $\lambda_1 > 0$ ) de (1); Rayleigh a émis l'hypothèse que pour tout  $D$  on avait  $\lambda_1 \geq j\sqrt{\pi/A}$  [où  $j = 2,41 \dots$  est la plus petite racine positive de  $J_0(x) = 0$ ]; l'égalité ne pouvant être atteinte que pour le cercle d'aire  $A$ . La démonstration a été donnée en 1924 par Faber et Krahn. Une propriété similaire a été annoncée pour l'équation de la plaque (2)  $\Delta \Delta u - \lambda^4 u = 0$ , régulière dans  $D$ , nulle, avec sa dérivée normale, sur  $\Gamma$ . Il s'agit de prouver que la plus petite valeur propre  $\lambda_1$  vérifie, pour tout  $D$ , l'inégalité  $\lambda_1 \geq k\sqrt{\pi/A}$ , où  $k = 3,2 \dots$  est la plus petite racine positive d'une équation transcendante. L'A. démontre la propriété, moyennant l'hypothèse que la fonction propre de (2), associée à  $\lambda_1$  n'a ni ligne ni points nodaux. Puis il signale qu'il est impossible de justifier ce dernier point en utilisant la fonction de Green  $G$  relative à (2), car celle-ci n'a pas, en général, un signe constant dans  $D$  — ainsi qu'on peut le montrer sur quelques exemples. A noter que cette propriété de  $G$  permet de répondre par la négative à une question posée par Hadamard.

*J. Kravtchenko.*

**Iguchi, S.:** Die Eigenschwingungen und Klangfiguren der vierseitig freien rechteckigen Platte. Ingenieur-Arch. 21, 303—322 (1953).

In dieser Arbeit werden Lösungen für die Eigenschwingungen und Klangfiguren der vierseitig freien rechteckigen Platte angegeben, die sowohl die Differentialgleichung als auch die Randbedingungen vollkommen befriedigen. Die Schwingungsflächen werden nach ihren Gestalten in drei Schwingungsarten eingeteilt. Bei der ersten Schwingungsart ist die Schwingungsfläche symmetrisch in bezug auf die beiden Mittellinien des Rechtecks. Diese Schwingungsart wird in zwei Familien eingeteilt, wobei die Platte im ersten Fall nicht nur in bezug auf die beiden Mittellinien, sondern auch auf ihre beiden Diagonalen symmetrisch schwingt. Bei der zweiten Familie schwingt die Platte dagegen antisymmetrisch in bezug auf die beiden Diagonalen. Bei der zweiten Schwingungsart schwingt die Platte antisymmetrisch in bezug auf die beiden Mittellinien des Rechtecks, wobei eine ähnliche Unterteilung in zwei Familien vorgenommen wird. Man sieht, daß die Platte in der ersten sowie in der zweiten Schwingungsart so schwingt, daß die Auslenkung einer beliebig durch den Mittelpunkt des Quadrats gezogenen geraden Linie symmetrisch in bezug auf diesen Punkt ist. Bei der dritten Schwingungsart wird der Schwingungsfall betrachtet, in dem eine solche Linie antisymmetrisch in bezug auf ihren Mittelpunkt schwingt, wobei ähnlich wie oben eine weitere Einteilung nach drei Familien vorgenommen wird. Als Anwendungsbeispiele werden die den verschiedenen Tönhöhen jeder Schwingungsart entsprechenden 23 Eigenwerte ausgerechnet. Außerdem werden die sich daraus ergebenden 35 Knotenfiguren der Schwingungsfläche, also die Klangfiguren angegeben, die sowohl mit den von Chladni als auch mit den vom Verf. experimentell gebildeten Sandfiguren genügend genau übereinstimmen.

*R. Gran Olsson.*

**Pearson, J. D.:** The transient motion of sound waves in tubes. Quart. J. Mech. appl. Math. 6, 313—335 (1953).

Betrachtet werden Schallbewegungen in einer unendlich langen Röhre mit zunächst konstantem Querschnitt  $A$ , die mit einem vollkommenen Gas gefüllt ist. Zu Anfang der Untersuchung wird Gleichgewichtszustand angenommen. Zur Zeit  $t = 0$  wird in einem bestimmten Querschnitt  $A$  (bei  $x = 0$ ) eine Störung angesetzt, deren Einfluß untersucht werden soll. Unter der Voraussetzung, daß das Geschwindigkeitspotential  $\Phi$  der Wellengleichung  $\Delta \Phi - a^{-2} \partial^2 \Phi / \partial t^2 = 0$  (Normalableitung auf der Röhrenwand Null) genügt, wird also eine Lösung dieser Gleichung für gegebene Werte von  $\Phi$  bei  $x = 0$  für  $t > 0$  gesucht. Dieses Potential kann in eine Reihe von Eigenfunktionen entwickelt werden, die durch die Gestalt von  $A$  gegeben sind. Infolge der Linearität der Differentialgleichung kann jeder Ausdruck der Entwicklung einzeln betrachtet werden. Um einen an allen Punkten der Röhre gültigen Ausdruck von  $\Phi$  zu erhalten, wird die Heavisidesche Operatorenmethode angewandt, die aber auf ein schwer auswertbares Integral führt. Mittels der Methode des steilsten Abstiegs gelingt es, einen für große Werte von  $t$  gültigen asymptotischen Ausdruck zu erhalten. Genauer untersucht wird eine harmonische Störung  $H(t) \cdot \cos \omega t$ . In diesem Fall kann zwischen einer zeitlich vorübergehenden Lösung, die sich mit der Schallgeschwindigkeit des freien Raumes bewegt, und einer Dauerlösung — diese wandert mit der Gruppengeschwindigkeit der betrachteten Schwingungsformen — unterschieden werden. — Im zweiten Teil der Arbeit wird der Einfluß von kleinen Abänderungen des Röhrenquerschnittes

z. B. durch Verdrehungen studiert. Dabei werden Größen zweiter und höherer Ordnung vernachlässigt. Das Problem wird mittels der Greenschen Funktion in Angriff genommen. Genauer untersucht wird eine Querschnittsverdrehung im Falle einer rechteckigen Röhre. *H. Unger.*

**Wei, Yung-Chio:** Theory of attenuation of sound in foggy air due to evaporation and condensation processes. *Chinese J. Phys.* **9**, 149—168 und engl. Zusammenfassg. 169 (1953) [Chinesisch].

**Krasil'nikov, V. A. und V. I. Tatarskij:** Streuung des Schalls in einer turbulenten Strömung. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* **90**, 159—162 (1953) [Russisch].

La dispersion du son dans un courant turbulent de liquide visqueux est conditionnée par deux facteurs indépendants: 1. Fluctuation des vitesses, 2. Hétérogénéité des températures. — Les AA. se limitent à l'étude du premier facteur. Une analyse qualitative, préliminaire, du phénomène les conduit à l'équation approchée:

$$\Delta\psi - c^{-2} \partial^2\psi/\partial t^2 = 2c^{-2} v_i \partial^2\psi/\partial x_i \partial t,$$

où:  $\psi$  est le potentiel du champ acoustique;  $v_i$  la composante suivant  $Ox_i$  de la vitesse de pulsation du liquide,  $c$  la vitesse du son. Dans le cas d'une onde sonore monochromatique plane et d'un écoulement homogène et isotrope, les AA. calculent la moyenne du carré  $\overline{\psi_i^2}$  de l'amplitude de l'onde dispersée, en fonction des éléments de corrélation du courant d'abord, puis de l'indiciatrice de dispersion  $\theta$ . On montre ainsi que, sous certaines hypothèses, l'incompressibilité du fluide entraîne la nullité de  $\overline{\psi_i^2}$  pour  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$ . À noter que ces conclusions sont indépendantes de la forme des fonctions de corrélation des vitesses. En adoptant pour celles-ci, à priori, une forme plus ou moins raisonnable, on arrive à expliciter l'indiciatrice de dispersion, ce qui permet de discuter complètement les lois de la dispersion. *J. Kravtchenko.*

**Hines, C. O.:** Reflection of waves from varying media. *Quart. appl. Math.* **11**, 9—31 (1953).

Die Wellengleichung  $d^2f/dx^2 + k^2 n^2 f = 0$  [ $n = n(x)$  der Brechungsindex,  $k = 2\pi/\text{Wellenlänge im Vakuum}$ ] wird durch  $f = \exp\left[ik \int_{x_0}^x r(s) ds\right]$  in eine Riccati'sche Differentialgleichung für  $r$  übergeführt, von der unter der Annahme:  $n = 1$  für  $|x| > x_0$ ,  $n^2 = 1$  für  $|x| \leq x_0$  [ $(n(x))^2$  stetig reell,  $x_0 > 0$  beliebige reelle Konstante] drei Lösungen  $r^+$ ,  $r^-$  und  $r'$  betrachtet werden, die den Bedingungen  $r^+ = 1$  für  $x \leq -x_0$ ,  $r^- = -1$  für  $x \leq -x_0$ ,  $r' = 1$  für  $x \geq x_0$  genügen sollen; es sei  $r^\pm = \frac{1}{2}(r_1 \pm i r_2)$ . Verf. entwickelt eine Methode, um den Charakter von  $r_1^2$  und  $r_2^2$  in gewissen einfachen Spezialfällen qualitativ zu erfassen.

*K. Maruhn.*

**Lee, E. H. and I. Kanter:** Wave propagation in finite rods of viscoelastic material. *J. appl. Phys.* **24**, 1115—1122 (1953).

Das betrachtete viskoelastische Material ist von Maxwell'scher Art und kann durch ein Modell versinnbildlicht werden, das aus einer Feder und einem Stoßdämpfer (dashpot) in Reihenschaltung besteht. Die Gleichung für die Fortpflanzung longitudinaler Wellen ist die Telegraphengleichung. Für die Darstellung der Einzelwellen wird die Methode der Laplace-Transformation verwendet. Der Fall des halbunendlichen Stabes wird im einzelnen behandelt. Zur Lösung der Randwertaufgabe für Stäbe von endlicher Länge wird die Methode der Überlagerung der Bilder verwendet. Die für viskoelastisches Material gefundenen Ergebnisse werden mit denen des entsprechenden elastischen Problems verglichen. *Th. Pöschl.*

**Keller, Joseph B.:** Bowing of violin strings. *Commun. pure appl. Math.* **6**, 483—495 (1953).

Obwohl die schwingende Saite zum Gegenstand eines ausführlichen Studiums gemacht worden ist, scheint bisher keine befriedigende Theorie der erzwungenen Schwingung einer Saite zu bestehen, hervorgerufen durch das Zupfen mit Hilfe eines Geigenbogens (vgl. jedoch F. G. Friedländer, dies. Zbl. **50**, 190). Verf. hat es daher unternommen, eine Theorie der durch den Geigenbogen gezupften Saite zu formulieren, um aus den Ergebnissen dieser Theorie einige Folgerungen zu ziehen. Das Thema ist nicht nur von Interesse an sich, sondern es bietet ein Beispiel selbsterregter Schwingungen eines Systems mit unendlich vielen Freiheitsgraden. Der nichtlineare Charakter der Schwingung entsteht durch die Reibungskraft, die durch den Bogen auf die Saite ausgeübt wird. Es wird angenommen, daß die Verschiebung der Saite aus ihrer Gleichgewichtslage klein ist und daß die Bewegung in einer Ebene verläuft, womit die lineare Wellen



gleichung anwendbar ist. An einem Punkte  $x_0$ , dem Berührungspunkt zwischen Saite und Bogen, wird eine Reibungskraft  $f$  an der Saite ausgeübt, die als eine bekannte nicht-lineare Funktion der relativen Geschwindigkeit zwischen Saite und Bogen angenommen wird. Dieser Reibungskraft  $f$  wird durch die Unstetigkeit (Knick) in der Neigung der Saite an der Stelle  $x_0$  das Gleichgewicht gehalten. Das mechanische Problem wird demnach als eine lineare partielle Differentialgleichung mit einer nicht-linearen Bedingung der Unstetigkeit an einem Punkt formuliert. Darüber hinaus müssen geeignete Anfangs- und Randbedingungen angenommen werden. — Verf. erwähnt die gleichzeitige und unabhängige Behandlung desselben Problems durch F. G. Friedländer (dies. Zbl. 50, 190). Die Formulierungen sind im wesentlichen die gleichen, aber die Lösungsmethoden sind verschieden. Die Ergebnisse stimmen überein, obwohl jede Arbeit einige Resultate bringt, die in der anderen nicht enthalten sind.

*R. Gran Olsson.*

Chenea, P. F.: On the application of the impedance method to continuous systems. J. appl. Mech. 20, 233—236 (1953).

## Hydrodynamik:

Truesdell, C.: Notes on the history of the general equations of hydrodynamics. Amer. math. Monthly 60, 445—458 (1953).

Der Artikel ist veranlaßt durch eine Ausstellung, welche die mathematische Bibliothek der Indiana University 1952 veranstaltete zur Erinnerung daran, daß vor rund 200 Jahren die Grundgleichungen der Hydrodynamik aufgestellt wurden, nachdem 1748 die Berliner Akademie die Theorie des Widerstands der Flüssigkeiten als Gegenstand einer Preisaufgabe gewählt hatte. Die einzelnen Abschnitte der historischen Studie sind Newton, D. Bernoulli, d'Alembert, Euler, Navier, Cauchy, Poisson und Stokes gewidmet.

*R. Sauer.*

Rao, S. K. Lakshmana: The motion of four rectilinear vortex filaments. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 38, 143—147 (1953).

Verf. untersucht die Bewegungen von vier geradlinigen, unendlich langen, parallelen Wirbelfäden, deren Schnittpunkte mit einer zu ihnen senkrechten Ebene zu einem bestimmten Zeitpunkte die Ecken eines Parallelogramms bilden; die Wirbelstärken in den Endpunkten der Diagonalen werden hierbei als gleich vorausgesetzt. (Vgl. hierzu die Arbeit des Verf., dies. Zbl. 44, 211.)

*K. Maruhn.*

Birkhoff, Garrett: Induced mass with variable density. Quart. appl. Math. 11, 109—110 (1953).

Ausdenkung des Begriffs der induzierten Masse und einiger ihrer Eigenschaften auf den Fall einer inkompressiblen Flüssigkeit variabler Dichte. [Ohne Beweise, da diese zu denen einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 47, 183) parallel verlaufen.]

*K. Maruhn.*

Truckenbrodt, E.: Das Geschwindigkeitspotential der tragenden Fläche bei inkompressibler Strömung. Z. angew. Math. Mech. 33, 165—173 (1953).

Ziel der Arbeit ist es, die bekannten Grundformeln der Tragflügeltheorie auf eine einheitliche und anschaulich gut übersehbare Weise herzuleiten. Zu diesem Zweck werden zunächst Geschwindigkeitskomponenten und -potential eines infinitesimalen Hufeisenwirbels aufgestellt; durch Integration über die Flügeltiefe erhält man daraus die entsprechenden Größen für einen „Elementarflügel“ und durch anschließende Integration über die Spannweite für die tragende Fläche. Verschiedene Grenzübergänge werden untersucht und liefern insbesondere die bekannten Formeln des ebenen Problems, der tragenden Linie und des Flügels unendlich kleiner Streckung. In einem Anhang wird der Zusammenhang mit dem Prandtlschen Beschleunigungspotential und den Formeln für das Geschwindigkeitspotential von Burgers und v. Kármán hergestellt.

*J. Weissinger.*

Laidlaw, William R.: Spanwise and chordwise loadings for rectangular wings of aspect ratio near unity. J. aeronaut. Sci. 20, 783—785 (1953).

In der Tragflächengleichung eines Rechteckflügels in inkompressibler Strömung wird näherungsweise  $\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \approx \frac{3}{4} (|x - \xi| + |y - \eta|)$  gesetzt und für

die zweidimensionale Zirkulationsverteilung  $\gamma(x, y)$  der Ansatz  $\gamma = U \cdot X(\varphi) \cdot Y(\psi)$ ,  
 $x = -\cos \varphi$ ,  $y = s \cos \psi$ ,

$$X(\varphi) = c_0 \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} + \sum_{n=1}^N c_n \frac{\sin n\varphi}{n}, \quad Y(\psi) = \sum_{m=1}^M K_m \frac{\sin m\psi}{m} \quad (K_1 = 1)$$

gemacht. Durch Kollokation bzw. Gewichtsintegration entstehen lineare Gleichungen für die  $c_n$ ,  $K_m$ , die durch ein Iterationsverfahren gelöst werden können. Gesamtauftrieb und Auftriebschwerpunkt eines ebenen Rechtecks stimmen im Streckungs-bereich  $0.5 \leq A \leq 2.0$  gut mit entsprechenden Rechnungen von Lawrence (dies. Zbl. 43, 404) überein.

J. Weissinger.

Lawrence, H. R.: The aerodynamic characteristics of low aspect ratio wing-body combinations in steady subsonic flow. J. aeronaut. Sci. 20, 541—548 (1953).

Das Geschwindigkeitspotential der linearisierten, inkompressiblen Strömung um einen angestellten, unendlich langen Kreiszylinder als Rumpf und einen dünnen beliebig verwundenen Flügel mit gerader Hinterkante wird durch eine geeignete Wirbelbelegung  $u(x, y)$  des Flügel-Rumpfgrundrisses dargestellt und für diese eine Paar von Integralgleichungen hergeleitet. Diese werden mittels der Näherung  $\sqrt{(x - \xi)^2 + \eta^2 - 2y\eta - a^2} \approx x - \xi$  ( $x$  = Richtung der Grundströmung,  $a$  = Kreistradius) vereinfacht und in eine einzige Integralgleichung über dem Flügelgrundriß überführt, welche durch Multiplikation mit einem Gewichtsfaktor und Integration nach  $y$  in eine eindimensionale Integralgleichung verwandelt und schließlich auf die bereits früher (dies. Zbl. 43, 404) untersuchte Gestalt

$$f(x) = \frac{1}{2} g(x) + \frac{1}{4} \int_{-c}^c d\xi g'(\xi) \left[ 1 + \frac{\sqrt{(x - \xi)^2 + \beta^2(x)}}{x - \xi} \right]$$

gebracht wird, in der  $\beta(x)$  bzw.  $f(x)$  gegebene bzw. durch Quadratur berechenbare Funktionen sind, während  $g'(x)$  bis auf einen konstanten Faktor die Auftriebsdichte der Kombination pro Tiefeneinheit bedeutet. Ein vom Verf. früher angegebenes Verfahren [J. aeronaut. Sci. 20, 218—219 (1953)] ermöglicht es, die zweidimensionale Auftriebsverteilung näherungsweise aus  $g(x)$  zu berechnen. Beziehungen zu einigen anderweitig behandelten Grenzfällen werden aufgezeigt und Methoden zur Ausdehnung der Resultate auf endliche lange Rümpfe und kompressible Strömungen besprochen. Man kann erwarten, daß die Resultate brauchbar sind für beliebige Flügelgrundrisse mit Streckungen zwischen 0 und 4 und für Rechteckflügel beliebiger Streckung.

J. Weissinger.

Jaekel, K.: Zur Theorie der Profile geringer Dicke und Wölbung. Z. angew. Math. Mech. 33, 213—215 (1953).

Ausgehend vom komplexen Strömungspotential einer Quell- und Wirbelbelegung auf einem schwach gewölbten glatten Bogen in Verbindung mit einer Parallelströmung gibt Verf. unter Beschränkung auf Glieder erster Ordnung in Dicke und Wölbung und unter Benützung elliptischer Koordinaten eine einheitliche und übersichtliche Darstellung der Theorie, die sich an die Theorie von Ackermann-Birnbaum und das Verfahren von Föttinger eng anschließt. Eine wesentliche Rolle spielt dabei die Reihenentwicklung des Kerns der Integralgleichung in elliptischen Koordinaten. (Vgl. K. Jaekel, dies. Zbl. 36, 200.)

F. Garten.

Holme, O. and F. Hjelte: On the calculation of the pressure distribution on three-dimensional wings at zero incidence in incompressible flow. Kungl. Tekn. Höskol., Inst. Flygtekn., Techn. Notes 23, 28 S. (1953).

Sowerby, L. and J. C. Cooke: The flow of fluid along corners and edges. Quart. J. Mech. appl. Math. 6, 50—70 (1953).

Um die ebene stationäre Laminarströmung längs eines Keiles zu berechnen, wird eine Methode benutzt, die Rayleigh für die Berechnung der Strömung hinter einer senkrecht zur Hauptströmung (Koordinate  $Z$ ) angestellten Platte benutzt hatte, indem er nämlich zunächst das instationäre Problem der in ihrer Ebene plötzlich mit der Geschwindigkeit  $W$  bewegten Platte löste und dann mit einer aus dem Widerstand ermittelten Konstante die Transformation von der Zeit  $t$  auf die Koordinate  $Z$   $W$  besorgte. Für die Strömung längs eines Keiles, der aus zwei halb-unendlichen unter dem Winkel  $\beta$  zusammenstoßenden Platten gebildet wird, ist das instationäre Problem für  $\beta = 2\pi$  von Howarth, für  $\beta = \pi n$  ( $n$  ganzzahlig) vom



Verf. gelöst worden. Das stationäre Problem wird durch Transformation von  $t$  auf  $\gamma^2 Z/W$  behandelt, wobei  $\gamma$  aus der Lösung für die ebene Platte bestimmt wird. Für  $\beta = 3/2$  gelingt eine geschlossene Darstellung für die Strömungsgeschwindigkeit.

*J. Pretsch.*

**Marchi, Enrico:** Sui fenomeni di efflusso piano da luci a battente. *Ann. Mat. pura appl.*, IV. Ser. **35**, 327—341 (1953).

Das Problem des ebenen stationären Ausflusses einer wirbelfreien inkompressiblen Flüssigkeit aus einer Öffnung, die durch eine in die Strömung unter einem festen Winkel gestellte Wand begrenzt wird, wird unter Berücksichtigung der Schwerkraft nach der Methode der konformen Abbildung untersucht. Strahlkontraktionskoeffizienten und Überfallszahlen werden für die Neigungswinkel,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  und  $90^\circ$  (vertikale Wand) berechnet und mit den experimentellen Daten von B. Gentilini einerseits und den entsprechenden unter Vernachlässigung der Schwerkraft von U. Cisotti und R. v. Mises andererseits gewonnenen verglichen.

*Th. Sexl.*

**Garabedian, P. R.:** Oblique water entry of a wedge. *Commun. pure appl. Math.* **6**, 157—165 (1953).

Verf. untersucht diejenige ebene Potentialströmung in einer inkompressiblen Flüssigkeit, die beim gleichförmigen Eintritt eines beliebig geneigten (ebenen) Keiles in eine flüssigkeitserfüllte Halbebene mit freier Oberfläche entsteht. Das Geschwindigkeitspotential wird aus physikalischen Gründen in der Gestalt  $\varphi(x, y, t) = t \Phi(x/t, y/t)$  [ $\Phi(x, y)$  harmonisch] angenommen. Es gelingt, eine einparametrische Schar möglicher ähnlicher Strömungen, die an der Oberfläche im Unendlichen horizontal verlaufen, zu konstruieren. Der Methode liegt der Gedanke zugrunde, die Gleichung der freien Oberfläche zur Zeit  $t = 1$ :  $z = z(s) = z(s, 1)$ , nach  $s$  aufzulösen, die Funktion  $s = w(z)$  analytisch in den Strömungsbereich fortzusetzen und dann die Betrachtungen in der  $w$ -Ebene durchzuführen. Wesentlich ist die (in der Methode begründete) Voraussetzung, daß die freie Oberfläche mit den Wänden des Keiles tangential oder vertikal zusammentrifft. Durchführung eines Beispiels.

*K. Maruhn.*

**Moiseev, N. N.:** Das Problem der Bewegung eines starren Körpers, der flüssige Massen mit freier Oberfläche enthält. *Mat. Sbornik*, n. Ser. **32** (74), 61—96 (1953) [Russisch].

L'essentiel du présent travail a été résumé dans les publications antérieures [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **85**, 719—722 (1952) et ce Zbl. **47**, 193]. L'A. développe ici ses calculs et présente quelques applications concrètes de sa théorie. Rappelons que N. Joukowsky a étudié le mouvement d'un solide présentant des cavités, remplies d'un liquide parfait; cet auteur a démontré, en particulier, l'existence d'un solide „équivalent“ (c'est-à-dire d'un solide plein, dont le mouvement, toutes choses égales d'ailleurs, est identique à celui du système étudié). L'A. généralise le problème, en admettant que les cavités ne sont que partiellement remplies du liquide. On obtient ainsi un régime à une infinité de degrés de liberté. En revanche, l'A. se borne aux petits mouvements voisins d'une position d'équilibre; le champ des vitesses dérive d'un potentiel. Les forces de masses forment un champ uniforme, à direction fixe, mais dont l'intensité peut être fonction du temps. L'A. cherche les solutions des équations qu'il a écrites sous forme de développements de Fourier généralisés. Il donne des critères de la stabilité des petits mouvements, étudie l'influence des forces dissipatives dans le cas où le récipient n'a qu'un seul degré de liberté, précise le comportement asymptotique des valeurs propres et examine en détail le cas particulier où la cavité du solide a une forme parallélépipédique.

*J. Kravtchenko.*

**Stewartson, K.:** A weak spherical source in a rotating fluid. *Quart. J. Mech. appl. Math.* **6**, 45—49 (1953).

Während in ruhender Flüssigkeit die Stromlinien einer Kugelquelle radial verlaufen, können diese, wie Verf. zeigt, in einer starr rotierenden Flüssigkeitsmasse nicht aus dem Zylinder austreten, der die Quelle parallel zur Rotationsachse umhüllt. Das Resultat wird, wie in anderen Arbeiten des Verf. (dies. Zbl. **46**, 184; **50**, 193), erhalten, indem die linearisierten Bewegungsgleichungen in bezug auf die Zeit der Laplace-Transformation unterworfen werden. Innerhalb des Zylinders sind

die Stromlinien im stationären Endzustand achsenparallele Geraden, außerhalb desselben Kreise in Normalebene dazu, während auf dem Zylinder selbst das Geschwindigkeitsfeld (wegen Vernachlässigung der Zähigkeit und Linearisierung der Gleichungen) von beiden Seiten her singular wird. Für den Gültigkeitsbereich gibt Verf. an, daß die Ausstoßgeschwindigkeit klein sein soll gegen den Quellenradius, was aus Dimensionsgründen unklar ist. Man darf also u. a. auch nicht den Grenzübergang zur Punktquelle machen.

H. Wundt.

**Beckwith, Ivan E.:** The effect of dissociation in the stagnation region of a blunt-nosed body. *J. aeronaut. Sci.* **20**, 645—646 (1953).

Unter Benutzung einer Arbeit von Kalikhwan [NACA Tech. Memo. Nr. 1229 (1949)] wird eine Näherungsmethode zur Berechnung des Wärmeübergangs bei ebenen Profilen und des Dissoziationsgleichgewichts entwickelt. In der Nähe von Staupunkten bei Wandtemperaturen unter 3000—4000 R hat danach die Dissoziation nur geringen Einfluß auf den Wärmeübergang.

H. Wundt.

**Kemp, Nelson H. and W. R. Sears:** Aerodynamic interference between moving blade rows. *J. aeronaut. Sci.* **20**, 585—597 (1953).

Um eine erste Näherung für die instationäre Interferenz zwischen Leit- und Lauf-Rad eines nur aus diesen beiden Teilen in der genannten Reihenfolge bestehenden Axialverdichters zu erhalten, wird der instationäre Einfluß bestimmt, den das Leitrad durch die stationäre Belegung des Laufrades erfährt. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Schaufeln des Leitrades sich wechselseitig nicht beeinflussen, also die Teilung genügend groß ist. Entsprechend wird auch beim Laufrad verfahren, nur daß dabei auch noch der Anteil berücksichtigt wird, der von der instationären Wirbelschlepe des Laufrades herrührt.

H. Söhngen.

**Landahl, M. T. and V. J. E. Stark:** An electrical analogy for solving the oscillating-surface problem for incompressible nonviscid flow. *Kungl. Tekn. Högskol., Inst. Flygtekn., Techn. Notes* **34**, 19 S. (1953).

**Sowerby, L.:** The couple on a rotating spheroid in a slow stream. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **49**, 327—332 (1953).

Das durch Zähigkeitsspannungen hervorgerufene Drehmoment eines um seine Achse rotierenden abgeplatteten Rotations-Ellipsoids wird für den Fall untersucht, daß dieser Körper in Achsrichtung angeströmt wird. Dabei werden die Querkomponenten der Strömungsgeschwindigkeit so klein gegenüber der Anströmungsgeschwindigkeit  $W$  angenommen, daß die Oseensche Näherung zulässig ist. Ferner muß auch die Reynoldszahl  $W \cdot a' \cdot r$  (mit  $a'$  — größter Durchmesser des Ellipsoids) sehr klein sein. Die Lösungen werden nach sphärischen Wellenfunktionen entwickelt und daraus ein Ausdruck für das Drehmoment abgeleitet. Für den Grenzfall der rotierenden Scheibe werden Berechnungsergebnisse bis zu  $Re = W \cdot a \cdot r = 2$  mitgeteilt (wobei  $a$  der Halbmesser der Scheibe ist). Als weiterer Sonderfall ist in den Gleichungen der bereits von Jeffery (1914/15) untersuchte Fall der ruhenden Flüssigkeit ( $W = 0$ ) enthalten.

W. Wuest.

**Nekrasov, K. P.:** Die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit nach der Theorie der verschwindenden Zähigkeit (zweidimensionale stationäre Strömung). *Priklad. Mat. Mech.* **17**, 17—32 (1953) [Russisch].

Oseen et Zeilon ont traité, sur les équations linéaires, le problème de l'écoulement d'un liquide visqueux indéfini au repos à l'infini (sauf dans le sillage) autour d'un solide animé d'un mouvement de translation rectiligne. On trouvera toutes les indications utiles sur ce sujet dans H. Villat, *Leçons sur l'hydrodynamique*, Paris 1929, pp. 151—296. Une analyse détaillée des solutions, formées par Zeilon, montre que dans le cas du régime plan et de translation uniforme, les vitesses subissent une discontinuité le long de la frontière du sillage, alors que le vecteur tourbillon est infini au point de détachement. Villat insiste sur le caractère arbitraire de quelques hypothèses d'Oseen et indique une voie à suivre pour corriger ces défauts.



de la théorie qui en limitent la portée physique. L'A. exploite ces remarques pour proposer un schéma, légèrement différent, de l'écoulement à l'abri de ces critiques. La concordance des résultats théoriques avec l'expérience serait satisfaisante, notamment en ce qui concerne l'expression du coefficient de résistance en fonction du nombre de Reynolds (cas du cylindre circulaire).

*J. Kravtchenko.*

**Kuo, Y. H.: On the flow of an incompressible viscous fluid past a flat plate at moderate Reynolds numbers.** J. Math. Physics 32, 83—101 (1953).

Nachdem H. L. Alden (dies. Zbl. 31, 328) gezeigt hat, daß für die halbunendliche Platte die höheren Näherungen zur Grenzschichtlösung in fortschreitendem Maße stärker singular werden, benutzt Verf. die von M. J. Lighthill (dies. Zbl. 35, 205) entdeckte Methode, die Lösung einer Näherungsgleichung für eine nichtlineare Differentialgleichung in der Nähe der Singularität durch leichte Streckung der Argumente der Lösung zu verbessern. Aus dem Charakter der Potentialströmung wird ein „Expansionsparameter“ (Verdrängungsdicke) abgeleitet, der Druck erster Ordnung und die zähe Strömung zweiter Ordnung bestimmt. Für die endliche Platte wird so ein Widerstandsgesetz berechnet, daß für  $15 < Re < 10^4$  mit den Messungen von Z. Janour und für  $Re > 10^4$  mit dem Blasius-Gesetz übereinstimmt. Erst in der dritten Näherung wird an der Platte durch die Lighthillsche Methode eine Verschiebung der Längskoordinate und damit eine Auflösung des in der Vorderkante gelegenen Scheitels in ein Spektrum von vor der Vorderkante gelegenen Scheiteln für die Parabeln als Linien konstanter Geschwindigkeit bewirkt.

*J. Pretsch.*

**Tomotika, S. and T. Aoi: The steady flow of a viscous fluid past an elliptic cylinder and a flat plate at small Reynolds numbers.** Quart. J. Mech. appl. Math. 6, 290—312 (1953).

Die ebene Strömung um elliptische Zylinder bei kleinen Reynolds-Zahlen ist im Rahmen der Oseenschen Näherung schon mehrfach untersucht worden, wobei aber das Hauptinteresse dem Gesamtwiderstand galt. Verff. haben sich demgegenüber die Aufgabe gestellt, aus der strengen Lösung der Oseenschen Gleichung weitergehende Aussagen über das Strömungsfeld und die Druckverteilung zu gewinnen. Die Lösung der Oseenschen Gleichung in elliptischen Koordinaten führt zu Mathieuschen Funktionen. Der Widerstand ergibt sich entweder dadurch, daß man den Impulssatz auf eine Kontrollfläche anwendet, die groß gegenüber dem Hindernis ist, oder indem man die Zähigkeitsspannungen an der Körperoberfläche summiert. Dabei kann man im letzten Fall den Gesamtwiderstand in den Druckwiderstand und den Reibungswiderstand aufspalten. Im Rahmen der Oseenschen Näherung ergibt sich dabei, daß die beiden Anteile sich wie die Halbachsen verhalten. Im Fall des Kreiszylinders beanspruchen die beiden Anteile je die Hälfte des Gesamtwiderstandes, während im Fall der ebenen Platte entweder nur Druckwiderstand oder nur Reibungswiderstand vorhanden ist, je nachdem ob die Platte quer oder parallel zur Strömungsrichtung gestellt ist. Der Gesamtwiderstand wird in eine Reihe nach der Reynoldsschen Zahl und dem Achsenverhältnis entwickelt. Numerische Werte werden bis  $Re = 5$  für  $b/a = 0$  (Platte),  $1/4$ ,  $1/2$ ,  $1$  (Kreis) sowohl mit großer Achse parallel als auch quer zur Strömungsrichtung angegeben. Im dritten Teil der Arbeit wird das Stromlinienbild berechnet, wobei für die Platte (parallel und senkrecht zur Strömungsrichtung) bei  $Re = 4$  numerische Ergebnisse mitgeteilt werden. Abschließend wird noch die Druckverteilung auf der Zylinderoberfläche berechnet und für zwei Beispiele wiedergegeben.

*W. Wuest.*

**Thomas, L. H.: The stability of plane Poiseuille flow.** Phys. Review, II. Ser. 91, 780—783 (1953).

Die bekannte Störungs-Differentialgleichung einer ebenen Poiseuilleschen Strömung

$$d^4\varphi/dy^4 - 2\alpha^2\ddot{\varphi} + \alpha^4\varphi + i\alpha R\{(1-c-y^2)(\ddot{\varphi} - \alpha^2\varphi) + 2\varphi\} = 0$$

mit den Randbedingungen  $\varphi = \dot{\varphi} = 0$  für  $y = \pm 1$  wird nach dem Mehrstellenverfahren durch eine Differenzengleichung mit einem Fehlerglied von 8. Ordnung der Ableitung ersetzt. Werden die Parameter  $\alpha$  ( $2\pi/\lambda$  Wellenlänge der Störung in  $x$ -Richtung) und  $R$  (Reynoldssche Zahl  $R = U_0 b/\nu$ , wo  $U_0$  Geschwindigkeit der ungestörten Strömung in Kanalachse,  $b$  halbe Kanalbreite) vorgegeben, so handelt es sich um ein Eigenwertproblem für  $c$  (komplexe Geschwindigkeit der Störung). Das sich ergebende lineare Gleichungssystem wird durch direkte Gaußsche Elimination gelöst. Die großen numerischen Werte der Koeffizienten — bedingt durch die großen Reynoldsschen Zahlen  $R$  — erfordern die Berücksichtigung einer großen Stellenzahl. Die umfangreichen Rechnungen, die Lösungen mit 200 Schritten enthalten, wurden auf dem Selective Sequence Electronic Computer der International Business Machine Corporation durchgeführt, der Multiplikationen von 14 mal 14 Dezimalstellen zuläßt. Als kritische Reynoldssche Zahl ergab sich  $R = 5780$  für  $\alpha = 1,026$ . Während  $R$  als gut bestimmt anzusehen ist, läßt sich für  $\alpha$  mit Sicherheit nur das Intervall  $1,02$  bis  $1,03$  angeben. Dieses Ergebnis steht in guter Übereinstimmung mit den älteren Ergebnissen von W. Heisenberg [Ann. der Physik, IV. F. 24, 577 (1924)] und C. C. Lin [Quart. appl. Math. 3, 287 (1946)], die mittels asymptotischer Reihenentwicklungen  $\alpha = 1$  und  $R = 5300$  gefunden hatten.

*W. Szablewski.*

• Kuessner, H. G.: *A review of the two-dimensional problem of unsteady lifting surface theory during the last thirty years.* — (Mimeographed lecture notes.) (Inst. Fluid Dynamics appl. Math., Univ. Maryland, Lect. Ser. No. 23.) (College Park: Univ. of Maryland 1953. 22. S.)

Verf. gibt eine zusammenfassende Darstellung über die mathematischen Methoden, die bei der Bestimmung der Luftkräfte an einem schwingenden Flügel für das ebene Problem angewendet wurden und zum Erfolg geführt haben. Ausgehend von den linearisierten Bewegungsgleichungen eines kompressiblen, aber nicht reibenden Gases wird zunächst die Aufgabe als ein Randwertproblem partieller Differentialgleichungen formuliert, und dieses in eine Integralgleichung übersetzt. Die verschiedenen Wege, die zur Lösung dieser Integralgleichung im inkompressiblen Fall eingeschlagen wurden, werden geschildert. Dagegen haben die zahlreichen Versuche, die bisher zur direkten Umkehrung der Integralgleichung im kompressiblen Fall (Unterschallbereich) unternommen wurden — von rein numerischen Methoden abgesehen — zu keinem Erfolg geführt. Als vorteilhaft erwies es sich hier, direkt an die partielle Differentialgleichung anzuknüpfen, wie es Timman und van de Vorren (XXL Rep. F. 54. Amsterdam 1949) getan haben. Hingewiesen sei noch auf die elegante Darstellung der Lösung im Unterschallbereich, die der Verf. im Anschluß an die beiden eben genannten Bearbeiter erhält. Nach Einführung elliptischer Koordinaten wird zunächst im inkompressiblen Fall für den Kern des gesamten Druckfeldes eine geschlossene Darstellung angegeben, in die nur eine einzige charakteristische Funktion  $G$  nebst ihren Ableitungen eingeht. Damit diese Darstellung mit einer abgeänderten Funktion  $G$  auch noch für kompressible Medien richtig ist, muß die abgeänderte Funktion der Wellengleichung sowie einigen Nebenbedingungen genügen. Diese Funktion wird in Form einer Reihe über Mathieusche Funktionen angegeben. H. Söhngen.

Behrbohm, Hermann: *Zusammenfassender Bericht über die Tragflächen-theorie im stationären Überschallflug.* Z. Flugwiss. 1, 62—79 (1953).

Die Behandlung der Überschallströmung an dünnen Flügeln ohne oder mit Anstellung mittels linearer Gleichungen hat in den letzten Jahren einen fast unübersehbaren Umfang angenommen. Es ist daher ein außerordentlich verdienstvolles Unternehmen des Verf., hier einen Überblick über alle wesentlichen zugänglichen Arbeiten und Methoden zu geben. Nach einer historischen Einleitung werden die in der Problemstellung und Lösungsmethode sehr unterschiedlichen Veröffentlichungen von einheitlichen Gesichtspunkten aus behandelt. Dabei ergeben sich zwei Hauptprobleme: jenes des nicht angestellten Flügels endlicher Dicke und jenes der unendlich dünnen tragenden Platte. Neu ist die Behandlung der von der Vorderkante ausgehenden Störung. Dem der allgemeinen Theorie gewidmeten ersten Teil mit allein 75 Zitaten soll ein zweiter die speziellen Methoden betreffender Teil folgen. K. Oswatitsch.

Loewner, Charles: *Conservation laws in compressible fluid flow and associated mapping.* J. rat. Mech. Analysis 2, 537—561 (1953).

Dem quasilinearen System der beiden partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$(1) \quad a_i^1 u_x + a_i^2 v_x + b_i^1 u_y + b_i^2 v_y = 0 \quad (i = 1, 2),$$

in dem die Koeffizienten in einem offenen Gebiet  $A$  der  $u, v$ -Ebene stetige Funktionen von  $u$  und  $v$  sind, und deren Matrix überall in 1 den Rang 2 hat, werden diejenigen partiellen Differentialgleichungen (2)  $(\xi(u, v))_x + (\eta(u, v))_y = 0$  mit passenden in 1 stetig differenzierbaren Funktionen  $\xi, \eta$  zugeordnet, die eine formale Folge aus (1) sind. Eine solche Differentialgleichung heiße ein Erhaltungsgesetz des Systems (1). Für  $a_i^1 = b_i^1 = 0, a_i^2 = 1, b_i^2 = 1, a_i^1 = \rho + \dot{\rho} u^2, a_i^2 = b_i^2 = \dot{\rho} u v, b_i^1 = \rho + \dot{\rho} v^2$ , wo  $u, v$  die Geschwindigkeitskomponenten in  $x, y$ -Richtung,  $\rho = \rho[(u^2 + v^2)^2]$  die Dichte des strömenden Mediums ist und wo  $\dot{\rho} = d\rho/d[(u^2 + v^2)^2]$  bedeutet, ist nämlich (1) ein die wirbelfreie kompressible Strömung in der  $x, y$ -Ebene beschreibendes Differentialgleichungssystem, und die beiden Sonderfälle  $\xi = v, \eta = u$  bzw.  $\xi = \rho u, \eta = \rho v$  von (2) sind die Erhaltungssätze der Drehungsfreiheit bzw. der Masse für ein solches strömendes Medium. — Diese Erhaltungsgesetze können durch ein System zweier linearer partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung für  $\xi, \eta$  als Funktionen von  $u, v$  charakterisiert werden. Ihre Bedeutung liegt darin, daß sie — wie man der mit (2) äquivalenten Aussage, daß  $d\eta = -\eta(u, v)dx + \xi(u, v)dy$  ein vollständiges Differential ist, entnimmt — durch Integration über den Rand von  $A$  Beziehungen für die Randwerte von  $u$  und  $v$  liefern. — Jedem Paar solcher Erhaltungsgesetze (2) von (1) kann die durch

$$(3) \quad \chi_1 = \int (-\eta_1 dx + \xi_1 dy), \quad \chi_2 = \int (-\eta_2 dx + \xi_2 dy)$$

vermittelte Abbildung der  $u, v$ -Ebene in die  $\chi_1, \chi_2$ -Ebene zugeordnet werden (für den oben genannten Spezialfall ist dies der Übergang von der  $x, y$ -Ebene in die  $q, \psi$ -Ebene,  $q$  Geschwin-



digkeitspotential,  $\psi$  Stromfunktion). Ein Begriff der „stark elliptischen“ Systeme (1) bzw. ebensolcher Abbildungen (3) (elliptisch im Großen) wird eingeführt, und allgemeine Eigenschaften solcher Abbildungen werden besprochen. Die dabei gewonnenen Sätze werden auf die mit Unterschallströmungen verbundenen Abbildungen (3) angewendet und dadurch einige interessante Ungleichungen für das Verhalten der Strömung am Rande eines Störkörpers hergeleitet, von denen die folgende zur Charakterisierung des Typs der erzielten Resultate hier genannt sei: Für die auftriebslose Unterschallumströmung eines zur  $x$ -Achse symmetrischen Profils gilt

$$\frac{1}{A} \int_0^A p \, d\alpha \leq p_\infty.$$
 Dabei ist  $p$  der lokale Druck an der Stelle  $x$  der Kontur,  $\alpha$  die Fläche des Profils von der Nase bis zur Stelle  $x$ ,  $A$  die gesamte Profilfläche und  $p_\infty$  der Druck der ungestörten Anströmung.  
H. Behrbohm.

Legendre, Robert: Écoulement isentropique plan d'un fluide compressible. C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 595—597 (1953).

Verf. zeigt, daß die Differentialgleichung für Potential- und Stromfunktion einer ebenen kompressiblen Strömung auf die Form  $\varphi_\sigma = -\varphi_\theta$ ;  $f\varphi_\sigma = f_{\sigma\sigma}\varphi_\theta$  gebracht werden kann, wobei  $f$  und  $\sigma$  definiert sind durch  $f(\sigma) = V/V_0$  und  $\varphi_0 V_0/\varrho V = f_\sigma$ . Während in einer vorhergehenden Notiz (dies. Zbl. **39**, 213) spezielle Annahmen für den Quotienten  $f_{\sigma\sigma}/f$  gemacht wurden, werden hier nach einer weiteren Umformung der Gleichungen allgemeine Reihenansätze angeführt. Allerdings werden die Umformungen rein formal vorgenommen, ohne daß eine physikalische Deutung versucht wird.  
W. Wuest.

Heinrich, G.: Ergänzungen zu dem Aufsatz „Der Energietransport in strömenden Medien“. Z. angew. Math. Mech. **33**, 109—110 (1953).

In einer früheren Arbeit führte Verf. (dies. Zbl. **47**, 183) den „Energietransportvektor“ ein. In der vorliegenden Note wird auf Grund einer von den Navier-Stokes'schen Gleichungen ausgehenden Betrachtung die Einführung des genannten Vektors begründet. Als Beispiel dient eine Rohrströmung.  
K. Maruhn.

Dienemann, W.: Berechnung des Wärmeüberganges an laminar umströmten Körpern mit konstanter und ortsveränderlicher Wandtemperatur. Z. angew. Math. Mech. **33**, 89—109 (1953).

Zur Berechnung thermischer Grenzschichten an laminar umströmten Profilen in inkompressibler Flüssigkeit und bei Vernachlässigung der Kompressions- und Reibungswärme wird ein Verfahren nach v. Kármán-Pohlhausen-Holstein entwickelt, indem die Temperaturverteilungen durch Polynome approximiert werden. 1. Bei konstanter Wandtemperatur wird ein Polynom 4. Grades angesetzt, das die üblichen fünf Randbedingungen erfüllt und affine Temperaturprofile ergibt. Beispielrechnungen an der längsangeströmten ebenen Platte und am Kreis- sowie elliptischen Zylinder ergeben gute Übereinstimmung mit bekannten exakten Lösungen und anderen Näherungslösungen. Jedoch ist das hier entwickelte Verfahren rechnerisch einfacher. — 2. Bei örtlich veränderlicher Wandtemperatur erweist es sich als erforderlich, einen Formparameter einzuführen, welcher den Gradienten der Wandtemperatur enthält. Es wird ein Polynom 5. Grades angesetzt, das als zusätzliche sechste Randbedingung die Wandbindung  $a(\partial^3 T/\partial y^3)_w = (\partial u/\partial y)_w \cdot dT_w/dx$  ( $x, y$  Koordinaten längs und senkrecht zur Profilkontur,  $u$  Geschwindigkeitskomponente in  $x$ -Richtung,  $a$  Temperaturleitfähigkeit,  $T$  Temperatur, Index  $w$  Wand) erfüllt. Der Ansatz ist also umfassender als bei konstanter Wandtemperatur. Als Beispiel wird die längsangeströmte ebene Platte behandelt. — 3. Es wird darauf hingewiesen, daß die Berechnung der Strömungsgrenzschicht am schiebenden Zylinder identisch ist mit der Berechnung der Temperaturverteilung am gerade angeströmten Zylinder mit konstanter Wandtemperatur.  
W. Szablewski.

Reichardt, H.: Die Energieversorgung der Wandturbulenz. Z. angew. Math. Mech. **33**, 336—345 (1953).

Schuh, H.: Aerodynamic heating on yawed infinite wings and on bodies of arbitrary shape. Kungl. Tekn. Högskol., Inst. Flygtekn., Techn. Notes **35**, 12 S. (1953).

Bloom, Martin: Boundary layers with variable heat capacity on nonisothermal surfaces. J. aeronaut. Sci. **20**, 719 (1953).

Gadd, G. E.: Interactions between wholly laminar or wholly turbulent boundary layers and shock waves strong enough to cause separation. J. aeronaut. Sci. **20**, 729—739 (1953).

**Rotta, J.:** Näherungsverfahren zur Berechnung turbulenter Grenzschichten unter Benutzung des Energiesatzes. Mitt. Max-Planck-Inst. Strömungsforsch. 8, 51 S. (1953).

Es werden Berechnungsmethoden für turbulente Grenzschichten bei inkompressiblen Strömungen entwickelt, die besonders den Einfluß der Reynoldsschen Zahl und der Oberflächenrauigkeit berücksichtigen. Die beiden mitgeteilten Verfahren, die sowohl bei glatten als auch bei rauen Oberflächen anwendbar sind, gehen von dem Impulssatz der Grenzschichttheorie für keilförmige Strömungen aus. Beim *E*-Verfahren hat man, ähnlich wie beim Verfahren von Gruschwitz, zwei gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung zu integrieren, nämlich außer dem Impulssatz noch eine Differentialgleichung für die Änderung der Profilform, welche aus dem Energiesatz für turbulente Grenzschichten hergeleitet wird (daher die Bezeichnung *E*-Verfahren), während das *B*-Verfahren, bei dem wie bei Buri ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen Profilformparameter und Druckgradient angenommen wird, die Integration nur einer gewöhnlichen Differentialgleichung erfordert. Kurven- und Fluchtlinientafeln liefern die benötigten Rechenhilfen. Beispielrechnungen ergeben eine gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Meßergebnissen.

V. Garten.

**Uberoi, Mahinder S.:** Eddy turbulence and random sound in a compressible fluid. Proc. Cambridge philos. Soc. 49, 731—734 (1953).

Verf. zeigt, daß das Turbulenzfeld einer kompressiblen Strömung in zwei nicht miteinander in Korrelation stehende Anteile (fluktuierende Schallwellen = Random Sound und Turbulenzwirbel = Eddy Turbulence) zerlegt werden kann, ohne wie Moyal (dies. Zbl. 46, 424) von einer speziellen Verteilungsfunktion auszugehen. Hierzu wird gezeigt, daß ein beliebiger Tensor zweiter Ordnung in zwei Anteile zerlegt werden kann, von denen der eine divergenzfrei und der andere wirbelfrei Komponenten besitzt. Die hierfür gewonnenen Lösungen sind bei Vorgabe von Randbedingungen (z. B. genügend starkes Abklingen im Unendlichen) eindeutig. Im einfachen Fall der homogenen und isotropen Turbulenz werden die bereits von Moyal gewonnenen Ergebnisse bestätigt.

W. Wuest.

**Giese, J. H. and H. Cohn:** Two new non-linearized conical flows. Quart appl. Math. 11, 101—108 (1953).

Die wenigen bekannten Beispiele exakter Lösungen der quasilinearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung für das Geschwindigkeitspotential einer isentropen dreidimensionalen Gasströmung werden hier um zwei weitere vermehrt. Sie ergeben sich als Anwendungen der Theorie kompressibler Strömungen mit entartetem Hodographen (der Hodograph hat wenige Dimensionen als der ursprüngliche physikalische Strömungsraum). Zu diesen gehören die nicht linearen kegeligen Strömungen, von denen bisher in der Literatur nur drei explizit gegeben wurden: 1. die Prandtl-Meyersche Strömung (mit allgemein schräg zur Anströmungsrichtung gestellter Kante), 2. die Taylor-Maccollsche Strömung um den nicht-angestellten Kreiskegel, 3. die Busemannsche achsensymmetrische konvergente Düse. — Die beiden konstruierten Beispiele entstehen durch geeignete Zusammenfügung zweier gepfeilter Prandtl-Meyerströmungen, wobei die gegenseitige Lage der umströmten Kanten im ersten Fall so gewählt wird, daß beide Strömungen nicht interferieren (der Hodograph ist eindimensional), im zweiten Fall dagegen so, daß sie interferieren (der Hodograph ist zweidimensional). Das erste Beispiel kann durch Einfügung einer keilförmigen Seitenflosse zu einem flugzeugähnlichen Gebilde mit nach vorn gepfeilten und *V*-förmig gestellten Flügeln erweitert werden.

H. Behrbohm.

**Gorup, Guntram v.:** Berechnung von Strömungsfunktionen bei Konturen mit Ecken. Z. angew. Math. Mech. 33, 304—305 (1953).

**Zierep, J.:** Die Bestimmung der Leewellenströmung bei beliebigem Anströmprofil. Z. Flugwiss. 1, 9—11 (1953).

**Guderley, Gottfried and Hideo Yoshihara:** Two-dimensional unsymmetric flow patterns at Mach number 1. J. aeronaut. Sci. 20, 757—768 (1953).

**Nigam, S. D.:** The rotation of an infinite plane lamina in a viscous compressible fluid. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 38, 116—119 (1953).



Die Bewegungsgleichungen der laminaren Strömung an einer unbegrenzten rotierenden Scheibe in kompressibler Flüssigkeit und bei Vernachlässigung der Wärmeleitung werden mittels des Ähnlichkeitsansatzes nach v. Kármán [Z. angew. Math. Mech. 1, 233—252 (1921)] auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen reduziert. Es wird dann die mit den Gleichungen verträgliche Annahme  $p - p_0 \sim \varrho^{5/3}$  ( $p$  Druck,  $\varrho$  Dichte, Index 0 Wand) getroffen. Die analytische Entwicklung der Lösungen wird für kleine Wandabstände mittels eines Potenzreihenansatzes, für große Wandabstände mittels einer Exponentialreihe berechnet. Unter der Annahme guter Konvergenz werden nur die ersten Glieder berücksichtigt und die noch verbleibenden unbestimmten Koeffizienten dadurch bestimmt, daß die beiden Reihenentwicklungen stetig und differenzierbar aneinander angeschlossen werden. *W. Szablewski.*

**Keune, Friedrich:** An approximate method of calculating the subsonic velocity distribution on high-aspect-ratio swept wings of small thickness at zero lift. Kungl. Tekn. Högskol., Inst. Flygtekn., Techn. Notes 26, 36 S. (1953).

Die Arbeit gibt eine Entwicklung des Störpotentials der inkompressiblen Strömung nach großen Spannweiten. Zum Hauptglied, der ebenen Strömung um das örtliche Flügelprofil, treten Zusatzglieder, welche besonders an der Knickstelle von Pfeilflügeln ausschlaggebende Bedeutung erhalten. Mittels der Prandtl-Regel wird der Kompressibilitätseinfluß gewonnen. Die besten Näherungen werden bei niedrigen Machzahlen erzielt (während die analoge Methode kleiner Spannweiten gerade mit Annäherung an Schallgeschwindigkeit besser wird). Damit ist auch ein Einblick in die Genauigkeit der oft recht kritiklos angewandten „Streifenmethode“ gewonnen.

*K. Oswatitsch.*

**Keune, Friedrich:** On the subsonic, transonic and supersonic flow around low aspect ratio wings with incidence and thickness. Kungl. Tekn. Högskol., Inst. Flygtekn., Techn. Notes 28, 32 S. (1953).

Die Theorie von R. T. Jones begnügt sich im allgemeinen mit der Berechnung der Auftriebsverteilung dünner Platten kleiner Spannweite und liefert unendliche Störungen an den Flügelrändern. Keune berechnet die Auftriebsverteilung am dicken Körper mittels Singularitätenbelegungen. Die Unterschiede sind proportional dem Dickenverhältnis der Querschnitte und daher recht groß. Während sich der Dickeneinfluß für den Auftrieb herausmittelt, spielt er für die Druckpunktlage eine gewisse Rolle und muß besonders für die Lastverteilung in Spannweitenrichtung berücksichtigt werden. Die Ergebnisse hängen nicht von der Machzahl ab.

*K. Oswatitsch.*

**Keune, Friedrich:** The influence of camber and geometrical twist on low-aspect-ratio wings of finite thickness in subsonic, transonic and supersonic flow. Kungl. Tekn. Högskol., Inst. Flygtekn., Techn. Notes 29, 13 S. (1953).

Mit Hilfe der in einer vorausgegangenen Arbeit des Verf. (s. vorangeh. Ref.) entwickelten Methode wird der Einfluß von Wölbung und Verwindung auf die Auftriebsverteilung von Flügeln kleiner Spannweite berechnet.

*K. Oswatitsch.*

**Behrbohm, Hermann:** The flat triangular wing with subsonic leading edges in sideslip at supersonic speeds. Svenska Acroplan A. B., techn. Notes 1953, Nr. 14, 23 p. (1953).

Die Geschwindigkeitsverteilung am schiebenden Dreieckflügel im Überschall mit Unterschallvorderkanten wird aus jener des nicht schiebenden Flügels in einfacher Weise durch eine Lorentz-Transformation (hyperbolische Drehung) hergeleitet. Die Resultate können weitgehend in geschlossener Form wiedergegeben werden und sind in Tabellen und Kurven dargestellt.

*K. Oswatitsch.*

**Meksyn, D.:** Integration of the equations of transonic flow in two dimensions. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 220, 239—254 (1953).

Die Arbeit behandelt ebene stationäre Unterschallströmungen in der Nähe der kritischen Machzahl. Zunächst werden die Potentiallinien und Stromlinien der

inkompressiblen Strömung als Koordinaten eingeführt. Vernachlässigungen in der Gleichung für das gesuchte Geschwindigkeitspotential führen zu einer algebraischen Gleichung für dessen Ableitung nach dem inkompressiblen Potential in jedem Punkte der Strömungsebene. Die Anzahl reeller Wurzeln dieser Gleichung hängt von der lokalen Machzahl ab. Die Lösung erfolgt iterativ. Ein Vergleich mit den Resultaten anderer Autoren am Kreiszylinder und an einem  $10^\circ$  dicken Profil zeigt leidliche Übereinstimmung am Zylinder, bessere Übereinstimmung am dünnen Körper. Für die kritischen Machzahlen sind die Ergebnisse besser, doch erhält man dies mit allen Theorien recht zufriedenstellend. *K. Oswatitsch.*

**Trilling, Leon:** Transonic flow past a wedge at zero angle of attack. *Z. angew. Math. Phys.* **4**, 358—375 (1953).

Die ebene schallnahe Strömung mit Unterschallanströmungsgeschwindigkeit um einen dünnen nichtangestellten Flügel mit rhombischem Profil wird im Rahmen der transsonischen Näherungsgleichungen mittels der Hodographenmethode behandelt. Die approximative Erfüllung der Randbedingungen der Tricomigleichung in der Hodographenebene wird nach dem Vorbild der Untersuchungen von G. Guderley und H. Yoshihara (dies. Zbl. **40**, 410) schrittweise bewerkstelligt durch Überlagerung einer geeigneten singulären Lösung (Dipol im Hodographen zur Beschreibung der Parallelanströmung), einer Lösung zur Befriedigung der Staupunktsbedingung im Hodographen, und schließlich einer Reihe von regulären Lösungen zur Befriedigung der restlichen Bedingungen (u. a. Prandtl-Meyer, Expansion lokal um den Knick in Profilmitte). Größe und Gestalt des lokalen Überschallgebietes wird ermittelt in Abhängigkeit vom transsonischen Ähnlichkeitsparameter  $\xi_0$ . Die Druckverteilung über das Profil wird (für  $\xi_0 = -0.825$ ) angegeben. In das Teilintervall der Flügeltiefe, über dem diese Druckverteilung dreiwertig ist, wird der normale Verdichtungsstoß, der das Überschallgebiet abschließt, eingepaßt (seine Lage ist für schwache Stöße durch die Symmetrieforderung des Geschwindigkeitssprungs bestimmt). Die Stärke des Stoßes wird als Funktion von  $\xi_0$  aufgezeichnet. Der Druckwiderstand für den vorderen Teil des Flügels steht in guter Übereinstimmung mit Coles Theorie des endlichen Keils [J. Math. Physics **30**, 79—93 (1951)] und mit Brysons Messungen [N. A. C. A. T. N. 2560 (1951)], woraus man schließen mag, daß die Rückwirkung der Strömung auf dem Flügelhinterteil über das lokale Überschallgebiet hinweg auf die Druckverteilung des Flügelvorderteils unbedeutend ist. Der Widerstand auf dem Flügelhinterteil resultiert zum größten Teil aus den dortigen Saugkräften und ist weit größer als der auf dem Vorderteil. Der berechnete Gesamtwiderstand stimmt größenordnungsmäßig mit experimentellen Ergebnissen überein. *H. Behrbohm.*

**Trilling, L. and K. Walker jr.:** On the transonic flow past a finite wedge. *J. Math. Physics* **32**, 72—79 (1953).

In einer früheren Note hat J. D. Cole [J. Math. Physics **30**, 79—93 (1951)] das ebene Problem der schallnahen Umströmung eines endlichen Keils geringer Neigung und ohne Anstellung mit den üblichen transsonischen Näherungsgleichungen durch Übergang zur Hodographenebene behandelt und gute Übereinstimmung der damit berechneten Widerstandsbeiwerte mit bekannten Messungen erreicht, obwohl seine Lösung nicht alle Randbedingungen des Problems korrekt erfüllt. Insbesondere war die Prandtl-Meyersche Expansion um die Keilschulter nicht einbezogen (und damit die Frage nach der Struktur des nachfolgenden lokalen Überschallgebietes offen geblieben). Doch hatte Cole im Schlußabschnitt einen Weg skizziert, wie durch Hinzunahme gewisser regulärer Lösungen zu seiner (für die Lösung des Gesamtproblems wichtigsten) singulären Lösung die Erfüllung der Randbedingungen verbessert werden kann. — Diesen Gedanken führen die Verf. in der vorliegenden Note aus. Doch darf das einleitend genannte Ziel ihrer Untersuchung „to gain more detailed information on the shape and structure of the local supersonic region“ nicht als voll erreicht angesehen werden. Denn zwar wird die Schalllinie analytisch bestimmt und für drei Werte des transsonischen Ähnlichkeitsparameters berechnet (das Ergebnis mußte ungeprüft bleiben — es wurden 35 Fourierkoeffizienten verwendet), doch wird über den hinteren Abschluß des lokalen Überschallgebiets durch entsprechende Verdichtungsstöße nichts ausgesagt. — Die gefundene Korrektur zum Widerstandsbeiwert nach Cole ist relativ gering. *H. Behrbohm.*

**Martin, John C. and Nathan Gerber:** The second-order lifting pressure and damping in roll of sweptback rolling airfoils at supersonic speeds. *J. aeronaut. Sci.* **20**, 699—704 (1953).

**Lavender, Robert E.:** A note on second order supersonic flow theory. *J. aeronaut. Sci.* **20**, 435—437 (1953).

Nach einer von van Dyke [NACA Tech. Memo Nr. 2744 (1952)] stammende Methode wird der zweite Schritt für die Überschallströmung um einen nichtangestellten



ten Rotationskörper behandelt, dessen Meridiankurve 4 Unstetigkeiten in Krümmung und Neigung zeigt.

*H. Wendt.*

**Heinz, C.: Überschallströmungen um schlanke Drehkörper.** Z. angew. Math. Mech. **33**, 306—308 (1953).

Diese Vortragszusammenfassung behandelt die Berücksichtigung der exakten Randbedingungen in der linearen Überschalltheorie an Drehkörpern. Zum Problem, welches auf ein System von Integralgleichungen führt, wird eine ausführliche Veröffentlichung in Aussicht gestellt. In diesem Zusammenhang sei auf die Vernachlässigungen durch Linearisierung hingewiesen, die in gewissen Machzahlbereichen größer sein dürften als jene, welche sich aus Vereinfachung der Randbedingungen ergeben.

*K. Oswatitsch.*

**Kahane, A. and A. Solarski: Supersonic flow about slender bodies of elliptic cross section.** J. aeronaut. Sci. **20**, 513—524 (1953).

Der Verf. behandelt die reibungsfreie Überschallströmung um dünne nicht-angestellte Körper, die von Ebenen senkrecht zur Anströmung in elliptischen Querschnitten geschnitten werden. Die Strömungen werden als Sonderfälle der allgemeinen von Ward für dünne Körper entwickelten Methode (G. N. Ward, dies. Zbl. **34**, 117) gewonnen. Insbesondere wird auf den elliptischen Kegel und spindelförmige Körper mit parabolischer Begrenzung eingegangen. Für diese werden Druckverteilungen angegeben und mit den Ergebnissen anderer Autoren verglichen.

*H. Wendt.*

**Landahl, M. T.: Analysis of some wing-body-vertical tail interference problems for non-symmetric steady flow using slender-body theory.** Kungl. Tekn. Högskol., Inst. Flygtekn., Techn. Notes **32**, 30 S. (1953).

**Merbt, H. and M. Landahl: Aerodynamic forces on oscillating low aspect ratio wings in compressible flow.** Kungl. Tekn. Högskol., Inst. Flygtekn., Techn. Notes **30**, 20 S. (1953).

**Miles, John W.: Virtual momentum and slender body theory.** Quart. J. Mech. appl. Math. **6**, 286—289 (1953).

Die M. M. Munk'sche Methode zur Berechnung der Luftkräfte an schlanken Luftschiffkörpern [N. A. C. A. Rep. 184 (1923)] und ihre moderne Erweiterung auf Flügel sehr kleinen Seitenverhältnisses (im Unter- und im Überschallbereich) durch R. T. Jones [N. A. C. A. Rep. 835 (1946)] ist wesentlich auf physikalische Intuition gegründet. Ihr gegenüber steht die mathematisch strenge Analyse der Überschallströmung um schlanke zugespitzte Körper, die von G. N. Ward (dies. Zbl. **34**, 117) für den stationären Flug gegeben und vom Verf. (dies. Zbl. **46**, 196) auf den instationären Flug erweitert wurde. Zweck der vorliegenden Note ist es, die Brücke zwischen beiden Theorien zu schlagen und zu zeigen, daß sie allgemein zu den gleichen Resultaten führen. — Nach einer von H. Lamb [Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **111**, 14—25 (1926)] für hydrodynamische Zwecke herauspräparierten Methode von Rayleigh zur Behandlung analoger Beugungsprobleme [Philos. Mag., V. Ser. **44**, 28—52 (1897)] kann nämlich das asymptotische Verhalten des komplexen Geschwindigkeitspotentials der Munk'schen Querströmung in größerer Entfernung vom Körper (und damit also die Stärke des korrespondierenden Dipols) ausgedrückt werden durch den scheinbaren Impuls dieser Querströmung um den Zylinder der lokalen Querschnittfläche und durch diese Fläche selbst. Einsetzen dieses Ausdrucks für die Dipolstärke in die Ward-Mile'sche Darstellung der (komplexen) Querkraftfunktion ergibt dann tatsächlich die Querkraft in irgendeinem lokalen Querschnitt als substantielle Zeitableitung des scheinbaren Impulses. — Schließlich wird noch der scheinbare Impuls in eleganter Weise mit Hilfe des Residuums der Abbildungsfunktion des Körperquerschnitts (konforme Abbildung auf einen Kreis bei Invarianz des Unendlichen) dargestellt.

*H. Behrbohm.*

**Miles, John W.: A general solution for the rectangular airfoil in supersonic flow.** Quart. appl. Math. **11**, 1—8 (1953).

Inspiriert durch Stewartsons Resultate (dies. Zbl. **40**, 408) gibt Verf. in akustischer Näherung eine Herleitung des Störgeschwindigkeitspotentials in der Nähe des Randes eines Rechteckflügels. Der Flügel darf dabei beliebig (aber natürlich hinreichend schwach) verwölbt und der zeitliche Bewegungsablauf beliebig vorgeschrieben sein. Die Methode basiert auf einer Behandlung der vierdimensionalen Wellengleichung in solchen Koordinaten, die aus den ursprünglichen (ortsfesten)

Raum- und Zeitkoordinaten durch eine Lorentztransformation (hyperbolische Drehung) hervorgehen, und benutzt die Theorie der Laplace- und der Fouriertransformation (letzteres, um von der harmonischen zur allgemeinen Zeitabhängigkeit überzugehen). Verschiedene Endformen der Lösung (Störpotential auf dem Flügel) werden gegeben. Jede derselben enthält eine vierfache Quadratur. Gegenüber den früheren Resultaten des Verf. (dies. Zbl. 42, 437) haben die vorliegenden den Vorteil, auch auf Flügelränder schräg zur Anströmung unmittelbar übertragbar zu sein. Einige allgemeine methodische Bemerkungen über Zusammenhänge mit dem Beugungsproblem an einer Halbebene als dem klassischen Gegenstück des instationär mit Überschallgeschwindigkeit fliegenden Rechteckflügels beschließen die Note.

H. Behrbohm.

Li, T. Y. and H. J. Stewart: On an integral equation in the supersonic oscillating wing theory. J. aeronaut. Sci. 20, 724—726 (1953).

Das „important theorem III“ in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 42, 436) der Verff. hat sich, wie Vergleiche mit den Ergebnissen anderer Methoden am harmonisch schwingenden Rechteckflügel im Überschallflug alsbald zeigten, als nicht haltbar erwiesen. Der dortigen Behandlung der grundlegenden Integralgleichung liegt nämlich die (auch vom Ref. in seinem Referat nicht bemerkte) implizite Annahme zugrunde, daß der Aufwind vor dem Flügelrand zeitunabhängig sei. Dies führt dazu, daß die auf Grund jenes Satzes gegebenen Lösungen für den oszillierenden Rechteckflügel [J. aeronaut. Sci. 17, 529—539 (1950)] nur für die Glieder nullter und erster Ordnung einer Entwicklung nach der Schwingungsfrequenz gelten. In der vorliegenden Note wird jedoch für beliebige Flügelformen gezeigt, wie durch sukzessive Lösung hinreichend vieler Abelscher Integralgleichungen die Genauigkeit des Verfahrens bis zu jeder gewünschten Ordnung in der Frequenz  $\tau$  gesteigert werden kann. Als Anwendung hiervon werden die Korrekturen bis incl.  $\tau^3$  für die genannten früheren Resultate für den Rechteckflügel (bei reinen Schlagschwingungen) gegeben.

H. Behrbohm.

Ruppel, Werner et Robert Weber: Le calcul de flutter en régime supersonique. Z. angew. Math. Phys. 4, 128—145 (1953).

In dem Bericht wird eine Methode zur Bestimmung der kritischen Geschwindigkeit mittels Rechenautomaten entwickelt, die dadurch gekennzeichnet ist, daß in der Flutterdeterminante die Luftkraftbeiwerte durch Entwicklungen nach Potenzen der reduzierten Frequenz ersetzt werden, wobei noch streifenweise eben gerechnet wird. Die Entwicklungskoeffizienten werden angegeben.

H. Söhngen.

Krzywoblocki, M. Z. V.: On the general theory of downwash behind a finite wing in supersonic range. Bull. Calcutta math. Soc. 45, 21—40 (1953).

Die Integrodifferentialgleichung für das Potential einer isentropischen, stationären Strömung wird auf die Tragflügeltheorie angewandt und in einigen besonderen Fällen durch das Picardsche Iterationsverfahren gelöst. Hierbei ist es nicht nötig sich auf kleine Anstellwinkel zu beschränken, so daß die Ergebnisse den Rahmen der linearisierten Theorie wesentlich überschreiten.

C. Heinz.

Kainer, Julian H.: A simplified method to obtain the load distribution corresponding to the Ackeret region for wings having arbitrary source distribution at supersonic speeds. J. aeronaut. Sci. 20, 749—750 (1953).

Als „Ackeret-Bereich“ bezeichnet Verf. denjenigen Teil eines Flügels, der vor der Überschall-Vorderkante und den von der Flügelwurzel und Flügelspitze ausgehenden Machschen Kegeln begrenzt ist, in dem sich also der endliche Flügel wie ein unendlich langer schiebender Flügel verhält. Wenn in diesem Bereich für einen Punkt  $P$  das Potential bekannt ist, erhält man für einen anderen Punkt  $P_1$ , der innerhalb des vorderen Machschen Kegels von  $P$  liegt, das Potential dadurch, daß man im Integralausdruck des Quellenpotentials  $P$  durch  $P_1$  ersetzt und nur den reellen Teil nimmt.

W. Wuest.



**Benedikt, Elliot T.: Open-nose body of revolution of minimum drag at small supersonic speeds.** J. aeronaut. Sci. **20**, 720—723 (1953).

Die Untersuchung bezieht sich auf eine rotationssymmetrische Einlaufdüse bei mäßigen Überschallgeschwindigkeiten, wobei die Düse nach einer Erweiterung auf einer Strecke  $l$  in einen unendlich langen Hohlzylinder übergeht. Zur Berechnung des Wellenwiderstandes wird eine von Lighthill angegebene Formel benutzt, und das Variationsproblem für die Düsenform geringsten Wellenwiderstandes führt auf eine Integralgleichung vom Hilbertschen Typus, die durch eine von Tricomi (dies. Zbl. **43**, 107) aufgestellte Inversionsformel gelöst wird. Die besten Düsenformen sind für verschiedene Verhältnisse  $R_0/R_1$  des Anfangs- und Endradius der Düse graphisch aufgetragen, und der Widerstandskoeffizient für die optimale Form ist in Abhängigkeit von  $R_0/R_1$  dargestellt. *W. Wuest.*

**Gilbarg, D. and D. Paolucci: The structure of shock waves in the continuum theory of fluids.** J. rat. Mech. Analysis **2**, 617—642 (1953).

Mit den Gleichungen der Kontinuumsphysik wird die innere Struktur des Verdichtungsstoßes unter verschiedenen Annahmen über die Materialkonstanten behandelt. Der Vergleich mit den unter anderen Voraussetzungen gewonnenen früheren Resultaten zeigt dieselben Größenordnungen. Die Anwendung der Kontinuumsphysik wird mit dem Hinweis verteidigt, daß das Rechnen mit Mittelwerten erfahrungsgemäß in weiten Grenzen gute Resultate liefert und daß kinetische Theorien hier auch nur unter starken Vernachlässigungen anwendbar sind. Der Referent stimmt mit den Verff. überein, daß eine Ablehnung der Richtigkeit der mittels Kontinuumsphysik gewonnenen Resultate für die Stoßstruktur zu weit gehen dürfte. Dennoch bleibt der Einwand, daß man sich nun schon in zahlreichen, ausgedehnten Arbeiten mit einer rein akademischen Frage mit anzweifelter Genauigkeit bemüht. *K. Oswatitsch.*

**Ting, Lu: Diffraction and reflection of weak shocks by structures.** J. Math. Physics **32**, 102—116 (1953).

Die Reflexion von Stößen an Zäunen und Barrieren endlicher Tiefe wird im Rahmen der linearen Gleichungen behandelt, indem die Lösungen für bestimmte charakteristische Zeitintervalle einzeln aufgestellt werden. Die Zeitintervalle ergeben sich aus der Laufzeit der ersten Störung vom oberen Zaunrand zum Zaunfuß, vom Zaunfuß wieder hinauf zum Zaunrand usw. Das Problem ist mit jenem der stationären, allgemein-kegeligen Überschallströmung eng verwandt, was auch in der mathematischen Behandlung zum Ausdruck kommt. Von praktischer Bedeutung ist das Ergebnis, daß der reflektierte und der über den Zaun weglaufende Stoßteil ungeschwächt weiterläuft, während der Druckabfall hinter dem Stoß herläuft, ohne ihn einholen zu können. Letzteres ist aber eine Folge der Linearisierung. Bei einer exakten Behandlung holen die Wellen den Stoß ein und schwächen ihn. Damit führt die lineare Theorie in Zaumnähe zu sehr guten, in großem Zaunabstand zu fraglichen Resultaten. Dies ist jedoch keineswegs als Kritik an der vorliegenden Arbeit, sondern nur als Abgrenzung der durch die mathematischen Schwierigkeiten bedingten Linearisierung zu verstehen. *K. Oswatitsch.*

**Taub, A. H.: Curved shocks in pseudo-stationary flows.** Ann. of Math., II. Ser. **58**, 501—527 (1953).

Die Arbeit handelt von pseudostationären ebenen Strömungen. Bei diesen hängen die Zustandsgrößen (Geschwindigkeitskomponenten  $u_1, u_2$ , Druck  $p$  usw.) nicht von 3 unabhängigen Variablen  $x, y, t$ , sondern nur von den beiden Verhältnissen  $x/t, y/t$  ( $x, y$  = Ortskoordinaten,  $t$  = Zeit) ab. Im Anschluß an Arbeiten von T. Y. Thomas (dies. Zbl. **33**, 319, **34**, 121, **35**, 421, **36**, 264), der analoge Fragen für stationäre Strömungen untersucht hat, werden Konfigurationen geradliniger und gekrümmter Stoßlinien studiert, wie sie insbesondere bei der Reflexion ebener Stoßwellen an einer festen Wand auftreten. Hierbei ergeben sich bemerkenswerte Beziehungen zwischen den Krümmungen der Stoßlinien und der Bahnkurven und Ableitungen der Krümmungen. *R. Sauer.*

**Whitham, G. B.: The propagation of weak spherical shocks in stars.** Commun. pure appl. Math. **6**, 397—414 (1953).

In der Astrophysik spielen Stoßvorgänge insbesondere bei Nova-Explosionen eine wesent-

liche Rolle. Es handelt sich dabei um eine Stoßwellenausbreitung in ein inhomogenes Medium hinein, wobei Dichte, Schallgeschwindigkeit usw. des ungestörten Gases von der Entfernung vom Schwerezentrum abhängen. Auch bei Zugrundelegung des Modells einer durch ihr eigenes Schwerkraft zusammengehaltenen Gaskugel erfordert die Lösung des nicht linearen Problems einen außerordentlichen Rechenaufwand. Die an sich von einer Orts- und Zeitkoordinate abhängigen Differentialgleichungen können in den von Kopal und Mitarbeitern untersuchten Fällen des Roche-Modells und der Dichteverteilung  $r^{-5,12}$  auf eine gewöhnliche Differentialgleichung zurückgeführt werden. Auf der anderen Seite ist eine Vereinfachung möglich, wenn durch Beschränkung auf schwache Stöße die Differentialgleichung linearisiert werden kann. Die Lösung der linearisierten Differentialgleichung wird vom Verf. in Form einer asymptotischen Entwicklung gegeben, die nur unter der Voraussetzung gilt, daß die Schallgeschwindigkeit  $A$  die Bedingung  $dA/dr$  klein von der Ordnung  $A/r$  erfüllt. Eine Verbesserung der linearisierten Lösung ist nach einer bereits früher angegebenen Methode des Verf. (dies. Zbl. 47, 191) möglich. Die verbesserte Lösung gilt auch noch in der Umgebung des Stoßes, versagt dagegen in der Nähe der Oberfläche eines Sternes endlicher Größe. Doch wird für diesen Fall durch eine gesonderte Betrachtung eine Näherungslösung gewonnen. Ähnliche Differentialgleichungen gelten auch für die Ausbreitung von Flachwasserwellen bei veränderlicher Wassertiefe, und vom Verf. wird eine Untersuchung hierüber angekündigt.

W. Wuest.

**McVittie, G. C.: Spherically symmetric solutions of the equations of gas dynamics.** Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 220, 339—355 (1953).

Es wird gezeigt, daß Geschwindigkeit  $q$ , Dichte  $\rho$  und Druck  $p$  einer kugelsymmetrischen Gasmasse durch Umformung der Impuls- und Kontinuitätsgleichung aus einer willkürlichen Funktion  $\Phi$  abgeleitet werden können. Durch Hinzutreten thermodynamischer Beziehungen und der Randbedingungen werden die Lösungen allerdings eingeschränkt. Wählt man  $\Phi = f(t) w(r t^{-1})$ , wobei  $f$  und  $w$  willkürliche Funktionen sind, kann man explizite Formeln für  $q$ ,  $\rho$ ,  $p$  gewinnen. Für die weitere Untersuchung werden solche Funktionen ausgesucht, bei denen  $q$  eine lineare Funktion des Radius  $r$  ist. Die Lösungen werden weiterhin für adiabatische Gasbewegungen spezialisiert, wobei zwei Fälle auftreten, in denen entweder  $f$  oder  $w$  willkürlich bleibt. Die Randbedingungen werden für den Fall einer Expansion in ein „Beinahe-Vakuum“ sowie für eine kugelsymmetrische Stoßwelle als Grenze aufgestellt. Als Sonderfall wird dabei die Primakoffische Lösung gefunden. Gegenüber anderen Berechnungsverfahren hat die Methode des Verf. den Vorzug, daß sie nicht von vornherein auf adiabatische und isentropische Probleme beschränkt ist.

W. Wuest.

**Klein, H. and R. Sedney: Some basic concepts for analyzing dynamic flight test data.** J. aeronaut. Sci. 20, 740—748 (1953).

**Ericksen, Jerald Laverne: Characteristic surfaces of the equations of motion for non-Newtonian fluids.** Z. angew. Math. Phys. 4, 260—267 (1953).

Ähnlich wie in anderen Teilen der Physik können auch in der modernen Dynamik der nicht-Newtonschen Flüssigkeiten charakteristische Linien oder Flächen im Sinn von J. Hadamard definiert werden. Dies wird hier für ebene Strömungen an Hand der von P. S. Rivlin (dies. Zbl. 31, 430) angegebenen Gleichungen ausgeführt. Die charakteristischen Richtungen hängen von den Invarianten des Deformationstensors ab. U. a. wird gezeigt, daß für Punkte, in denen gewisse Gleichungen erfüllt sind, jede Richtung parallel zur Strömungsebene charakteristisch ist. Schriftennachweis.

Th. Pöschl.

**Rusanov, B. V.: Langsame instationäre Strömung einer zähen Flüssigkeit um einen Kreiszyylinder.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 89, 983—986 (1953) [Russisch].

L'A. construit l'écoulement plan, non permanent d'un liquide visqueux indéfini autour d'un obstacle circulaire fixe. Les équations du problème sont linéarisées, le champ des vitesses est symétrique par rapport à un diamètre du cercle et assujéti à certaines conditions qui assurent l'unicité de la solution. Celle-ci est donnée sous la forme de séries de Fourier en  $\theta$  (angle polaire). L'étude de la solution explique la raison de la non existence d'un écoulement permanent autour d'un cercle (paradoxe de Stokes).

J. Kravtchenko.



**Rusanov, B. V.:** Die langsame, instationäre Strömung einer zähen Flüssigkeit um eine Kugel. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **90**, 41—44 (1953) [Russisch].

Dans un travail antérieur (v. rapport précéd.) l'A. a donné une méthode d'intégration des équations de Navier-Stokes. Il applique ici un procédé voisin à l'étude du mouvement de révolution d'un liquide visqueux indéfini autour d'une sphère, animée d'un mouvement de translation rectiligne. Les hypothèses de régularités sur les données initiales sont du même type que dans le mémoire précité. L'A. retrouve la formule classique de Boussinesq pour la résistance. Les travaux de Villat (Leçons sur les fluides visqueux, Paris 1943, pp. 192—224) semblent avoir échappé à l'A.

*J. Kravtchenko.*

**Lojezanskij, L. G.:** Die Ausbreitung eines verdrehten Strahls in einem unbegrenzten Raum, der mit derselben Flüssigkeit erfüllt ist. Priklad. Mat. Mech. **17**, 3—16 (1953) [Russisch].

Landau et Rumer ont étudié, en négligeant les vitesses transversales, le régime stationnaire, établi au sein d'une masse de liquide visqueux indéfini, non pesant, sous l'action d'une veine de révolution s'échappant d'une source. L'A. reprend la question en tenant compte des vitesses négligées par les auteurs précités mais en supposant que la „torsion“ de la veine sur elle-même est faible. Dans le cas laminaire, l'A. simplifie les équations de Navier écrites en coordonnées cylindro-polaires,  $x, r, \theta$  ( $Ox$  étant pris suivant l'axe de la veine et l'origine  $O$  étant placée à la source) en s'inspirant de la théorie de la couche limite. Puis, il cherche les expressions des com-

posantes de la vitesse suivant les lignes coordonnées sous forme de séries  $\sum_1^{\infty} \frac{a_n(\eta)}{x^n}$  (donc singu-

lières près de  $O$ ) où  $\eta = r/x\sqrt{\nu}$ ,  $\nu$  étant le coefficient de viscosité cinématique. Les  $a_n$  sont difficiles à calculer; l'A. se borne aux premières approximations dont il tire d'intéressantes conclusions quant à l'allure du phénomène. Dans le cas du régime turbulent, une série d'hypothèses, parfois audacieuses, permet de mettre le problème en équations; celles-ci se trouvent être du même type que celles qui gouvernent le mouvement laminaire. Le contrôle expérimental de la théorie serait satisfaisant.

*J. Kravtchenko.*

**Maruhn, Karl:** Existenzbetrachtungen über die Bewegung von Wirbelringen. Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden **2**, 385—390 (1953).

Die Untersuchung schließt an eine frühere Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **21**, 169) an, in der für ein beliebiges endliches Zeitintervall die Existenz einer rotations-symmetrischen Wirbelbewegung nachgewiesen wurde, bei der sich die Meridian-schnitte nur wenig von den Wirbelbereichen einer gegebenen ebenen Bewegung unterscheiden. Hierbei mußten die Wirbelringe als „dünn“ und „dicht benachbart“ vorausgesetzt werden. In der vorliegenden Arbeit, bei der es sich ebenfalls um ein Existenz- und Eindeutigkeitsproblem „im Großen“ handelt, wird diese Voraussetzung dahin abgeändert, daß jetzt zwei Gruppen von Wirbelbereichen zugelassen sind, von denen jede für sich wiederum dünne und dicht benachbarte Wirbelringe enthält, während die beiden Gruppen selbst voneinander „weit entfernt“ sind. Die Aufgabe wird auf eine Integrodifferentialgleichung zurückgeführt, für die Lösung werden sukzessive Näherungen angegeben. Als Beispiel wird eine Strömung mit zwei weit voneinander entfernten Wirbelringen von nahezu kreisförmigem Querschnitt diskutiert.

*R. Sauer.*

**Valensi, Jacques et Claire Clarion:** Mouvement oscillatoire avec viscosité et inertie; cas des amplitudes finies. C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 1138—1140 (1953).

**Boreli, Mladen:** Étude d'un écoulement de révolution en milieu poreux. Cas d'un puits n'atteignant pas le fond. C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 1490—1491 (1953).

**Guevel, Pierre:** Application de la transformation de Schwartz-Cristoffel à l'étude d'un écoulement souterrain. C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 597—599 (1953).

**Possel, René de et Jacques Valensi:** Sur le sillage d'une plaque perméable. C. r. Acad. Sci., Paris **236**, 2211—2213 (1953).

**Gotusso, Guido:** Una proprietà delle onde sulla superficie di un liquido. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **8**, 36—40 (1953).

Die natürliche Wellenbewegung des freien Spiegels einer vollkommenen Flüssig-

keit erfolgt derart, daß sich gemäß der Erhebung am Rande in jedem Augenblick der quadratische Mittelwert der Horizontalkomponente der Beschleunigung möglichst wenig vom quadratischen Mittelwert der Vertikalkomponente unterscheidet.

*Th. Pöschl.*

**Ursell, F.:** Short surface waves due to an oscillating immersed body. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **220**, 90—103 (1953).

Die Wellenbewegung, die durch einen zur Hälfte in Flüssigkeit getauchten in lotrechter Richtung senkrecht zur Achse schwingenden langen Kreiszylinder hervorgerufen wird, konnte Verf. früher (dies. Zbl. **35**, 120) unter Vernachlässigung von Reibung und Oberflächenspannung durch Reihenentwicklung mit Koeffizienten aus der Lösung eines unendlichen Systems linearer Gleichungen nur für kleine  $N$  ( $N$  proportional dem Zylinderradius  $a$  und dem Quadrat der Frequenz und umgekehrt proportional der Schwerebeschleunigung) berechnen. Für große  $N$ , wo die Wellenbewegung auf eine dünne Oberflächenschicht der Dicke  $a/N$  beschränkt bleibt, während außerhalb von ihr die Bewegung sich dem Dipolpotential für  $N \rightarrow \infty$  nähert, wird das Problem dadurch gelöst, daß die Fredholm'sche Integralgleichung 2. Art auf die Lösung einer anderen Integralgleichung durch Iteration für große  $N$  zurückgeführt wird, bei welcher der Kern mit wachsendem  $N$  gegen Null geht. Es werden die beiden höchsten Glieder der konvergenten Lösung berechnet. Offen ist noch, ob die Methode auf allgemeine dreidimensionale Probleme und die Beugung der Optik und Akustik ausgedehnt werden kann.

*J. Pretsch.*

**Zartarian, G. and H. M. Voss:** On the evaluation of the function  $F_\lambda(M, \omega)$ . *J. aeronaut. Sci.* **20**, 781—782 (1953).

Verff. schlagen vor, das bei Flügel-Überschall-Schwingungen gebrauchte Integral

$$f_\lambda(M, \bar{\omega}) = \int_0^1 \exp(-i \bar{\omega} u) J_0\left(\frac{\bar{\omega}}{M} u\right) u^\lambda du$$

mittels der Reihenentwicklung

$$f_\lambda(M, \bar{\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda + 2n - 1} a_{2n} \bar{\omega}^{2n} - i \bar{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda + 2n + 2} b_{2n} \bar{\omega}^{2n},$$

$$a_{2n} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j!)^2 [2(n-j)]!} \left(\frac{1}{2M}\right)^{2j}, \quad b_{2n} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j!)^2 [2(n-j+1)]!} \left(\frac{1}{2M}\right)^{2j},$$

zu berechnen, in welcher der Einfluß der Machzahl  $M$ , des Frequenzparameters  $\omega$  und von  $\lambda$  separiert ist. Eine Zahlentabelle der  $a_{2n}$ ,  $b_{2n}$  ( $n = 0, 1, \dots, 6$ ) für einige Werte von  $M$  zwischen  $5/4$  und  $5/2$  ist beigelegt.

*J. Weissinger.*

**Apté, Achuyt:** Sur une solution approchée du problème de l'onde solitaire. *C. r. Acad. Sci., Paris* **236**, 2477—2479 (1953).

L'A. donne une solution approchée du problème de l'onde solitaire, remarquable par son haut degré de précision (la pression reste constante à 0,3 % sur la courbe qui approche la ligne libre). Il faut noter que les formules résolutive sont obtenues par un raisonnement tout à fait inattendu. L'A. étudie quelques propriétés de sa solution; il est curieux que dans le voisinage de la crête, l'approximation ne soit que du premier ordre.

*J. Kravtchenko.*

**Longuet-Higgins, M. S.:** On the decrease of velocity with depth in an irrotational water wave. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **49**, 552—560 (1953).

Es werden wirbelfreie Oberflächenwellen endlicher Amplitude auf einer inkompressiblen Flüssigkeitsschicht der Tiefe  $h$  untersucht.  $z$  = Tiefe unter der Oberfläche. Bei einer räumlich periodischen Bewegung und  $h = \text{const}$  nimmt die mittlere kinetische Energiedichte mit zunehmendem  $z$  ab. Hieraus folgt, daß der Mittelwert des Staudruckes mit  $z$  zunimmt. Für  $h \rightarrow \infty$  nimmt die Partikelbewegung exponentiell mit  $z$  ab. Die Druckschwankungen in großen Tiefen brauchen im allgemeinen nicht zu verschwinden. Bei  $h = \text{const}$  nimmt für eine fortschreitende Welle die Geschwindigkeit des Massentransportes mit zunehmendem  $z$  ab.

*W. Kertz.*

**Hunt, J. N.:** A note on gravity waves of finite amplitude. *Quart. J. Mech. appl. Math.* **6**, 336—343 (1953).



● **Lyttleton, R. A.:** *The stability of rotating liquid masses.* London: Cambridge University Press 1953. 150 p. 35 s.

Verf. hat sich zum Ziel gesetzt, in seinem Buch einerseits alle bisher bekannten, wichtigen mathematischen Sätze über die Stabilität rotierender Flüssigkeitskugeln abzuleiten und andererseits diese Sätze auf astrophysikalische Probleme anzuwenden. An der Spitze des ersten Teils steht die klare Unterscheidung zwischen gewöhnlicher Stabilität (ordinary stability) und säkularer Stabilität (secular stability). Ein System ist in „gewöhnlich stabilem“ Gleichgewicht, wenn sich kleine Schwingungen, die man dem System erteilt, nicht aufschaukeln; es ist in „säkular stabilem“ Gleichgewicht, wenn das totale mechanische Potential eine positiv definite (quadratische) Form der Lagekoordinaten ist. Ein säkular instabiles System bewegt sich bei Anwesenheit von Reibung von dem betrachteten Zustand weg und kann diesen von selbst nicht wieder erreichen. Die Menge der säkular stabilen Systeme ist eine echte Teilmenge der Menge der gewöhnlich stabilen. Verf. diskutiert dann das Stabilitätsverhalten der MacLaurinschen und der Jacobischen Ellipsoide. Wesentlich erscheint dem Verf. der Verzweigungspunkt der Jacobischen Ellipsoide mit den Birnenfiguren. An dieser Stelle werden die Jacobischen Ellipsoide säkular instabil, aber gleichzeitig auch gewöhnlich instabil (Cartan 1922, 1924). Diese Tatsache benutzt Verf., um im kosmogonischen Teil seines Buches die hauptsächlich von Jeans vertretene Ansicht zu untersuchen, daß ein Jacobisches Ellipsoid an dem Verzweigungspunkt mit den Birnenfiguren bei wachsender Winkelgeschwindigkeit oder — was formal gleichwertig ist — bei wachsendem Drehmoment in zwei Körper zerfällt und damit ein Doppelsternsystem bildet. Da die Jacobischen Ellipsoide gewöhnlich instabil werden, so können sie im Falle völliger Reibungslosigkeit nicht in Teile zerfallen, die sich nacheinander in periodischen Bahnen umeinander bewegen, da bei Reibungslosigkeit durch Umkehr des Zeitablaufs aus dem Endzustand wieder der Anfangszustand hervorgehen muß. Dieser Einwand des Verf. gegen die Jeanssche Theorie der Doppelsternentstehung gilt jedoch nur bei reibungslosen Flüssigkeiten. Bei einem wirklichen Stern mit Viskosität, veränderlicher Dichte usw. ist nicht unmittelbar zu übersehen, was vom Verzweigungspunkt mit den Birnenfiguren an mit den Ellipsoiden wirklich geschehen wird. Besonders ist auch zu beachten, daß bei rascher Rotation der Stern keinesfalls auch nur annähernd wie ein starrer Körper rotieren wird. Abgesehen von den meridionalen Strömungen, die nach dem v. Zeipel'schen Theorem zu erwarten sind, wird die Winkelgeschwindigkeit im Stern von Ort zu Ort variieren. Wieweit alle diese Effekte das Problem der Doppelsternentstehung aus Jacobischen Ellipsoiden beeinflussen, läßt sich mit unserem heutigen Wissen nicht sagen, und so läßt sich auch mit dem vom Verf. in seinem Werk benutzten mathematischen Apparat keine Entscheidung treffen. Es ist jedoch sehr verdienstvoll, daß Verf. die bisherigen Methoden der Stabilitätsuntersuchung in mathematisch einwandfreier Form behandelt und dadurch und durch die saubere Trennung beider Stabilitätsbegriffe Unklarheiten und Mißverständnisse bei früheren Autoren beseitigt. Das Buch vermittelt dadurch gleichzeitig einen Einblick in die Schönheit und Eleganz der Methoden der klassischen Stabilitätstheorie, eine Schönheit und Eleganz, die man leider bei zukünftigen Stabilitätsbetrachtungen, die den physikalischen Gegebenheiten mehr gerecht werden, nicht mehr erreichen wird.

*R. Kippenhahn.*

## Wärmelehre:

● **Sears, Francis Weston:** *An introduction to thermodynamics, the kinetic theory of gases, and statistical mechanics.* 2. ed. (Principles of Physics Series.) Cambridge, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., Inc. 1953. X, 374 p. \$ 7,50.

**Hall, Newman A.:** *Nonequilibrium thermodynamics.* J. appl. Phys. **24**, 819—825 (1953).

Kurze Übersicht über die Grundlagen, Methoden und Grenzen der Thermodynamik der irreversiblen Prozesse.

*J. Meixner.*

**Kluitenberg, G. A., S. R. de Groot and P. Mazur:** *Relativistic thermodynamics of irreversible processes. I. Heat conduction, diffusion, viscous flow and chemical reactions; formal part.* Physica **19**, 689—704 (1953).

Die relativistische Thermodynamik der irreversiblen Prozesse, welche Eckart 1940 (dies. Zbl. **27**, 31) für eine einfache Flüssigkeit oder ein Gas mit einer Komponente entwickelt hat, wird auf isotrope fluide Mischungen, in welchen Wärmeleitung, Diffusion, innere Reibung und chemische Reaktionen auftreten, ausgedehnt. Einschränkend wird angenommen, daß sich die Ruhmasse nicht in andere Energieformen verwandelt und daß keine von der Materiegeschwindigkeit abhängenden äußeren Kräfte wirken. Im übrigen werden wie üblich an jeder Stelle hinreichend kleine Abweichungen vom Gleichgewicht vorausgesetzt. Die Vierervektoren der relativen Materieflüsse werden so definiert, daß ihre Summe über alle Komponenten verschwindet und daß sie senkrecht zum Vierervektor der Schwerpunktgeschwindigkeit sind. Analog zur nicht-relativistischen Theorie werden die Erhaltungssätze für die Ruhmassen der Komponenten, für den Impuls und die Energie aufgestellt, und aus ihnen wird die Entropiebilanz gewonnen. Für die

phänomenologischen Ansätze gelten die Onsagerschen Reziprozitätsbeziehungen; sie sind Lorentz-kovariant. Ein neuer Kopplungseffekt zwischen Diffusion und Wärmeleitung wird gefunden.

*J. Meixner.*

**Prigogine, I. et P. Mazur: Sur l'extension de la thermodynamique aux phénomènes irréversibles liés aux degrés de liberté internes.** *Physica* **19**, 241—254 (1953).

Indem man beispielsweise die Orientierung von Dipolen unter dem Einfluß einer äußeren Kraft als Aufeinanderfolge von beliebig kleinen Schritten in einer inneren Koordinate (Winkelkoordinate) auffaßt und diese in Analogie zu einer chemischen Kettenreaktion  $1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \dots$  setzt, kann man auf diesen irreversiblen Prozeß die Methoden der Thermodynamik der irreversiblen Prozesse anwenden. Dies geschieht hier für Systeme mit beliebig vielen inneren Freiheitsgraden unter der Voraussetzung kontinuierlicher Bewegung im gesamten Konfigurationsraum. Aus der lokalen Entropieerzeugung ergeben sich dann in üblicher Weise die phänomenologischen Gleichungen; sie sind vom Typ von Diffusionsgleichungen im Konfigurationsraum und reduzieren sich für ideal verdünnte Lösungen auf Fokker-Plancksche Gleichungen im Riemannschen Raum. Es folgen Anwendungen auf chemische Reaktionen — diese aufgefaßt als Diffusion längs einer inneren Koordinate — und auf die Orientierung von elektrischen Dipolen im elektrischen Feld.

*J. Meixner.*

**Mazur, P. et I. Prigogine: Contribution à la thermodynamique de la matière dans un champ électromagnétique.** *Acad. Roy. Belgique, Cl. Sci., Mém. Coll. 8<sup>e</sup>* **28**, Nr. 1, 56 S. (1953).

Mit der Methode der Thermodynamik irreversibler Prozesse wird die Theorie fluider nichtviskoser Medien im elektromagnetischen Feld ohne Berücksichtigung der Magnetisierung und chemischer Reaktionen behandelt. Das erste Kapitel beschäftigt sich mit nichtpolarisierbaren Systemen, die aus mehreren elektrisch geladenen und gegeneinander beweglichen Komponenten zusammengesetzt sind. Aus den Maxwell'schen Gleichungen, den Erhaltungssätzen und der Gibbs'schen Differentialbeziehung wird die lokale Entropieerzeugung berechnet. Aus ihr folgen die Bedingungen des thermodynamischen Gleichgewichts. Der Begriff des elektrochemischen Potentials wird diskutiert, und es zeigt sich, daß dieses nur unter speziellen Bedingungen als Summe des chemischen Potentials und der spezifischen elektrischen potentiellen Energie definiert werden kann. — Im zweiten Kapitel wird die Thermodynamik der nichtleitenden polarisierbaren Dielektrika unter zwei verschiedenen Gesichtspunkten behandelt. Der erste entspricht der klassischen Methode von Helmholtz; es wird die elektromagnetische Feldenergie als Zusatz zu freier Energie betrachtet, und daraus werden die ponderomotorischen Kräfte hergeleitet unter der Annahme, daß die Dielektrizitätskonstante nur von der Temperatur und vom spezifischen Volumen abhängt. Bei der zweiten Auffassung nach Kelvin wird eine örtliche ponderomotorische Kraft eingeführt, welche der eines Dipols im inhomogenen elektrischen Feld entspricht. Beide Auffassungen sind für reversible Zustandsänderungen des Dielektrikums völlig äquivalent; es ergeben sich die gleichen thermodynamischen Funktionen, und die in beiden Auffassungen verschiedenen Ausdrücke für die ponderomotorische Kraft im Dielektrikum entsprechen nur einer verschiedenen Aufteilung der Gesamtkraft in mechanische Kraft (negativer Gradient des Drucks) und elektrische Kraft. Die zweite Auffassung besitzt jedoch einige Vorteile; sie führt auf ein thermodynamisches Potential, welches im mechanischen Gleichgewicht und bei konstanter Temperatur überall denselben Wert hat, und sie ist insbesondere auf den Fall irreversibler Prozesse anwendbar, da mit ihr nicht von vornherein die Annahme reversibler Zustandsänderungen notwendig ist. — Im dritten Kapitel schließlich werden die Ergebnisse auf polarisierbare Systeme mit beliebig vielen zum Teil auch geladenen und gegeneinander beweglichen Komponenten erweitert. Die Entropieerzeugung unterscheidet sich hier explizit nicht von der im Falle verschwindender Polarisation, doch enthält das chemische Potential dann noch einen von der Polarisation herrührenden Anteil.

*J. Meixner.*

**Groot, S. R. de, P. Mazur und H. A. Tolhoek: Thermodynamics of irreversible electrochemical phenomena.** *Physica* **19**, 549—554 (1953).

Von der totalen Energiedichte bewegter Materie im elektromagnetischen Feld ausgehend werden die zeitliche Änderung der inneren Energie und der Entropie in elektrochemischen Systemen berechnet. Der Begriff des elektrochemischen Potentials wird diskutiert und ein Ansatz von Kemp [*Nature* **170**, 1028 (1952)] für den zweiten Hauptsatz in elektrochemischen Systemen kritisch besprochen.

*J. Meixner.*



Holtan jr., H., P. Mazur and S. R. de Groot: On the theory of thermocouples and thermocells. *Physica* **19**, 1109—1118 (1953).

Poppelbaum, W. J.: La mesure statique et dynamique des forces électromotrices. *Helvet. phys. Acta* **26**, 489—498 (1953).

Die phänomenologischen Gleichungen der Thermodynamik der irreversiblen Prozesse werden für ein System von homogenen geladenen Phasen aufgestellt und auf die thermoelektrischen Effekte und auf die chemischen Erscheinungen in galvanischen Elementen angewandt, und es wird hieraus begründet, daß die Ergebnisse einer elektrostatischen und einer elektrodynamischen Messung der elektromotorischen Kraft eines Elements sich um die Differenz der Kontaktpotentiale unterscheiden.

*J. Meixner.*

Jan, J.-P.: Remarques au sujet de la phénoménologie des conductibilités électrique et thermique et de son application aux phénomènes magnétogalvaniques et magnétothermiques transversaux. *Helvet. phys. Acta* **26**, 281—290 (1953).

Diskussion der transversalen galvanomagnetischen und thermomagnetischen Effekte, ausgehend von den phänomenologischen Beziehungen zwischen elektrischer Feldstärke und Temperaturgradient einerseits, elektrischer Stromdichte und Wärmefluß andererseits. Insbesondere wird der elektrische Strom senkrecht zu den Mantellinien eines Hohlzylinders mit einem zur Oberfläche senkrechten Magnetfeld berechnet, in dem parallel zur Achse ein elektrischer Strom fließt oder ein Temperaturgradient vorliegt.

*J. Meixner.*

Meixner, Josef: Zur Theorie der Wärmeleitfähigkeit von Gasen. *Z. Naturforsch.* **8a**, 69—73 (1953).

Die auf einfachen Modellvorstellungen beruhende Euckensche Berechnung des Verhältnisses von Wärmeleitfähigkeit zu Zähigkeit eines mehratomigen Gases wurde früher von einigen Autoren mittels der Enskogschen kinetischen Gastheorie verschärft. Verf. kann zeigen, daß sich die verbesserte Eucken-Formel aus der phänomenologischen Thermodynamik der irreversiblen Prozesse ergibt, wenn man eine Gasmischung aus chemisch miteinander reagierenden Komponenten untersucht, wobei jeder Komponente Molekeln gleicher Anregungsstufe entsprechen. Es kommt dabei sehr wesentlich auf die gegenseitige Diffusion dieser Molekeln an. Der Vorzug der phänomenologischen Behandlungsweise besteht vor allem darin, daß man nicht mehr wie bei der kinetischen Gastheorie spezielle Molekülmodelle (z. B. harte elastische Kugeln) in die Rechnung einführen muß.

*G. U. Schubert.*

Lee, John F.: Specific heat of gases at the critical point. *Z. angew. Math. Phys.* **4**, 401—404 (1953).

Verschaffelt, J. E.: Sur les relations d'Onsager (appendice). *Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér.* **39**, 165—168 (1953).

Verschaffelt, J. E.: Sur l'équilibre d'un fluide mixte. *Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér.* **39**, 169—174 (1953).

Verschaffelt, J. E.: Sur la chaleur réaction. *Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér.* **39**, 285—292 (1953).

Verschaffelt, J. E.: Sur les minima de dissipation d'énergie. *Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér.* **39**, 369—380 (1953).

Verschaffelt, J. E.: Sur l'énergie dissipée par transformation moléculaire. *Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér.* **39**, 463—473 (1953).

Bergmann, Peter G. and Alice C. Thomson: Generalized statistical mechanics and the Onsager relations. *Phys. Review, II. Ser.* **91**, 180—184 (1953).

Gesamtheiten thermodynamisch isolierter Systeme werden betrachtet, die nur wenig von einer Gleichgewichtsgesamtheit abweichen. Mit der vom ersten Verf. entwickelten statistischen Mechanik des Nichtgleichgewichts und der dort definierten „System-Entropie“ (dies. Zbl. **44**, 421) werden die phänomenologischen Gleichungen der Thermodynamik der irreversiblen Prozesse begründet und die On-

sagerschen Reziprozitätsbeziehungen neu, ohne Heranziehung der Schwankungstheorie, hergeleitet. Diese Überlegungen lassen sich noch nicht in befriedigender Weise auf die Behandlung stationärer Vorgänge in nicht isolierten Systemen ausdehnen. Man wird dazu Gesamtheiten von Systemen benötigen, deren Wechselwirkung mit der Umgebung durch Einführung zusätzlicher Zufallsvariablen beschrieben wird. *J. Meixner.*

**Frisch, Harry L.: An equipartition principle of generalized canonical ensembles.** Phys. Review, II. Ser. **91**, 791—793 (1953).

Für verallgemeinerte kanonische Gesamtheiten, deren Verteilungsfunktionen von zusätzlichen Parametern abhängen (vgl. vorsteh. Ref.), läßt sich ein verallgemeinertes Equipartitionstheorem beweisen. Es geht im Grenzfall des Gleichgewichts in das bekannte klassische Ergebnis über, vorausgesetzt, daß einer der Parameter oder die Summe einiger oder aller Parameter mit der Hamilton-Funktion des Systems übereinstimmt. Das Theorem wird auf eine Mischung von zwei Gasen mit verschiedener Temperatur und schwacher Wechselwirkung und auf ein Modell eines Gases mit zwei Integralen der Bewegungsgleichungen angewandt. *J. Meixner.*

**Bernard, Jean Joseph: Sur une distribution composée des vitesses d'agitation moléculaire.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. natur., VIII. Ser. **14**, 46—50 (1953).

Für ein Gas, das außer der molekularen Wärmebewegung mit Maxwell'scher Verteilung noch eine eindimensionale stationäre Translationsbewegung ausführt, wird eine „zusammengesetzte Verteilungsfunktion“ definiert, welche die Wahrscheinlichkeit zum Ausdruck bringt, daß die Translationsgeschwindigkeit und die innere Energie in einem gewissen Bereich liegt. Für ein solches Gas werden auch Ausdrücke für Druck, Wärmefluß und Zähigkeit hergeleitet. Die zusammengesetzte Verteilungsfunktion wird schließlich auch in die Boltzmann-Gleichung eingeführt und die Lösung diskutiert. *W. Wuest.*

**Lopuszański, J.: Distributions and statistical moments of bosons and fermions with some of their applications.** Acta phys. Polon. **11**, 298—313 (1953).

Die Arbeit behandelt kombinatorische Probleme vom folgenden Typ: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß  $m$  Gruppen von je  $k$  „Zellen“ (z. B. Zählrohren) von  $N$  einfallenden Teilchen mindestens je 1 mal getroffen werden? Welche Schwankungen in der Schwärzung sind auf einer gleichmäßig beleuchteten photographischen Platte infolge der statistischen Verteilung der Körner verschiedener Empfindlichkeit resp. der einfallenden Lichtquanten zu erwarten? — Zur Lösung wird die bekannte Methode der erzeugenden Funktionen benutzt. Methodisch enthält die Arbeit nichts Neues; die Ergebnisse sind größtenteils bekannt. *H. Koppe.*

**Barker, J. A.: Statistical mechanics of interacting dipoles.** Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **219**, 367—372 (1953).

**Davin, Marcel: Sur la distribution de probabilité de résistance d'une éprouvette et sur l'influence de ses dimensions.** C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 869—871 (1953).

**Dutta, M.: A quasi-lattice theory of real gases and of strong electrolytes in solutions.** Proc. nat. Inst. Sci. India **19**, 183—194 (1953).

Diese Arbeit gibt eine Übersicht über die von M. Dutta und S. N. Bagehi entwickelte Statistik realer Gase; ferner wird eine Bemerkung zur Verteilung der Ionen in starken Elektrolyten gemacht. Bei der Berechnung der Verteilungsfunktionen und der thermodynamischen Größen bedient sich der Verf. der Vorstellungen von Lennard-Jones, Devonshire und Frenkel über die Struktur der Flüssigkeiten. Reale Gase oder Ionen in starken Elektrolyten werden als eine Zusammensetzung von Atomen oder Ionen und Leerstellen angesehen. Das Wesentliche ist, daß auch die Leerstellen gleichberechtigt wie die Teilchen in die Rechnung eingehen. Bei der Aufstellung der thermodynamischen Wahrscheinlichkeit wird der Raum in Schichten vom Volumen  $V_i$  eingeteilt, in denen  $N_i$  Teilchen mit den potentiellen Energien  $\epsilon_i$  enthalten sein sollen. Wird mit  $b$  die Deckungssphäre eines Moleküls bezeichnet, so stehen in einer Schicht neben den  $N_i$  besetzten Stellen  $V_i/b - N_i$  Löcher gegenüber. Als thermodynamisch



sche Wahrscheinlichkeit wird dann im Koordinatenraum

$$W_1 = \prod_i \left[ \left( \frac{V_i}{b} \right)! \right] / \left[ N_i! \left( \frac{V_i}{b} - N_i \right)! \right]$$

angesetzt, während für die Geschwindigkeitsverteilung nach Planck-Lorentz die thermodynamische Wahrscheinlichkeit  $W_2 = \prod_i \{ N_i! / \prod a_{il}! \}$  genommen wird. Im Konfigurationsraum wird dann die thermodynamische Wahrscheinlichkeit als Produkt  $W = W_1 \cdot W_2$  angesetzt. Die  $a_{il}$  sind die Anzahl der Moleküle in der  $i$ -ten Schicht, welche die kinetische Energie  $\varepsilon_l$  besitzen. Unter Berücksichtigung der üblichen Nebenbedingungen kommt der Verf. unter Verwendung der Maximummethode zu den Ausdrücken

$$N_i = \frac{V_i/b}{e^{\nu + w_i/kT} + 1}, \quad a_l = e^{-\lambda - \varepsilon_l/kT}.$$

Hierin bedeuten  $\nu$  und  $\lambda$  Parameter. Anschließend werden einige thermodynamische Größen, wie Entropie, freie Energie und der Druck berechnet. In einem weiteren Abschnitt erfolgt die Ausdehnung der Theorie auf eine Mischung verschieden großer Teilchen. Es wird auch eine Anwendung auf die Verteilung der Ionen in starken Elektrolyten gegeben. Es sei bemerkt, daß auch von M. Eigen und E. Wicke eine Statistik entwickelt worden ist, in der ebenfalls das endliche Volumen der Teilchen mitberücksichtigt wurde. Die Ableitung der Formeln ist sehr einfach und der Vorteil gegenüber der Statistik von M. Dutta beruht darauf, daß in den Verteilungsfunktionen nur unmittelbar anschauliche Größen auftreten. An Stelle von Verteilungsmoduln und Multiplikatoren in der Dutta-Statistik erscheinen Ausdrücke, welche Besetzungszahlen enthalten. Ebenfalls ist das gleiche Problem von R. Schlögl sowie H. Falkenhagen und G. Kelbg bearbeitet worden.

H. Falkenhagen-G. Kelbg.

Verschaffelt, J. E.: L'influence de transformations moléculaires sur les phénomènes de transport. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 39, 257—272 (1953).

Schuh, H.: A new method for calculating laminar heat transfer on cylinders of arbitrary cross-section and on bodies of revolution at constant and variable wall temperature. Kungl. Tekn. Högskol., Inst. Flygtekn., Techn. Notes 33, 40 S. (1953).

Bory, Charles: Essai théorique sur la diffusion dans un fluide en mouvement. C. r. Acad. Sci., Paris 236, 1743—1745 (1953).

Während in der üblichen Theorie innere Reibung und Wärmeleitung in strömenden Medien als diskontinuierliche Austauschphänomene angesehen werden, deren statistisches Mittel erst einen scheinbar kontinuierlichen Verlauf des Gesamtvorganges liefert, schlägt Verf. eine auch „im Kleinen“ kontinuierliche Theorie vor. Verf. gibt nur die allgemeinen Gedankengänge seiner Theorie an, die im wesentlichen auf Kontinuitätsbetrachtungen in einem mitbewegten Koordinatensystem und der Einführung einer willkürlichen kinematischen Funktion beruhen. Die Anwendung auf ein eindimensionales Diffusionsproblem ergibt schließlich das Fouriersche Wärmeleitungsgesetz und die bekannten Zusammenhänge zwischen Temperaturleitfähigkeit und Materialtransport sowie zwischen Wärmeleitfähigkeit und Viskosität.

F. Cap.

Blackwell, J. H.: Radial-axial heat flow in regions bounded internally by circular cylinders. Canadian J. Phys. 31, 472—479 (1953).

L'A. applicando simultaneamente le trasformazioni di Fourier e di Laplace determina la temperatura nello spazio indefinito esterno ad una superficie cilindrica; suppone nulla la temperatura iniziale e la superficie percorsa, solo in una sua porzione (compresa fra due piani normali al suo asse), da un flusso costante e assegnato di calore. Applicando ancora la trasformazione di Laplace e uno sviluppo in serie di Fourier l'A. calcola la temperatura in un mezzo esterno ad una superficie cilindrica finita e compresa fra due piani normali al suo asse; suppone ancora la temperatura iniziale nulla, la superficie percorsa da un flusso costante di calore, inoltre i due piani mantenuti a temperatura costante.

D. Graffi.

Reinville, Earl D.: A heat conduction problem and the product of two error functions. J. Math. Physics 32, 43—47 (1953).

Verf. geht aus von dem folgenden Randwertproblem (Wärmeleitungsproblem):

(1)  $\partial u / \partial t = h^2 (\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2)$  für  $0 < t$ ,  $0 < x$ ,  $0 < y$ ,  $h^2 = \text{constant}$ ;  
für  $t \rightarrow 0^+$  geht  $u \rightarrow 1$ ; für  $x \rightarrow 0^+$  geht  $u \rightarrow 0$ ; für  $y \rightarrow 0^+$  geht  $u \rightarrow 0$ . Es hat die Lösung

(2)  $u = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2h\sqrt{t}}\right) \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2h\sqrt{t}}\right)$ , wobei  $\operatorname{erf}(x) = \frac{\gamma}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\alpha^2} d\alpha$ . Nach Einführung von

Polarkoordinaten  $\varrho$ ,  $\theta$  und anschließendem Einführen von neuen Veränderlichen  $r = -\varrho^2/4 \cdot h^2 t$ ,  $w = w(\varrho, t) - w$  nicht näher festgelegt —, werden von  $w$  unabhängige Lösungen der transformierten Gl. (1) gesucht. Durch Vergleich mit (2) ergibt sich die Relation:

$$(3) \operatorname{erf}(r \cos \Phi) \operatorname{erf}(r \sin \Phi) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin[(4n+2)\Phi] r^{4n+2} {}_1F_1(2n+1; 4n+3; -r^2)}{(2n+1) 2^{4n+1} (3/2)_{2n}},$$

$0 < r$ ,  $0 \leq \Phi \leq \frac{\pi}{2}$ ,  ${}_1F_1(a, b, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n z^n}{(b)_n n!}$  confluyente hypergeometrische Funktion mit

$(a)_n = a(a+1) \cdots (a+n-1)$ ,  $(a)_0 = 1$ ,  $n > 0$ , ganz. — Anschließend wird das Verfahren noch auf das Wärmeleitungsproblem eines zweidimensionalen Keils angewandt. F. Reutter.

Deeg, Emil: Über nichtstationäre Diffusion in geschichteten Medien. Z. angew. Phys. 5, 370—374 (1953).

Manfredi, Bianca: Sopra un problema non lineare di propagazione del calore per un mezzo dotato di simmetria sferica. Rivista Mat. Univ. Parma 4, 123—132 (1953).

Verf., die schon die Temperaturverteilung im Außenraum eines Zylinders bei nichtlinearer Randbedingung [Rivista Mat. Univ. Parma 3, 383—396 (1952)] untersucht hat, leitet die entsprechenden Ergebnisse für den Außenraum einer Kugel ab. M. J. De Schwarz.

Vernotte, Pierre: Sur la calorimétrie directe des isolants, et spécialement des liquides. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 1218—1220 (1953).

### Elektrodynamik. Optik:

Schild, A.: A new modification of classical electromagnetic theory. Phys. Review, II. Ser. 92, 1009—1014 (1953).

Verf. leitet die Bewegungsgleichung eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld von einem neuen Variationsprinzip ab. Dieses Prinzip entsteht dadurch, daß man die Masse aus der Lagrange-Funktion eliminiert, indem man das Minkowskische Linienelement  $ds$  durch  $du = ds/m$  ersetzt und das Variationsprinzip  $\delta \int L(x, p) du = 0$  betrachtet, wobei jetzt der Impuls  $p$  durch  $p = dx/du$  gegeben ist. Die aus diesem Variationsprinzip folgende Bewegungsgleichung stimmt mit der schon bekannten überein. Ferner stellt Verf. die Hypothese auf, daß man zu einer nicht-lokalen Theorie des elektromagnetischen Feldes übergehen muß, wobei aber die Strukturfunktion nicht von einer konstanten Länge, sondern von den Komponenten des Teilchenimpulses abhängen soll. A. Papapetrou.

Plebański, J.: Nonlinear electrodynamics and elementary laws. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 1, 34—38 (1953).

Rubinowicz hat gezeigt (dies. Zbl. 48, 445), wie man sämtliche Lösungen eines linearen Feldes aus der kugelsymmetrischen Grundlösung gewinnen kann. Im Anschluß daran zeigt der Verf. in der vorliegenden Note, daß dasselbe auch für eine nichtlineare Elektrodynamik gilt. Allerdings wird für eine Lorentz-invariante Elektrodynamik aus dem Elementargesetz nur die Abhängigkeit der Lagrangefunktion von der ersten Invarianten  $F = \frac{1}{2} \cdot (\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{E}^2)$  festgelegt, während die Abhängigkeit von der zweiten Invarianten  $G^2 = (\mathfrak{H} \cdot \mathfrak{E})^2$  offenbleibt; sie wird allerdings im wesentlichen festgelegt, wenn man mit P. Weiss (dies. Zbl. 16, 140) fordert, daß die Lagrangefunktion in Abhängigkeit der beiden Invarianten der Differentialgleichung  $L_{FF} + L_{GG} = 0$  genügt. Eine physikalisch vernünftige Elektrodynamik, bei welcher die radialsymmetrische Singularität mit der Ladung und der Masse des Elektrons behaftet ist, erhält man dadurch, daß man das Elementargesetz von einem geeigneten Wert im Zentrum monoton abnehmen und in Unendlichen asymptotisch gegen das Coulombpotential konvergieren läßt. Walter Franz.

Infeld, L. and J. Plebański: Electrodynamics without potentials. Acta phys. Polon. 12, 123—134 (1953).



In der bisherigen Formulierung der dualistischen Elektrodynamik (die neben den Feldgleichungen noch Bewegungsgleichungen für die Materie annimmt), setzt man eine der Maxwell'schen Gleichungen voraus und gewinnt die andere aus einem Variationsprinzip, indem man nach den Potentialen variiert. Verf. möchten die Potentiale durchweg als Hilfsgrößen behandeln und geben daher ein Variationsprinzip an, bei dem die zuvor hergeleitete Maxwell'sche Gleichung als Nebenbedingung vorausgesetzt und die andere durch Variation nach den Komponenten des Feldtensors hergeleitet wird. Die Potentiale erscheinen hier als Lagrangesche Multiplikatoren. — Dann wird eine unitäre Theorie mit dem Feldtensor  $p_{\alpha\beta} = (\mathfrak{D}, \mathfrak{H})$  als fundamentaler Größe angegeben. Alle anderen Größen werden aus  $p_{\alpha\beta}$  hergeleitet. Z. B. ist der Strom definiert durch  $4\pi j^\beta/c = p^{\beta\beta}$ . Die Lagrangefunktion  $H$  soll von den Invarianten  $P = -p_{\alpha\beta} p^{\alpha\beta}/4$ ,  $Q = (j^\alpha j_\alpha)^{1/2} 4\pi \cdot m c/e$  abhängen. Durch Variation nach den Komponenten von  $p_{\alpha\beta}$  entstehen die Grundgleichungen

$$\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right) p_{\alpha\beta} = \left(\frac{4\pi m^2 c^3}{e^2}\right) \left[ \left(\frac{\partial H}{\partial Q} \frac{j_\beta}{Q}\right)_\alpha - \left(\frac{\partial H}{\partial Q} \frac{j_\alpha}{Q}\right)_\beta \right]$$

welche mit den Abkürzungen  $f_{\alpha\beta} = (\partial H/\partial P) \cdot p_{\alpha\beta}$ ;  $A_\alpha = (4\pi m^2 c^3/e^2) \cdot (\partial H/\partial Q) \cdot (j_\alpha/Q)$  in  $f_{\alpha\beta} = A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta}$  übergeht. Die enge Beziehung zur Mieschen Theorie, Spezialisierung auf die Diracsche Theorie (dies. Zbl. 43, 428) und die Bewegungsgleichungen werden diskutiert. Schließlich wird gezeigt, wie der Formalismus auf die zweite Form der Diracschen Theorie (dies. Zbl. 48, 204) anzuwenden ist.

G. Höhler.

**Suffczyński, Maciej:** Note on electrodynamics without potentials. Acta phys. Polon. 12, 83—86 (1953).

Im Anschluß an Infeld und Plebański (vorsteh. Ref.) untersucht Verf. die Hamiltonsche Formulierung der Diracschen Theorie (dies. Zbl. 43, 424). Er kommt auf ein bereits von Dirac gefundenes Ergebnis.

G. Höhler.

**Infeld, L.:** On the use of an approximation method in Dirac's electrodynamics. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 1, 18—22 (1953).

Die u. a. von Einstein und Infeld (dies. Zbl. 33, 425) benutzte Näherungsmethode wird auf die Diracsche nichtlineare Elektrodynamik (dies. Zbl. 43, 428) übertragen.

G. Höhler.

**Werle, J.:** A new approximation method for the meson field theory. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 1, 23—26 (1953).

Anwendung der im vorstehenden Referat genannten Methoden auf die Mesongleichung mit vorgegebenen Quellen

$$(\square - \mu^2) \varphi = -4\pi \Omega \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_N),$$

$\mathbf{r}_N$  = Ortsvektor des Nukleons,  $\Omega$  durch Feld und Kopplungstyp bestimmter Operator. Es ergibt sich eine nach zeitlichen Ableitungen fortschreitende Reihe für  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ . Vorausgesetzt wird die Vertauschbarkeit von  $\Omega$  mit dem (Laplaceschen)  $\Delta$ -Operator.

G. Höhler.

**Butcher, P. N.:** A variational formulation of the multi-stream electrodynamic field equations. Philos. Mag., VII. Ser. 44, 971—979 (1953).

Es wird die klassische Bewegung einer Raumladungswolke mit Berücksichtigung des Eigenfeldes untersucht. Ergebnisse von Dirac (dies. Zbl. 43, 428; 48, 204), insbesondere sein Variationsprinzip, und von Buneman (dies. Zbl. 48, 204) werden für den praktischen Gebrauch in nichtrelativistischer Näherung formuliert. Dann behandelt Verf. den Fall der Überlagerung mehrerer Geschwindigkeitsfelder  $\mathbf{v}_n$  (vgl. geometrische Optik mit mehreren Lichtquellen oder mit Spiegeln) sowie die Verallgemeinerung, daß  $n$  nicht nur die ganzen Zahlen, sondern ein Kontinuum durchläuft.

G. Höhler.

**Kaempffer, F. A.:** Theory of the electromagnetic vacuum. (Preliminary report.) Canadian J. Phys. 31, 497—500 (1953).

Verf. geht aus von Diracs nichtlinearer Elektrodynamik in wirbelfreier Form (dies. Zbl. 43, 428). Er bemerkt, daß im Falle des Vakuums ( $\mathfrak{E} = 0$ ,  $\mathfrak{H} = 0$ ) für  $\mathbf{v}$  die Bewegungsgleichungen für reibungsfreie und wirbelfreie Flüssigkeiten gelten (allgemeiner schon bei London, Superfluids, New York 1950, insbesondere § 8; dies.

Zbl. 41, 585) und nimmt an, daß damit ein Vakuum bei  $T = 0$  beschrieben sei. Für höhere Temperaturen sollen Elementaranregungen im Sinne von Landau auftreten, wobei die Photonen den Phononen und die Elektronen den Rotonen entsprechen. *G. Höhler.*

**Kaempffer, F. A.: Theory of the electromagnetic vacuum. I.** Canadian J. Phys. 31, 629—635 (1953).

Die Diracsche Theorie wird abgeändert durch die Forderung nach Eichinvarianz. Hinzunahme der Lorentzkonvention und Einführung einer weiteren Feldgröße  $\alpha(x, y, z, t)$  durch die von Dirac mit konstantem  $\alpha$  als Normierungsbedingung für das Viererpotential  $(\mathcal{A}, \Phi)$  geforderte Relation:  $\Phi = \int \alpha^2 + \mathcal{A}^2 \approx \alpha + \mathcal{A}^2 / 2\alpha$ . Mit  $\mathcal{A} = v \times c$  bleibt die Flüssigkeit nun nicht mehr wirbelfrei (bezüglich  $v$ ). Verf. gibt ein Variationsprinzip an und versucht die Einführung von Spinoren sowie von Anregungen, die den Neutrinos entsprechen. *G. Höhler.*

**Cade, R.: Some electrostatic and steady-current problems involving anisotropic bodies.** Proc. phys. Soc., Sect. B 66, 557—569 (1953).

Es werden folgende Einzelprobleme der Elektrostatik bzw. Elektrodynamik theoretisch behandelt: 1. Eine nicht leitende Kugel aus einem anisotropen Dielektrikum mit symmetrisch-tensorieller Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_1$  wird in eine dielektrische Flüssigkeit mit konstanter Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_0$  getaucht, die sich in einem homogenen elektrischen Feld bestimmter Feldstärke befindet. Es ist die Potentialverteilung innerhalb und außerhalb der Kugel sowie die mechanische Wirkung des Feldes auf die Kugel zu bestimmen. — 2. Es wird angenommen, daß die anisotrope Kugel sowie die Flüssigkeit leitend sind. Die Leitfähigkeit der Kugel sei durch einen Diagonaltensor  $\sigma_1$  gegeben, dessen Achsen nicht mit denen des Tensors  $\epsilon_1$  zusammenfallen. — 3. Ähnlich Fall 1, also Annahme eines anisotropen nicht leitenden Körpers, der aber nicht eine Kugel, sondern ein Sphäroid ist. — 4. Ähnlich Fall 2, aber wieder statt einer Kugel ein Sphäroid. Es wird als experimentelle Anwendung der erhaltenen Ergebnisse die Bestimmung kristalliner dielektrischer Konstanten behandelt, wobei auf die Fehlerquellen in den früheren Behandlungen von Voigt (Lehrbuch der Kristallphysik, Leipzig 1910) und Wooster (Crystal Physics, Cambridge 1949) hingewiesen wird. *J. Picht.*

**Baudoux, Pierre: Sur le potentiel vecteur dû aux courants de surface.** Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 39, 636—639 (1953).

Es wird gezeigt, daß das Vektorpotential flächenhafter Ströme auf einem ganz im Endlichen gelegenen leitenden Körper, wie das Vektorpotential räumlicher Ströme, innerhalb des endlichen Volumens stets quellenfrei ist. *H. Buchholz.*

**Amar, Henri and Carl Oberman: A nonplanar circuit with a steady current in a uniform magnetic field.** Amer. J. Phys. 21, 518—519 (1953).

**Pierce, J. R. and L. R. Walker: „Brillouin flow“ with thermal velocities.** J. appl. Phys. 24, 1328—1330 (1953).

**Guttenberg, W. von: Über den genauen Wert der Kapazität des Kreisplattenkondensators.** Ann. der Physik, VI. F. 12, 321—339 (1953).

**Arsove, Maynard G.: A note on the network postulates.** J. Math. Physics 32, 203—206 (1953).

Verf. gibt eine ausführliche Begründung dafür, daß die in linearen Netzwerken geltenden Relationen nicht wesentlich davon abhängen, auf welche Orientierung der Zweige man sich dabei bezieht. Er zeigt ferner, daß das zweite (von den Spannungen handelnde) Kirchhoffsche Gesetz durch den Energiesatz ersetzt werden kann, dadurch wird bei den Grundvoraussetzungen der Netzwerktheorie die Bezugnahme auf geschlossene Wege vermieden. *A. Stöhr.*

**Saltzer, Charles: The second fundamental theorem of electrical networks.** Quart. appl. Math. 11, 119—123 (1953).

Verf. betrachtet in einem Netzwerk die Zweige nicht als Widerstände mit in Serie gelegten Quellen konstanter Spannung, sondern als Leitwerte (Admittanzen) mit parallel gelegten Quellen konstanten Stroms. Er gewinnt dann die Grundgleichungen der Netzwerktheorie auf einem Wege, der als duales Gegenstück zu der gebräuchlicheren Betrachtungsweise mit in Serie gelegten Spannungsquellen an



gesehen werden kann. Die Beziehungen zwischen beiden Betrachtungsweisen werden diskutiert. Durchweg wird Matrizenschreibweise benutzt. *A. Stöhr.*

**Tellegen, B. D. H.:** Synthesis of  $2n$ -poles by networks containing the minimum number of elements. *J. Math. Physics* **32**, 1—18 (1953).

Verf. gibt einleitend eine ausführliche Übersicht über Arbeiten anderer Autoren mit ähnlicher Zielsetzung und zeigt dann, wie ein linearer passiver  $2n$ -Pol, dessen Impedanzmatrix so vorgeschrieben ist, daß sie den notwendigen Rationalitäts- und Positivitätsbedingungen genügt, durch die kleinstmögliche Anzahl von Schaltelementen realisiert werden kann; dabei werden auch ideale Transformatoren verwendet. Das eingeschlagene Verfahren ist eine Verallgemeinerung des von O. Brune (dies. Zbl. **3**, 85) für Zweipole benutzten Verfahrens. *A. Stöhr.*

**Payne, W. T.:** Spinor theory of four-terminal networks. *J. Math. Physics* **32**, 19—33 (1953).

Verf. wünscht Spannung  $V = V_0 e^{i(2\pi\nu t + \delta)}$  und Strom  $I = I_0 e^{i(2\pi\nu t + \varepsilon)}$  an einem Klemmenpaar geometrisch im dreidimensionalen reellen Raum zu veranschaulichen. Er bildet zu diesem Zweck die dimensionsgleichen komplexen Größen  $S_1 = V/(1\Omega)^{1/2}$ ,  $S_2 = I \cdot (1\Omega)^{1/2}$  und bildet mit deren Hilfe einen Spinor. Dieser ist durch seinen Betrag  $S$  und die drei Eulerischen Winkel  $\theta$  (Polarwinkel),  $\varphi$  (Azimut) und  $\psi$  (Drehwinkel um die durch  $\theta$ ,  $\varphi$  festgelegte Achse) gekennzeichnet;  $S$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  sind reell, und mit  $S_1$ ,  $S_2$  bestehen die Relationen

$$S_1 = (2S)^{1/2} \cos(\theta/2) e^{i(\varphi+\psi)/2}, \quad S_2 = (2S)^{1/2} \sin(\theta/2) e^{i(\varphi-\psi)/2}.$$

(Also sind  $S$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  zeitunabhängig, und  $\psi$  schreitet linear mit der Zeit  $t$  fort.) Der Vektor  $\mathbf{P}$  vom Betrag  $S$  und der durch  $\theta$ ,  $\varphi$  festgelegten Richtung ( $\psi$  wird hier nicht benutzt) hat die Komponenten

$$P_1 = (S_1 S_2 + S_2 S_1)/2, \quad P_2 = -i(S_1 S_2 - S_2 S_1)/2, \quad P_3 = (S_1 S_1 - S_2 S_2)/2,$$

von denen  $P_1$ ,  $P_2$  bis auf einen Zahlenfaktor als die mittlere Wirk- und Blindleistung gedeutet werden können. Der Quotient  $\sigma = S_1/S_2$  läßt sich aus dem in die Richtung von  $\theta$ ,  $\varphi$  weisenden Einheitsvektor durch stereographische Projektion erhalten und kann als Impedanz gedeutet werden. Verf. untersucht nun, wie sich solche Spinoren bei linearen Transformationen von  $S_1$ ,  $S_2$  geometrisch verhalten, insbesondere bei solchen, die bei dem Übergang von Eingangsspannung und Eingangsstrom zu Ausgangsspannung und Ausgangsstrom eines linearen Vierpols auftreten, und unter Hervorhebung interessanter Spezialfälle. *A. Stöhr.*

**Weinberg, Louis:** The Darlington problem. *J. appl. Phys.* **24**, 776—779 (1953).

Die Übertragungsfunktion (= Ausgangsspannung:Eingangsspannung) eines gesuchten Vierpols sei in der Gestalt  $K = p/q$  vorgeschrieben, wobei  $p$  und  $q$  als Funktionen des Frequenzparameters Polynome sind,  $p$  positive Koeffizienten besitzt und  $q$  ein Hurwitzsches Polynom ist; zusätzlich wird vorausgesetzt, daß  $p$  entweder ein gerades oder ein ungerades Polynom sei. Verf. zeigt, daß zu dieser Übertragungsfunktion ein mit einer reinen Reaktanz belasteter Vierpol gefunden werden kann, der außer einem einzigen Ohmschen Widerstand nur verlustlose Schaltelemente enthält. Wenn man nur fordert, daß die vorgeschriebene Übertragungsfunktion bis auf eine multiplikative Konstante verwirklicht werden soll, werden überdies beim Aufbau des Vierpols keine Gegeninduktivitäten benötigt. Der gesuchte Vierpol wird so konstruiert, daß zwei verlustlose Vierpole hintereinandergeschaltet werden und ein Ohmscher Widerstand parallel zu dem Klemmenpaar liegt, an dem diese verlustlosen Vierpole miteinander verbunden sind. Die Anzahl der benötigten Schaltelemente wird klein gehalten. Ein Beispiel wird numerisch durchgerechnet. *A. Stöhr.*

**Storch, Leo:** A theorem on the impedance-transforming properties of reactive networks. *J. appl. Phys.* **24**, 833—838 (1953).

Die Transformation eines beliebigen Belastungs-Scheinwiderstandes durch einen linearen nicht ausgearteten rein reaktiven Vierpol ist rechnerisch eine gebrochen-lineare Transformation, die die rechte Halbebene auf sich abbildet. Das „Kreisorttheorem“ des Verf. besagt (vom Ref. der Kürze halber in die Sprache der Funktionen-theorie übersetzt), daß dabei die nichteuklidischen Radien von Kreisen erhalten bleiben und daß zwei Kreise mit gleichen n.-e. Radien genau dann aufeinander abgebildet werden, wenn ihre n.-e. Mittelpunkt aufeinander abgebildet werden. Verf. macht davon einige Anwendungen, die Kurven konstanter Fehlanpassung, Frequenzabhängigkeit sowie Welligkeit auf Übertragungsleitungen betreffen.

*A. Stöhr.*

**White, W. D.:** Nonlinear filters. J. appl. Phys. **24**, 1412 (1953).

**Zadeh, L. A.:** Optimum nonlinear filters. J. appl. Phys. **24**, 396–404 (1953).

Für ein gesuchtes Filter sei zu jeder Inputfunktion  $u(t)$  die gewünschte Outputfunktion  $v^*(t)$  vorgeschrieben. Verf. will das gesuchte Filter durch ein solches approximieren, dessen Outputfunktion in der Gestalt  $(*) v(t) = \int_0^\infty K[u(t-\tau), \tau] d\tau$  darstellbar ist; die Approximation sei optimal in dem Sinne, daß der Mittelwert von  $(v - v^*)^2$  minimal wird. Die Aufgabe führt auf eine Integralgleichung für  $K$ , deren Auflösung sich Verf. mittels eines Rechengäräts bewerkstelligt denkt. Verf. diskutiert ferner Spezialfälle des Ansatzes  $(*)$  (u. a. lineare Filter) sowie Verallgemeinerungen von  $(*)$ , nämlich

$$v(t) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty K[u(t-\tau_1), \dots, u(t-\tau_k), \tau_1, \dots, \tau_k] d\tau_1 \dots d\tau_k;$$

Filter mit letztgenannter Eigenschaft nennt er Filter der Klasse  $\mathfrak{R}_k$ . A. Stöhr.

**Zadeh, L. A.:** Nonlinear multipoles. Proc. nat. Acad. Sci. USA **39**, 274–280 (1953).

Verf. definiert Summe (d. i. ausgangsseitige Addition) und Produkt (d. i. Hintereinanderschaltung) von  $(m+n)$ -Polen; dabei ist  $m$  die Anzahl der Eingangsklemmen und  $n$  die der Ausgangsklemmen. Den Ausführungen des Verf. über die zu einem gegebenen  $(m+n)$ -Pol inversen  $(n-m)$ -Pole konnte Ref. nicht überall folgen; anscheinend hat Verf. dabei ungenannte zusätzliche Voraussetzungen benutzt. Es werden spezielle Klassen von  $(m+1)$ -Polen dadurch definiert, daß die Outputfunktion  $v(t)$  durch gewisse mehrfache Integrale ausdrückbar ist, in denen die Inputfunktionen  $u_\nu(t)$  vorkommen; Beispiele sind die im folgenden Referat genannten Formeln; die Integraldarstellung kann angenähert durch eine Schaltung nachgeahmt werden, die einige angezapfte Verzögerungsleitungen sowie einige trägheits- und gedächtnislos arbeitende Multipole enthält. A. Stöhr.

**Colombo, Giuseppe:** Sulle oscillazioni forzate di un circuito comprendente una bobina a nucleo di ferro. Rend. Sem. mat. Univ. Padova **22**, 380–398 (1953).

L'A. considera l'equazione  $f(\dot{q}) \ddot{q} + R \dot{q} + q c = E(t)$  a cui soddisfa la carica  $q$  su una armatura del condensatore, di capacità  $c$ , inserito in un circuito di resistenza  $R$  ed autoinduzione  $f(\dot{q})$  funzione della  $\dot{q}$ ;  $E(t)$  è la forza elettromotrice periodica di periodo  $2T$ , impressa nel circuito. In base ad opportune ipotesi sulla  $f(\dot{q})$  e  $E(t)$  l'A., con considerazioni topologiche, dimostra l'esistenza di una soluzione sottoarmonica di (1) (di periodo  $6T$ ) e ne studia la stabilità. D. Graffi.

**Kron, Gabriel:** A set of principles to interconnect the solutions of physical systems. J. appl. Phys. **24**, 965–980 (1953).

Systeme von sehr vielen Gleichungen mit sehr vielen Unbekannten, insbesondere lineare Gleichungssysteme, die in der Physik oder Technik auftreten, lassen sich unter Umständen durch Zerlegen in Teilsysteme behandeln. Letztere werden erst einzeln vollständig gelöst und deren Lösungen dann zusammengesetzt. Der Aufwand an Rechenarbeit wird in passenden Fällen bei Zerlegung in  $n$  Teilsysteme schätzungsweise um den beachtlichen Faktor  $2/n^2$  verringert. Für viele vorkommende Aufgaben läßt sich, wie Verf. in mehreren früheren Publikationen zeigte, ein äquivalentes Netzwerkproblem angeben. Obwohl diese elektrische Einkleidung grundsätzlich entbehrlich ist, liefert sie doch ein recht anschauliches Modell für die Zerlegung des Gesamtsystems. Verf. führt diesen allgemeinen Gedanken dann an einem speziellen Beispiel vor, nämlich an der Auflösung einer Poissonschen linearen partiellen Differentialgleichung. Die Aufgabe wird näherungsweise ersetzt durch die Berechnung eines gewissen Netzwerks mit quadratischen Maschen (336 Maschen im Beispiel). Der weitere Gang der Rechnung enthält keine Vernachlässigungen. Das Netzwerk wird in 11 Teilnetzwerke zerlegt, die zur weiteren Ersparnis von Rechenarbeit so gewählt sind, daß mehrere davon gleichartigen Aufbau besitzen. Die Teilnetzwerke werden nun einzeln berechnet, an Grund dieser Berechnung durch einfachere Ersatzschaltungen ersetzt, diese Ersatzschaltungen zu einem Gesamtnetzwerk zusammengesetzt und letzteres durch weitere Umformungen vereinfacht, so daß man schließlich zu einem dem ursprünglichen Netzwerk äquivalenten Netzwerk kommt, aus dem man die gewünschten Angaben entnehmen kann. Die Rechnung ist zweifach



nicht vollständig durchgeführt, aber es werden für alle einzelnen Schritte genaue Anweisungen gegeben, die den gesamten erforderlichen Rechenaufwand zu überblicken gestatten und die auch für Behandlung vieler in ähnlicher Weise einkleidbarer Probleme instand setzen. Ein ständig benutztes Hilfsmittel bilden dabei diejenigen Methoden zur Berechnung und zur Zusammenfassung von Netzwerken, die Verf. in seinem Buch „Tensor Analysis of Networks“ (New York 1939, dies. Zbl. 22, 168) sowie in einer Aufsatzfolge in den Trans. Amer. Inst. Electr. Engrs. 70, 1239—1246 (1951), 71, 505—512, 814—821 (1952) und „The interconnection of transmission systems“] ausführlicher dargelegt hat.

A. Stöhr.

Weber, Heinrich E.: Methodik der Berechnung von Regulierungen. Z. angew. Math. Phys. 4, 233—260 (1953).

Verf. erläutert für lineare Systeme den Begriff der Regelung und gibt einen Überblick über grundlegende bekannte Tatsachen, insbesondere erläutert er das Stabilitätskriterium von Nyquist. Er gibt sodann praktische Verfahren an, um die Stabilität vorhandener Regelungen durch Phasendrehglieder oder zusätzliche Gegenkopplungen zu verbessern. Der Einfluß von Störungen und der Einfluß der Laufzeit wird besprochen. Bei allen Berechnungen wird besonders auf mögliche Vernachlässigungen hingewiesen, durch die auch bei komplizierteren Aufgaben der Rechenaufwand erträglich bleibt. Als Beispiel ist die Übertragungsfunktion bei der Tourenzahlregelung eines Gleichstromnebenschlußmotors durchgerechnet; das an sich nicht lineare Problem wird dabei durch die Annahme nur kleiner Störungen linearisiert.

A. Stöhr.

Effertz, H. F.: Beschränkte Funktionen, Frequenzcharakteristiken elektrischer Netzwerke und algebraische Stabilitätskriterien. Z. angew. Math. Mech. 33, 281—283 (1953).

Frühau, Hans: Über die Anwendung der Besselschen Differentialgleichung und der Besselschen Zylinderfunktionen I. Art in der Elektrotechnik. Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden 2, 487—502 (1953).

Aymerich, Giuseppe: Sulle oscillazioni autosostenute impulsivamente. Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari 22, 34—37 (1953).

Il Rocard [L'onde électrique 16 (1937)] ha proposto di rappresentare, schematicamente, alcuni sistemi non lineari mediante l'ordinario oscillatore smorzato soggetto però, durante i suoi passaggi per la posizione di equilibrio, a brusche variazioni di velocità. L'A. dimostra che, per lo studio di questo oscillatore, sono applicabili i metodi approssimati di Kryloff e Bogoliuboff.

D. Graffi.

Hoop, A. T. de: On the propagation constant in gentle circular bends in rectangular wave guides. — Matrix theory. J. appl. Phys. 24, 1325—1327 (1953).

Unter Benutzung früherer Arbeiten von Buchholz, Marshak und Rice werden die Fortpflanzungskonstanten für elektromagnetische Wellentypen in leicht gekrümmten Hohlleitern von rechteckigem Querschnitt allgemein berechnet. Das auftretende Eigenwertproblem wird mit den Methoden der Matrizenrechnung gelöst.

P. Urban.

Aymerich, Giuseppe: Un teorema di unicità sulle onde elettromagnetiche guidate da un guscio anisotropo. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 8, 273—276 (1953).

Considerato un guscio cilindrico, anisotropo, con direzione di anisotropia diversa da quella della generatrice del cilindro, e con sezione semplicemente connessa, l'A. dimostra che un campo elettromagnetico, sostenuto dal guscio, è univocamente determinato, fra due piani normali all'asse del guscio stesso, dalla conoscenza, su questi piani, delle componenti normali del vettore elettrico e del vettore magnetico, nell'ipotesi che questi vettori siano all'infinito infinitesimi di ordine maggiore di uno.

D. Graffi.

Harrington, Roger F.: Propagation along a slotted cylinder. J. appl. Phys. 24, 1366—1371 (1953).

Das Problem der Führung elektromagnetischer Energie durch einen unendlich langen Metallzylinder mit schmalem Längsschlitz wird näherungsweise mit genügender

Genaueigkeit gelöst. Die entwickelten Formeln basieren auf einem Variationsprinzip, das ähnlich dem ist, das von Schwinger zur Behandlung von Störstellen in Hohlrohrleitungen verwendet wurde. Die explizite Durchrechnung wird für den  $H_{11}$ - und  $E_{01}$ -Typ durchgeführt, und zwar wird der Einfluß der Schlitzbreite auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und die Dämpfung ermittelt. Die experimentell für endlich lange Zylinder gefundenen Meßwerte stimmen mit der Theorie sehr gut überein.

P. Urban.

Higgins, T. P. and A. W. Straiton: Characteristics of an elliptical electromagnetic resonant cavity operating in the  $TE_{111}$  mode. J. appl. Phys. **24**, 1297—1299 (1953).

Caprioli, Luigi: Sul comportamento dei modi TEM nei cavi coassiali in presenza di lieve eterogeneità del dielettrico. Rend. Sem. mat. Univ. Padova **22**, 354—360 (1953).

Verf. betrachtet einen Wellenleiter, der zwischen einer inneren und einer äußeren zylindrischen Fläche enthalten ist, deren Erzeugende parallel sind. Es wird das Medium im Leiter mit konstanter Permeabilität angenommen; die dielektrische Konstante  $\epsilon$  wird als um einen Mittelwert  $\epsilon_c$  (der derselbe ist auf jeder den Erzeugenden parallelen Geraden) variabel und sehr wenig von  $\epsilon_c$  verschieden angenommen. Zuerst berechnet Verf. die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle, die nahe jener Welle ist, die mit  $\epsilon = \epsilon_c$  entsteht, und beweist, daß es für jene Welle keine kritische Frequenz gibt. Im Fall des coaxialen Hohlleiters (d. i. wenn die zwei Flächen, die den Leiter begrenzen, coaxiale Zylinder sind), unter der Annahme, daß  $\epsilon$  symmetrisch in bezug auf die Achse der Zylinder ist, wird die elektromagnetische Feldstärke berechnet.

D. Graffi.

Lo, Y. T.: A note on the cylindrical antenna of noncircular cross section. J. appl. Phys. **24**, 1338—1339 (1953).

Rumsey, V. H.: Traveling wave slot antennas. J. appl. Phys. **24**, 1358—1360 (1953).

Eine Wanderwellen-Schlitzantenne besteht aus einem Hohlleiter, der durch einen parallel zur Rohrachse in der Wandung verlaufenden Schlitz abstrahlt. Durch ein Variationsverfahren werden Näherungsformeln für die komplexe Fortpflanzungskonstante und das charakteristische Wellenbild einer mit einem Dielektrikum gefüllten Schlitzantenne hergeleitet. Um die Variationsmethode anwenden zu können, muß jedoch zuvor noch ein verallgemeinertes Reziprozitätstheorem für sich bewegende Linienquellen aufgestellt werden. Dieses unterscheidet sich beträchtlich von dem Reziprozitätstheorem für punktförmige Quellen. Für die Lösung der Variationsgleichungen wird die Methode der Störungsrechnung angewendet. Die Formeln werden für den rechteckigen Hohlleiter ausgearbeitet. Die rechnerischen Ergebnisse stehen in guter Übereinstimmung mit den Versuchen.

H. Buchholz.

Florian, H.: Zur Abstrahlung vom offenen Ende einer Lecherleitung und ein Hohlrohres in großer Entfernung von der Öffnung. Acta phys. Austr. **8**, 42—44 (1953).

Die Arbeit bringt eine Erweiterung von Ergebnissen, die der Ref. und S. Schellkunoff (dies. Zbl. **13**, 240) für die vom offenen Ende einer Lecher-Leitung abgestrahlte Welle erhalten haben. Anstatt wie dort die Lösungen als Reihenentwicklungen anzugeben, werden die zunächst auftretenden Integrale vom Verf. in endlicher Form gelöst. Das Feld wird nur in großen Entfernungen von der Öffnung bestimmt. Die Ergebnisse sind für die praktische Auswertung sehr geeignet, wenn nur Kreis- und Besselfunktionen darin auftreten.

H. Buchholz.

Keller, Joseph B. and Mortimer Weitz: Reflection and transmission coefficients for waves entering or leaving an icefield. Commun. pure appl. Math. **6**, 415—442 (1953).



Reflexion und Transmission von Wellen an der Grenze von Wasser und Eisfläche werden nach der Kellerschen Theorie berechnet für die Extremfälle großer und kleiner Wassertiefe im Vergleich zur Wellenlänge; im letzteren Fall wird exakte Übereinstimmung mit dem Ergebnis nach der Seichtwassertheorie erzielt.

*J. Pretsch.*

**Hönl, H. und Eva Zimmer:** Intensität und Polarisation bei der Beugung elektromagnetischer Wellen am Spalt. II. Z. Phys. 135, 196—218 (1953).

Die Beugung elektromagnetischer Wellen am Spalt wird mittels eines Verfahrens von Hönl (dies. Zbl. 46, 431) für magnetischen Vektor parallel zum Spalt behandelt; der entgegengesetzte Polarisationsfall ist in dem früheren Teil I der Arbeit enthalten (Groschwitz und Hönl, dies. Zbl. 46, 431). Die Verbindung beider Fälle erlaubt die Behandlung beliebiger Polarisation. Bei engen Spalten ergibt sich ein erhebliches Überwiegen der senkrecht zu den Spalträndern schwingenden elektrischen Komponente. Die Entwicklungen bis zur zweiten Potenz von  $(k b)^2$  — darin  $k$  die Wellenzahl,  $b$  die Spaltbreite — stimmen mit den Ergebnissen von Müller und Westpfahl (dies. Zbl. 50, 209) überein.

*W. Franz.*

**Bekefi, G.:** Diffraction of electromagnetic waves by an aperture in a large screen. J. appl. Phys. 24, 1123—1130 (1953).

Um eine Näherungslösung für die Beugung elektromagnetischer Wellen an einer Öffnung, die groß gegen die Wellenlänge ist, zu erhalten, wird für den Fall einer senkrecht auf den Schirm einfallenden Welle das gesamte Feld dargestellt durch einen Hertzschen Vektor, der parallel zur primären elektrischen Feldstärke gerichtet ist. Dies ist bestimmt in Strenge nicht zulässig, doch wird aus dem Vergleich mit dem Experiment geschlossen, daß dieses Verfahren eine brauchbare Näherungslösung liefert. Zur Aufstellung der Lösung wird die für den Hertzschen Vektor gültige Integralgleichung in der Öffnungsfläche benützt. Die Lösung versagt in der Umgebung des Schirmandes, da dort die Meixner-Bouwkampfsche Kantenbedingung nicht erfüllt ist, indem die Energiedichte dort unendlich wird. Die angegebene Theorie wird für die kreisförmige Öffnung durchgeführt und mit experimentellen Ergebnissen verglichen, wobei ziemlich gute Übereinstimmung erzielt wird. — Versucht man eine zweite Näherungslösung ähnlicher Art dadurch zu erhalten, daß man an Stelle des Hertzschen Vektors dessen magnetisches Analogon (also den Fitzgeraldischen Vektor) einführt und für diesen nur eine Komponente parallel zum primären Magnetfeld annimmt, so gelangt man zu einem Ergebnis, welches in völligem Widerspruch zum Experiment steht.

*Walter Franz.*

**Meixner, J.:** Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen an der vollkommen leitenden Kreisscheibe und verwandte Probleme. Ann. der Physik, VI. F. 2, 227—236 (1953).

Im Anschluß an die frühere Untersuchung von Meixner und Andrejewski (dies. Zbl. 36, 420) über die Beugung einer ebenen Welle an der Kreisscheibe wird nunmehr auch die Beugung von Dipolwellen behandelt. Der Dipol kann sich dabei in beliebiger Lage an einem beliebigen Raumpunkt befinden. Die Lösung läßt sich mit Hilfe des Babinetschen Prinzips auf das inverse Problem einer Beugung an der kreisförmigen Öffnung in der unendlichen, vollkommen leitenden Ebene übertragen. — Die Beugung am vollkommen leitenden Rotationsellipsoid wird für den Spezialfall einer völlig solenoidalen Anordnung ebenfalls streng behandelt. — Das mathematische Hilfsmittel zur Behandlung dieser Probleme sind die Sphäroidfunktionen, deren Theorie und Tabulierung heute so weit fortgeschritten ist, daß eine numerische Auswertung der Formeln möglich wird, doch muß man sich wegen der großen Zahlen in den Funktionen auftretenden Parameter bei der numerischen Auswertung auf spezielle Fälle beschränken.

*Walter Franz.*

**French, J. B. and Y. Shimamoto:** Theory of multipole radiation. Phys. Review, II. Ser. 91, 898—899 (1953).

Der Zusammenhang zwischen den exakten Multipolmomenten und der Näherung für große Wellenlängen wird untersucht. Dabei interessiert vor allem die Frage, wieviele in der Näherung nur die Ladungsdichte und damit im wesentlichen die radiale Komponente des Ladungsstromes auftritt, während doch die transversale elektromagnetische Strahlung vor allem durch die transversalen Komponenten des

Stromes bestimmt sein sollte. Die Aufklärung liegt darin, daß einerseits zwischen den longitudinalen und transversalen Komponenten des Stromes ein Zusammenhang besteht, da sich die gesamte Stromverteilung innerhalb eines endlichen Raumbereichs im Gebiet der Quelle befindet, und daß zweitens für große Wellenlängen das Nahfeld angenähert longitudinal ist, jedoch das vom Nahfeld bestimmte Fernfeld transversal.

Walter Franz.

Rhodes jr., J. Elmer: Analysis and synthesis of optical images. Amer. Phys. 21, 337—343 (1953).

Die Behandlung der optischen Abbildung mit Hilfe einer doppelten Fouriertransformation wird im einzelnen dargestellt. Einige einfache Anwendungen schließen die Arbeit.

F. Penzlin.

Krieger, Rudolf: Über die Lichtverteilung im Bild eines Linienstückchens bei Aberrationsfunktionen 2. Grades in den Pupillenvariablen. Z. angew. Math. Mech. 33, 272—273 (1953).

Bodmann, Hans-Walter: Bewertung vorgegebener Beleuchtungen im Vergleich mit einer Normalbeleuchtung durch eine neue Abstandsdefinition. Ann. d. Physik, VI. F. 12, 348—360 (1953).

Die Kennzeichnung einer Beleuchtung durch Farbtemperatur oder Farbkoordinaten im Farbrechteck gibt keine befriedigende Aussage über die Abweichung von einer Normalbeleuchtung. Vielmehr läßt sich eine Beleuchtung durch ihre spektrale Verteilungsfunktion charakterisieren. Die Abweichung von einer Normalbeleuchtung ist dann gekennzeichnet durch den „Abstand“ von Funktionen, und zwar gibt Ver in Anlehnung an H. Wolters („Farboperatorenlehre“, Vortrag vor dem Deutsch. Fachnormenausschuß Farbe in Göttingen am 26. 9. 1951) folgende Abstandsdefinition:

$$d^2 = 1 - \int_0^\infty \left[ \int_0^\lambda \Phi(\lambda') V(\lambda') I_1(\lambda') d\lambda' \cdot \int_0^\lambda \Phi(\lambda'') V(\lambda'') I_2(\lambda'') d\lambda'' \right] d\lambda \\ \cdot \left\{ \int_0^\infty \left( \int_0^\lambda \Phi(\lambda') V(\lambda') I_1(\lambda') d\lambda' \right)^2 d\lambda \cdot \int_0^\infty \left( \int_0^\lambda \Phi(\lambda'') V(\lambda'') I_2(\lambda'') d\lambda'' \right)^2 d\lambda \right\}^{-1/2}$$

Darin sind  $I_1(\lambda)$  und  $I_2(\lambda)$  die relativen Beleuchtungsfunktionen,  $V(\lambda)$  die spektrale Hellempfindlichkeit des Auges und  $\Phi(\lambda)$  etwa eine Gaußsche Fehlerfunktion, so daß die bei praktischen Messungen der Beleuchtungsfunktionen auftretende Verfälschung des reinen Spektrums durch die endliche Spaltweite des Spektrographen berücksichtigt. Die Ergebnisse der durchgeführten Messungen stehen in Übereinstimmung mit der qualitativen Beurteilung der untersuchten Lichtquellen für die Verwendung als Tageslichtersatz.

H. Pachale.

● Harman, Willis W.: Fundamentals of electronic motion. London: McGraw-Hill Publishing Co., Ltd., 1953. X, 319 p. 46 s 6 d.

Eine intelligent und sehr lesbar geschriebene Einführung in die Elektronik, deren Hauptzweck es sein soll, den Ingenieur mit den Methoden der mathematischen Behandlung spezifischer technischer Probleme vertraut zu machen. Durch eine sorgfältige Stoffauswahl, die einen großen Überblick beim Autor voraussetzt, sind gerade jene Tatsachen ausgewählt, die eine elementare analytische Behandlung erlauben und dabei doch einen allgemeinen Einblick in die Verhältnisse gestatten. Besonderer Wert ist stets auf die klare Problemstellung und die Motivierung des Lösungsansatzes gelegt. Die mathematischen Voraussetzungen sind gering. Trotz dieser Voraussetzung wird ein ziemlich reichhaltiger Stoff behandelt. Hierbei werden stets die Prinzipien und weniger die Einzelheiten gebracht. — Feldberechnung und Elektronenbewegung in einfachen elektrischen und magnetischen Feldern, Elektronenquellen, elementare elektronenoptische Fragen, Raumladungsverhältnisse in Vakuumröhren, Bewegung in zeitlich veränderlichen Feldern, Raumladungswellen und Geschwindigkeitsmodulation, Wanderwellenverstärkung, Wanderwellen-Magnetron-Verstärker und einige Grundtatsachen aus der relativistischen Elektrodynamik werden besprochen. Das klare, mit einer gewissen Begeisterung geschriebene Buch ist eine ausgezeichnete erste Einführung des Studenten in die Elektronik.

W. Glaser.

Jacob, L. and J. R. Shah: Trajectories in the symmetrical electron lens. J. appl. Phys. 24, 1261—1266 (1953).



In einer elektrostatischen Dreielektrodenlinse wurde das Feld nach der Relaxationsmethode bestimmt, und darin wurden vier in verschiedener Einfallshöhe parallel einfallende Elektronenbahnen numerisch ermittelt. Daraus wurden die Variation der Haupt- und Brennpunktslage mit der Einfallshöhe und der Öffnungsfehler bestimmt. Das Resultat zeigt, daß die Formel für den Öffnungsfehler schwacher Linsen für diesen Fall nicht ausreicht.

*W. Glaser.*

**Laudet, Michel:** *Intégrations numériques de l'équation des trajectoires électroniques.* J. Phys. Radium **14**, 604—610 (1953).

Bekannte Methode der Integration der linearen Differentialgleichung der achsensnahen Elektronenbahnen durch Teilstücke, die durch sukzessive Approximation ermittelt werden. Vergleich der Genauigkeiten mit dem streng integrierbaren Glockenfeld.

*W. Glaser.*

**Campbell, C. G. and J. Kyles:** *The variable-radius semicircular magnetic focusing  $\beta$ -ray spectrometer.* Proc. phys. Soc., Sect. B **66**, 911—920 (1953).

**Lundquist, Stig:** *Stability of orbits in a strong-focusing synchrotron.* Phys. Review, II. Ser. **91**, 981—983 (1953).

Im Synchrotron mit starker Stabilisierung nach dem Vorschlag von Courant, Livingston und Snyder [Phys. Review, II. Ser. **88**, 1190—1196 (1952)] können stabile Betriebsbedingungen in instabile verwandelt werden durch nicht streng periodischen Verlauf des Feldgradienten entlang des Umfangs. Einige spezielle Beispiele werden angegeben.

*G. Lüders.*

**Banerji, R. B.:** *Some studies on random fading characteristics.* Proc. phys. Soc., Sect. B **66**, 105—114 (1953).

Die von Fürth und MacDonald (dies. Zbl. **38**, 394) gegebene Theorie der Feldstärkeschwankungen ergibt jedenfalls eine Gaußsche Verteilung, wenn das ausgesandte Spektrum nur schmal ist. Bei der Integration über die Wahrscheinlichkeitszellen war dabei das betrachtete Zeitintervall als klein gegen die reziproke Bandbreite der Sendung angenommen worden. Verf. läßt diese Voraussetzung fallen, integriert numerisch und erhält eine Verbreiterung der Flanken der Verteilung, die mit Meßergebnissen von Mitra übereinstimmt. Der Einfluß eines zusätzlichen, unveränderlichen Zeichens auf die Fadingerscheinungen wird untersucht; es ergibt sich nur eine ganz geringe Verbreiterung der Verteilung. Schließlich wird im Fall bewegter Störquellen der Einfluß der Dopplerverschiebung  $\theta$  betrachtet. Es wird zunächst bei konstantem  $\theta$  integriert, dann erst über  $\theta$ . Es ergibt sich so ein effektives Spektrum in Form einer Halbellipse.

*K. Rawer.*

## Relativitätstheorie:

● **Einstein, Albert:** *L'éther et la théorie de la relativité. La géométrie et l'expérience.* Traduit de l'allemand par Maurice Solovine. Troisième éd. rev. Paris: Gauthier-Villars 1953. 29 p. 300 F.

**Tyabji, S. F. B.:** *Equations of motion for continuous matter of special relativity in the Lagrange variables.* Nature **172**, 1147—1148 (1953).

**Ueno, Yoshio:** *On the equivalency for observers in the special theory of relativity.* Progr. theor. Phys. **9**, 74—84 (1953).

Encore une étude axiomatique sur les postulats impliqués dans le groupe de Lorentz, celui de Galilée, et d'autres qu'on pourrait envisager (dans l'abstrait) de leur substituer. — L'A., à notre sens, méconnaît le point suivant: la vitesse de la lumière est isotrope par expérience, mais est une constante absolue par définition; et c'est l'expérience qui rend la définition possible; elle autorise à prendre une raie monochromatique donnée comme étalon des longueurs par sa longueur d'onde et comme étalon du temps par sa période. Le schème de l'argu-

mentation serait légèrement plus compliqué si, au lieu des photons à masse propre nulle de la lumière, on considérerait une propagation de particules quelconques.

*O. Costa de Beauregard.*

**Sailer, Herbert:** Die zehn allgemeinen Integrale der Bewegungsgleichungen in der Mechanik der speziellen Relativitätstheorie. *Acta phys. Austr.* 7, 155–163 (1953).

Verf. weist die bekannte Tatsache, daß in jeder lorentz-invarianten Theorie, ebenso wie in der klassischen Mechanik, aus den zehn Invarianzforderungen zehn Erhaltungssätze (Integrale der Bewegungsgleichungen) folgen, für die Relativitätsmechanik gekoppelter Massenpunkte explizit nach. Im einzelnen sind folgende Integrale und Invarianz gegenüber folgenden Operationen miteinander verbunden: Energiesatz-Zeitverschiebung; Impulssatz-Raumverschiebung; Drehimpulssatz-Drehung des dreidimensionalen Raumes; Schwerpunktsatz-Lorentztransformation. Für die Bewegungsgleichungen des Systems  $n$  gekoppelter Massenpunkte setzt Verf. an

$$(1) \quad m_k d^2 R_k / dt^2 = - \text{Grad}_k \Phi(R_1, \dots, R_n) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

( $R_k$ : Vierervektor der Weltkoordinaten des  $k$ -ten Massenpunktes;  $\Phi(R_1, \dots, R_n)$ : Skalares Potential, das in einem ausgezeichneten Bezugssystem (Ruhsystem des Schwerpunktes) nicht von der Zeit abhängen darf). Sodann werden für die oben angegebenen Untergruppen infinitesimale Transformationen angesetzt und unter Verwendung der Bewegungsgleichungen (1) die Integrale dieser Gleichungen gewonnen. Die relativistischen Bewegungsgleichungen in der Form (1) anzusetzen, erscheint dem Ref. bedenklich, da die Kräfte als Fernwirkungen behandelt werden. Ihre Gültigkeit ist, streng genommen, auf einen Anfangszustand beschränkt, in dem die Relativgeschwindigkeiten der Massenpunkte gegeneinander verschwinden. Sicher ist dies in vielen Fällen eine hinreichende Näherung, aber bei Ableitungen von prinzipieller Bedeutung sollte man nicht von Näherungen ausgehen.

*F. Beck.*

**Balazs, N. L.:** The energy-momentum tensor of the electromagnetic field inside matter. *Phys. Review, II. Ser.* 91, 408–411 (1953).

Zwischen den zwei konkurrierenden Ansätzen für den Energie-Impuls-Tensor eines elektromagnetischen Feldes in Materie, dem symmetrischen Abrahamschen und dem unsymmetrischen Minkowskischen, hat M. v. Laue 1950 (dies. Zbl. 38, 403) auf Grund des Auswahlprinzips, daß die Strahlungsgeschwindigkeit der Energie als Unterlichtgeschwindigkeit dem Einsteinschen Additionstheorem genügen muß, die Entscheidung zugunsten des Minkowskischen Tensors gefällt. Verf. prüft nun beide Ansätze im Hinblick auf Erfüllung der Erhaltungssätze für Impuls und Schwerpunkt. Dazu benutzt er als Gedankenexperiment den „Einsteinischen Strahlungskasten“: einen abgeschlossenen, keinen äußeren Kräften unterliegenden Hohlraum, der teilweise mit einem nichtabsorbierenden Dielektrikum ausgefüllt ist. Ein begrenztes Lichtwellenpaket kann sich darin zwischen den Stirnseiten hin- und herbewegen, einmal im Vakuum, das andere Mal durch das Dielektrikum hindurch. In beiden Fällen müssen die Erhaltungssätze zu jedem Zeitpunkt erfüllt sein. Die Rechnung ergibt, daß nur der symmetrische, Abrahamsche Tensor mit den Erhaltungssätzen verträglich ist. Die Betrachtung ist insofern überholt, als eine etwa zu gleichen Zeit erschienene Untersuchung (F. Beck, dies. Zbl. 50, 213) gezeigt hat, daß die Hinzunahme des Energie-Impuls-Tensors der Materie zum Minkowski-Tensor in der Summe zu einem symmetrischen Welttensor führt, der beiden Bedingungen, Additionstheorem und Erfüllung der Erhaltungssätze, genügt.

*F. Beck.*

**Frankl, F. I.:** Einige prinzipielle Bemerkungen zur allgemeinen Relativitätstheorie. *Uspechi mat. Nauk* 8, Nr. 3 (55), 160–164 (1953) [Russisch].

**Kaempffer, F. A.:** The physical meaning of auxiliary conditions in the theory of gravitational waves. *Canadian J. Phys.* 31, 501–503 (1953).

**Sciama, D. W.:** On the origin of inertia. *Monthly Not. Roy. astron. Soc.* 113, 34–42 (1953).

Es wird versucht, die Trägheit eines Körpers als Folge seines Bewegungszustandes relativ zu den übrigen Massen zu erklären. Die Wechselwirkung zwischen den Massen des Universum und dem Probekörper soll bestimmt werden durch raumzeitliche Potentiale, die im (ungekrümmten) Minkowskischen Raum der Potentialgleichung genügen, mithin Wellenfunktionen sind. Damit läßt sich eine formale Analogie zum Viererpotential der Elektrodynamik herleiten: die Ladungsdichte der Elektrodynamik entspricht die Materiedichte des Weltmodells, dem elektrischen Potential das Gravitationspotential und dem elektrischen Feld die Trägheitskraft. Zusätzlich wird noch gefordert, daß im Ruhsystem eines Körpers die Gravitationswirkungen der übrigen Massen im Weltall auf diesen Körper verschwinden. Die Konsequenzen dieser Theorie werden an drei Beispielen erläutert: 1. Als Weltmodell liege ein euklidischer Raum zugrunde, der mit Masse homogener Dichte erfüllt ist, die nach dem Hubbleschen Gesetz expandiert. Relativistische Schwierigkeiten dieses Modells (Überschreitung der Lichtgeschwindigkeit) werden vorläufig noch außer acht gelassen. In dieser Welt befindet sich ein Probekörper nu



dann in einem Inertialsystem (d. h. der nach obiger Analogie dem elektrischen Feld entsprechende Vektor verschwindet nur dann), wenn er an der Bewegung des expandierenden Substrates teilnimmt bzw. sich gleichförmig zum Substrat bewegt. 2. Ein mit dem Weltsubstrat des vorigen Beispiels mitgeführter Körper der Masse  $M$  wirkt auf einen Probekörper nach dem Newtonschen Gesetz, wobei auch das Vorzeichen, das zwischen Anziehung und Abstoßung entscheidet, automatisch richtig festgelegt wird. Für die Gravitationskonstante  $G$ , die Substratdichte  $\varrho$  und das aus dem Hubbleschen Gesetz folgende Weltalter  $\tau$  ergibt sich die Relation  $G \varrho \tau^2 \sim 1$ , die in vielen anderen kosmologischen Theorien auftritt. 3. Läßt man die Massen des Universums um einen Probekörper gleichförmig rotieren, so wirken auf ihn Zentrifugalkraft und Corioliskraft. Diese Trägheitskräfte sind also nicht wie in der Newtonschen Theorie von der Bewegung des Probekörpers relativ zu einem absoluten Koordinatensystem festgelegt, sondern von der Relativbewegung zwischen Körper und den übrigen Massen des Universums abhängig. *R. Kippenhahn.*

**Hönl, Helmut:** Über das Mach'sche Prinzip. *Z. Naturforsch.* 8a, 2—6 (1953).

Aus dem Eimerversuch schloß Newton, daß der „absolute Raum“ physikalische Wirkungen auf die Materie ausübe. Mach kritisierte die Einführung eines solchen „metaphysischen“ Begriffes und verlangte eine Beschreibung der Phänomene, in der nur „prinzipiell beobachtbare“ Größen vorkommen, in diesem Falle also nur materielle Körper und ihre relativen Bewegungen zueinander. Im Jahre 1918 zeigte Thirring nun, daß im Inneren einer gegen das Unendliche gleichmäßig rotierenden Hohlkugel vom Radius  $a$  und der Masse  $m$  massenproportionale „Gravitationskräfte“ auftreten, die sich von den entsprechenden „Rotationsträgheitskräften“ nur um einen Faktor  $\alpha \cong \kappa m/a$  unterscheiden ( $\kappa < 1$ ). Indem Verf. diese Relation auf den gesamten Kosmos extrapoliert und  $\alpha = 1$  setzt, gelangt er zu der Größenordnungsbeziehung  $\kappa M \cong R$ , die in der Tat für viele kosmologische Modelle erfüllt ist und die nun als relativitätstheoretische Fassung des Machschen Prinzips aufgefaßt wird. Dieses ist danach ein Auswahlprinzip, das unter den der Einsteinschen Feldgleichung genügenden Modellen nur solche zuläßt, die der von Mach aufgestellten Forderung genügen. Insbesondere werden unendliche Räume und solche mit  $M = 0$  ausgeschlossen. Dazu möchte Ref. bemerken, daß er das Newtonsche Argument im Rahmen einer Nahewirkungsauffassung, wie sie auch der allgemeinen Relativitätstheorie (AR) zugrunde liegt, für schlüssig hält. Die AR nimmt, wie Newton, zwei Realitäten an: die Materie und (an Stelle des absoluten Raumes und der absoluten Zeit) das „Führungsfeld“ der  $g_{ik}$ . Ref. hält die Machsche Forderung für nicht berechtigt und im Rahmen der AR für sinnlos; der (vermutlich durch die damals herrschende Fernwirkungsauffassung nahegelegte) ursprüngliche Machsche Gedanke läßt sich nun, da ihm die Voraussetzungen entzogen sind, anscheinend gar nicht mehr präzise formulieren. Insbesondere scheint es dem Ref. grundsätzlich unmöglich zu sein, die Thirringsche Überlegung auf den Gesamtkosmos zu übertragen; er sieht nicht, was eine zur „kinematischen“ hinzukommende „dynamische Relativität“ der Fliehkraft in der AR genau bedeuten soll. Die Berechtigung „regulativer Prinzipien“ von der vom Verf. vorgeschlagenen Art (zur Einschränkung der kosmologischen Lösungsmannigfaltigkeit) ist damit nicht berührt. *G. Süßmann.*

**Scherrer, W.:** Metrisches Feld und vektorielles Materiefeld. II. *Commentarii math. Helvet.* 27, 157—164 (1953).

(Teil I, dies. Zbl. 48, 445.) Verf. untersucht das zu einer recht allgemeinen invarianten Wirkungsfunktion gehörige vektorielle Feld. Er zeigt, daß bereits vier der möglichen Invarianten die allgemeinsten Wellengleichungen liefern. Diese werden studiert, und ihre mögliche physikalische Bedeutung wird diskutiert. In gewissem Gegensatz zur mehr phänomenologischen Einsteinschen Feldtheorie ist hier das Feld selber letzte materielle Gegebenheit; daher ist die körnige Materie hier eine nicht miterfaßte Begleiterscheinung. Es gibt expandierende kosmologische Lösungen, die nirgends singular werden. *H. Kümmel.*

**Buchdahl, H. A.:** On a set of conform-invariant equations of the gravitational field. *Proc. Edinburgh math. Soc., Ser. II* 10, 16—20 (1953).

Se  $G_{\mu\nu}$  sono le componenti in una  $V_4$  del tensore di Ricci e  $K_1, K_2$  sono gli invarianti  $K_1 = G^2 = G^\mu_\mu G^\nu_\nu$ ,  $K_2 = G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}$ , l'annullarsi delle derivate hamiltoniane dell'invariante  $K = 3K_2 - K_1$  conduce ad un sistema di equazioni a derivate parziali  $P^{\mu\nu} = 0$  che, secondo Eddington, rappresentano un campo gravitazionale nello spazio vuoto. L'A. dimostra che le equazioni ammettono come soluzione ogni elemento lineare che rappresenta uno spazio conforme ad uno spazio einsteiniano e trova la soluzione generale nel caso di un campo statico a simmetria sferica.

*G. Lampariello.*

**Scheidegger, A. E.:** Gravitational motion. Reviews modern Phys. **25**, 451—468 (1953).

Zusammenfassender Bericht über die Ergebnisse der Diskussion des Bewegungsproblems in der allgemeinen Relativitätstheorie. Inhalt: Die Bewegungsgleichungen. Das Zweikörperproblem. Integration der Bewegungsgleichungen. Die Koordinatenbedingung. Koordinatentransformationen. Einfluß der Gravitationsstrahlung.

*A. Papapetrou.*

**Dingle, H.:** Address, delivered by the President on Science and Modern Cosmology. Monthly Not. Roy. astron. Soc. **113**, 393—407 (1953).

**Brahmachary, R. L.:** Sur la possibilité d'un nouveau modèle statique de cosmologie. I, II. Naturwiss. **40**, 51, 313—314, 324 (1953).

(I) Ersetzt man die Atome des Universums — wie in der Kosmologie üblich — durch eine homogene Flüssigkeit, so muß derselben auch ein elektrischer Ladungszustand zugeschrieben werden. Entsprechend zerfällt der zugehörige Tensor der Materie  $T_{\mu}^{\nu}$  in einen mechanischen und einen elektromagnetischen Teil. Die Berücksichtigung elektromagnetischer Eigenschaften kommt für die Untersuchung darauf hinaus, die Komponenten  $T_1^1$  und  $T_2^2$  verschieden anzunehmen. Für die dieser Materieverteilung entsprechende raumzeitliche Metrik gewinnt Verf. durch Verallgemeinerung einschlägiger von Nordström und Jeffery gegebener Beziehungen das Bogenelement  $ds^2 = -e^{(\mu-E\nu)} dr^2 + \dots + e^{E\nu} dt^2$ . — (II) Das statische Weltmodell mit der in der vorhergehenden Note gefundenen raumzeitlichen Metrik wird jetzt zunächst im Falle euklidischer Metrik und gleichförmiger elektrischer Ladungsverteilung untersucht. Ein zweiter, weiterer rechnerischer Behandlung zugänglicher Fall tritt ein, wenn die Verteilung der elektrischen Ladungen in der Materie sehr dünn gesät (très clairsemée) angenommen wird. Insbesondere vereinfacht sich das Differentialgleichungssystem der geodätischen Linien.

*M. Pinl.*

**McCrea, W. H.:** Cosmology. Phys. Soc., Rep. Progr. Phys. **16**, 321—363 (1953).

Abstract: The choice of treatment in this review is influenced by the nature of a number of other existing reviews of cosmology. Observational results are here summarized only briefly because, for the most part, the results obtained after the appearance of these other reviews have not yet been published. Cosmological theories fall into two main categories according as they start from postulates concerning the universe as a whole and seek to deduce physical laws, or start from postulated laws and construct model universes compatible with such laws. Of the cosmologies here reviewed, those of kinematic relativity and of the steady-state theory belong to the first category, while those of newtonian theory and of general relativity theory and its extensions belong to the second. To a considerable extent it proves possible to imitate the procedures of all these theories for the case of material moving in classical space-time. In this way a largely unified presentation is obtained and comparison of the theories is facilitated. At the same time the standard procedures of the theories are also indicated in the review. In comparing the theoretical models with the actual universe emphasis is laid upon the broad aspects about which there is a considerable measure of agreement. The possibilities that have been investigated of relating the theories to the problem of the origin of the chemical elements and to the problem of the origin and evolution of the galaxies are mentioned. The whole subject is in a somewhat inconclusive state, and the main purpose of the review is to describe the lines of thought being pursued in current work.

**Kürşunoglu, Behram:** Expectations from a unified theory. Phys. Review. II. Ser. **92**, 506—507 (1953).

• **Cassirer, Ernst:** Substance and function and Einstein's theory of relativity. (Translated by W. C. Swabey and M. C. Swabey.) New York: Dover Publications, Inc. 1953. XII, 465 S. \$ 1,95, cloth \$ 3,95.

**Ingarden, R. S.:** Die Bewegungsgleichungen und die Feldgleichungen in der fünfdimensionalen einheitlichen Relativitätstheorie. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **88**, 773—776 (1953) [Russisch].

Verf. schlägt vor, im 5-dimensionalen Raum ausgezeichnete Koordinatensysteme durch eine Koordinatenbedingung der Form  $\xi g^{\mu\nu} \xi_{,\nu} = 0$  zu definieren. Es folgen Betrachtungen über die Ableitung der Bewegungsgleichungen aus der



dynamischen Gleichung  $T_{\mu\nu}^r = 0$  unter der Annahme, daß  $T^{\mu\nu}$  die einer idealen Flüssigkeit entsprechende Form  $T^{\mu\nu} = (p + \varepsilon) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}$  hat ( $u^\mu$  5-dimensionale Geschwindigkeit). Da dieser Tensor 6 unabhängige Größen enthält ( $p, \varepsilon$  und 4 von den 5 Größen  $u^\mu$ ), muß eine einschränkende Bedingung eingeführt werden. Als solche wählt der Verf.  $T_\mu^\mu = 0$ , d. h. das Verschwinden der Ruhemasse (in 5-dimensionalem Sinne); die Teilchen sollten sich dann auf Nullgeodätischen des 5-dimensionalen Raumes bewegen.

A. Papapetrou.

Hlavatý, Václav: Connections between Einstein's two unified theories of relativity. Proc. nat. Acad. Sci. USA 39, 507—510 (1953).

Zuerst begründete Einstein die vereinheitlichte Relativitätstheorie auf einem komplexen Tensor  $*g_{\lambda\mu} = h_{\lambda\mu} + i k_{\lambda\mu}$  mit Hermitescher Symmetrie  $*g_{\lambda\mu} = \overline{*g_{\mu\lambda}}$  und auf dem durch die Feldgleichungen  $\partial_\omega *g_{\lambda\mu} = *I_{\lambda\omega}^\alpha *g_{\alpha\mu} + *I_{\omega\mu}^\alpha *g_{\lambda\alpha}$  definierten komplexen Zusammenhang  $*I_{\lambda\mu}^\alpha$ , der ebenfalls die Hermitesche Symmetrie  $*\bar{I}_{\mu\lambda}^\alpha = *I_{\lambda\mu}^\alpha$  besitzt. Später legte Einstein seiner Theorie den reellen, aus einem symmetrischen und schiefsymmetrischen Teil bestehenden Tensor  $g_{\lambda\mu} = h_{\lambda\mu} + k_{\lambda\mu}$  zugrunde, durch den mittels der Feldgleichungen  $\partial_\omega g_{\lambda\mu} = I_{\lambda\omega}^\alpha g_{\alpha\mu} + I_{\omega\mu}^\alpha g_{\lambda\alpha}$  ein reeller Zusammenhang  $I_{\lambda\mu}^\alpha$  bestimmt wird. Verf. leitet nun die nicht sehr einfache Gleichung zwischen diesen beiden Zusammenhängen  $*I_{\lambda\mu}^\alpha$  und  $I_{\lambda\mu}^\alpha$  her.

W. Barthel.

Hlavatý, V. and A. W. Sáenz: Uniqueness theorems in the unified theory of relativity. J. rat. Mech. Analysis 2, 523—536 (1953).

Es sei  $g_{\lambda\mu}$  ein weder symmetrischer noch schiefsymmetrischer reeller Maßtensor. Bezeichnen  $g, h, k$  die Determinanten von  $g_{\lambda\mu}, g_{(\lambda\mu)}, g_{[\lambda\mu]}$ , so werde  $G \equiv g/h, K \equiv k/h$  gesetzt unter der allgemeinen Voraussetzung  $h \neq 0$ . In einer früheren Abhandlung (dies. Zbl. 50, 218) untersuchte Hlavatý den durch (\*)  $\partial_\omega g_{\lambda\mu} = I_{\lambda\omega}^\alpha g_{\alpha\mu} + I_{\omega\mu}^\alpha g_{\lambda\alpha}$  definierten Zusammenhang  $I_{\lambda\mu}^\alpha$ . Dabei ergab sich als Kriterium für die eindeutige Lösbarkeit der Gleichungen (\*) das Nicht-

verschwinden einer Determinante vom Rang  $n \binom{n}{2}$ . Vorliegende Arbeit ersetzt nun für den Spezialfall, daß das System (\*) die Feldgleichungen der vereinheitlichten Relativitätstheorie darstellt, diese Eindeutigkeitsbedingung durch eine äquivalente, welche nur die Größen  $G$  und  $K$  enthält. Unter der Voraussetzung, daß  $g_{(\lambda\mu)}$  die Signatur  $- - - +$  besitzt, ergeben sich entsprechend der Größe  $D \equiv (\frac{1}{2} h k^{\lambda\mu} k_{\lambda\mu})^2 - 4 h k$  zwei Fälle: (1) Für  $D \neq 0$  hat (\*) genau dann eine eindeutige Lösung, wenn entweder  $GK \neq 0$  ist oder  $GK = 0$ , 2 bei  $K = 0$ . (2) Für  $D = 0$  besitzt (\*) genau eine Lösung. — Die Vereinfachung des Gleichungssystems (\*) erfolgt durch Einführung nicht-holonomer Koordinaten, wobei frühere Untersuchungen über Normalformen des Maßtensors  $g_{\lambda\mu}$  (Hlavatý, dies. Zbl. 47, 210) von Wichtigkeit sind.

W. Barthel.

Hlavatý, Václav: The spinor connection in the unified Einstein theory of relativity. Proc. nat. Acad. Sci. USA 39, 501—506 (1953).

Einstein begründet seine vereinheitlichte Relativitätstheorie auf einem reellen, in einer  $X_4$  definierten Tensor  $g_{\lambda\mu}$ , der weder symmetrisch noch schiefsymmetrisch ist. Unter einigen Voraussetzungen (insbesondere soll  $g_{(\lambda\mu)}$  die Signatur  $- - - +$  besitzen) bestimmt  $g_{\lambda\mu}$  in jedem Punkt  $P$  der  $X_4$  bis auf gewisse Transformationen eindeutig vier linear unabhängige Vektoren  $E_\lambda^I, E_\lambda^{II}$  (konjugiert komplex) und  $E_\lambda^{III}, E_\lambda^{IV}$  (reell). Mit Hilfe der Größe  $E_{\lambda 3}^1 = -E_{\lambda 2}^4 = E_\lambda^I, E_{\lambda 1}^3 = -E_{\lambda 4}^2 = E_\lambda^{II}, E_{\lambda 1}^1 = E_{\lambda 2}^3 = E_\lambda^{III}, E_{\lambda 3}^2 = E_{\lambda 1}^4 = E_\lambda^{IV}, E_{\lambda b}^a = 0$  sonst wird dann durch die Abbildung (\*)  $v_b^a(P) = E_{\lambda b}^a(P) v^\lambda(P)$  jeder Richtung  $v^\lambda(P)$  des Tangentialraumes  $T_4(P)$  ein Tensor  $v_b^a(P)$  eines 3-dimensionalen projektiven Raumes  $S_3(P)$  zugeordnet. Die Gesamtheit jener lokalen Spinor-Räume  $S_3(P)$  erzeugt einen der  $X_4$  zugeordneten, Spinor-Raum  $\Sigma_3$ , in welchem die möglichen Zusammenhänge betrachtet werden. Der durch  $\Gamma_{\alpha\lambda}^a = 0$  ausgezeichnete Zusammenhang hat die Gestalt  $\Gamma_{\lambda 1}^1 = -\Gamma_{\lambda 2}^2 = \bar{\Gamma}_{\lambda 3}^3 = -\bar{\Gamma}_{\lambda 4}^4 = a_\lambda, \Gamma_{2\lambda}^1 = \bar{\Gamma}_{\lambda 1}^3 = b_\lambda, \Gamma_{\lambda 1}^2 = \bar{\Gamma}_{\lambda 3}^4 = c_\lambda, \Gamma_{b\lambda}^a = 0$  sonst. Dabei lassen sich die Vektorfunktionen  $a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda$  und ihre konjugiert komplexen durch die Forderung, daß die Abbildung (\*) gegenüber der Übertragung in  $\Sigma_3$  bzw.  $X_4$  invariant sein soll, eindeutig aus den  $E_\lambda^A$ , also aus dem gegebenen Tensor  $g_{\lambda\mu}$  bestimmen. — Der Beweis dieser Ergebnisse wird für eine spätere Veröffentlichung angekündigt.

W. Barthel.

**Bonnor, W. B.:** Nonsymmetric unified field theories. Phys. Review, II. Ser. **92**, 1067—1068 (1953).

**Stephenson, G.:** Dirac's electrodynamics and Einstein's unified field theory. Nuovo Cimento, Ser. IX **10**, 1595—1596 (1953).

**Pastori, Maria:** Sul tensore fondamentale nell'ultima teoria di Einstein. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. **2**, 537—541 (1953).

**Todeschini, Bartolomeo:** Sul potenziale elettromagnetico nella teoria unitaria di Einstein. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **14**, 495—500 (1953).

Lo scopo della Nota è di chiarire l'origine dell'equazione del potenziale elettromagnetico in un campo neutro (privo di corrente) di uno spazio a torsione qual'è quello che sta a fondamento della recente teoria unitaria di Einstein (1950).

*G. Lampariello.*

**Vaidya, P. C.:** Spherically symmetric solutions in nonsymmetrical field theories. I. The skew symmetric tensor. Phys. Review, II. Ser. **90**, 695—698 (1953).

**Udeschini, Paolo:** Spostamento delle righe spettrali per effetto di un campo magnetico elementare nella nuova teoria relativistica unitaria di Einstein. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. **2**, 583—584 (1953).

### Quantentheorie:

**Falk, Gottfried:** Die Struktur des Größenbereiches von klassischer Mechanik und Quantenmechanik. Z. Phys. **135**, 431—472 (1953).

Verf. behandelt eine Verschärfung des Bohrschen Korrespondenzprinzips. Es werden die Axiome der klassischen Mechanik in gewisser Weise so abgeändert, daß die Quantentheorie folgt. Wesentlich ist dabei, daß die Bewegungsgleichungen und die Integrationstheorie algebraisch erfaßt werden. In der Mechanik wird der von den reellen Zahlen und den  $(x_i, p_i)$  erzeugte kommutative Potenzreihenring betrachtet. An die Elemente dieses Ringes werden gewisse Forderungen gestellt, die der Hamilton-Jacobischen Theorie entsprechen. In der Quantentheorie wird der freie Polynomring mit den nicht-kommutativen Erzeugenden  $(x_i, p_i)$  herangezogen; in dem durch geeignete homomorphe Abbildungen dieses Ringes erzeugten Restklassenring („Heisenberg-ring“) ist dann die Quantenmechanik beschreibbar [wenn man noch Einschränkungen macht, die letzten Endes davon herrühren, daß man die üblichen Vertauschungsrelationen für die  $(x_i, p_i)$  fordern muß]. Der Übergang zur Schrödingerschen Form der Quantenmechanik entspricht dem Rechnen in einem bestimmten Linksideal im Heisenberg-ring. Der Verf. erweitert seine Überlegungen auf nichtabgeschlossene Systeme. Ferner wird der Spin (nach einem abstrakten Modell) eingeführt und die Pauligleichung erhalten. Schließlich wird die Theorie relativistisch formuliert und dabei (im wesentlichen) die Dirac-Gleichung erhalten. Es werden gewisse Hinweise auf die Theorie der Elementarteilchen erhalten, wobei jedoch gerade bei diesen Folgerungen berücksichtigt werden muß, daß sie von einer verschärften Formulierung des Bohrschen Korrespondenzprinzips herrühren, deren allgemeine Richtigkeit in Frage steht.

*H. Kümmel.*

**Weizel, W.:** Ableitung der Quantentheorie aus einem klassischen, kausal determinierten Modell. Z. Phys. **134**, 264—285 (1953).

Verf. versucht eine determinierte Deutung der Quantentheorie zu finden, indem er ein klassisches determiniertes Modell zugrunde legt, dessen Diffusionsgleichung der Quantentheorie entspricht. Da jedoch die Wechselwirkung sehr merkwürdige Eigenschaften haben muß (sie darf keine Änderung von Energien und Impuls verursachen), muß er hypothetische (prinzipiell nicht beobachtbare) Teilchen (Zeronen) einführen. Um des Determinismus willen werden diese (und weitere) Schwierigkeiten in Kauf genommen. Ähnliche Untersuchungen s. Fejérváry (dies. Zbl. **48**, 442) und Bohm (dies. Zbl. **46**, 210).

*H. Kümmel.*

**Weizel, W.:** Ableitung der Quantentheorie aus einem klassischen Modell. II. Z. Phys. **135**, 270—273 (1953).

Verf. berücksichtigt in seiner Theorie einer determinierten Deutung der Quantenmechanik ein äußeres Magnetfeld (s. vorhergeh. Referat).

*H. Kümmel.*

**Bopp, Fritz:** Statistische Untersuchung des Grundprozesses der Quantentheorie der Elementarteilchen. Z. Naturforsch. **8a**, 6—13 (1953).



Bei Betrachtung zweiwertiger Wahrscheinlichkeiten (Alternativen) am Beispiel des Grundprozesses der Quantentheorie (der Erzeugung oder Vernichtung eines Teilchens in einem Punkt) zeigt es sich, daß die umkehrbaren statistischen Vorgängen angepaßte Methode gerade die der üblichen Quantenstatistik ist, während die elementare klassische Statistik dem nichtumkehrbaren Prozesse entspricht.

*H. Kümmel.*

**Bopp, Fritz:** Ein statistisches Modell für den Grundprozeß in der Quantentheorie der Teilchen. *Z. Naturforsch.* 8a, 228—233 (1953).

Nach der Feynmanschen Graphenmethode ist es klar, daß die lokale Erzeugung und Vernichtung von Teilchen einen Grundprozeß der Quantentheorie darstellt, auf dem die Beschreibung des größten Teils der Quantenprozesse aufgebaut werden kann. Die Quantentheorie fordert, daß nicht „individuelle Situationen“, sondern nur Gesamtheiten durch Meßinstrumente reproduzierbar erfaßt werden, ferner, daß es in jedem Zeitpunkt zwei Beobachtungen zur Bestimmung der „Wahrscheinlichkeitsspanne“  $w_1 - w_2$ , und damit — wegen  $w_1 + w_2 = 1$  — der Wahrscheinlichkeiten selber gibt (hierbei sind  $w_1$  und  $w_2$  die Wahrscheinlichkeiten für die lokale Existenz und Nichtexistenz eines Teilchens, bzw. für die mit dem Rückschluß von der Meßapparatur auf die ungestörte Gesamtheit zusammenhängende „Koexistenz“ und „Nicht-Koexistenz“). Die hieraus folgende Korrelationsstatistik entspricht der Quantentheorie der Teilchen.

*H. Kümmel.*

**Bohm, David:** Proof that probability density approaches  $|\psi|^2$  in causal interpretation of the quantum theory. *Phys. Review*, II. Ser. 89, 458—466 (1953).

Während der Verf. in seinen ersten Arbeiten über die kausale Interpretation der Quantentheorie (dies. Zbl. 46, 210) gezeigt hatte, daß die Annahme: Wahrscheinlichkeitsdichte  $P = \psi^2$ , mit den Bewegungsgleichungen verträglich ist, gelingt es ihm hier nachzuweisen, daß infolge der statistischen Stöße jede andere Wahrscheinlichkeitsdichte schließlich in  $|\psi|^2$  übergeht. Hieran anschließend wird darauf hingewiesen, daß neben den zu der üblichen Interpretation der Quantentheorie führenden Theorien auch eine solche konstruierbar sein kann, die z. B. in Größenbereichen von  $10^{-13}$  cm zu ganz anderen Folgerungen führt: dort brauchte die Beziehung  $p = |\psi|^2$  nicht zu gelten. Eine solche Theorie würde erst unter normalen Bedingungen diese Beziehung näherungsweise ergeben.

*H. Kümmel.*

**Vigier, Jean-Pierre:** Densité statistique des ensembles de particules en interprétation causale. *C. r. Acad. Sci.*, Paris 236, 1003—1005 (1953).

Verf. zeigt, daß die „kausale Quantentheorie“ (D. Bohm, vorsteh. Referat) der Feynmanschen Theorie [R. P. Feynman, *Reviews modern Phys.* 20, 367—387 (1948)] äquivalent ist.

*H. Kümmel.*

**Waldmann, Ludwig:** Nichtrelativistische Quantenmechanik des starren Elektrons. *Z. Naturforsch.* 8a, 583—593 (1953).

Verf. geht von den klassischen kanonischen Bewegungsgleichungen des Pol-Dipolteilchens aus und wendet zur Quantisierung eine von Bopp vorgeschlagene Methode an. Mit der so gewonnenen Wellengleichung behandelt er das dem Wasserstoffatom entsprechende Problem der Bewegung des Pol-Dipolteilchens in einem Coulombschen Feld. Er findet, daß eine Verschiebung der *S*-Terme auftritt, die er näherungsweise berechnet und mit dem Lamb-Retherfordschen Effekt in Zusammenhang zu bringen versucht.

*A. Papapetrou.*

**Demkov, Ju. N.:** Variationsprinzipien und Virialsatz für Probleme des kontinuierlichen Spektrums in der Quantenmechanik. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. 89, 249—252 (1953) [Russisch].

Der Verf. untersucht die *S*-Streuung an einem Kraftzentrum  $V(r)$ . Dabei wird nur die Gleichung für die radiale Funktion behandelt und auf ein Variationsproblem zurückgeführt, das als Verallgemeinerung der Methode von Hulthén angesehen

werden kann. Um eine hinreichende Anzahl von Gleichungen zur Bestimmung der willkürlichen Parameter zu erhalten, wird das Funktional in eine quadratische Form transformiert, die dann die Bedingung für die Stationarität des Funktionals liefert. Betrachtet man ein kugelsymmetrisches Problem, so kann man durch Entwicklung nach Kugelfunktionen und Integration über die Winkelbestandteile ein Gleichungssystem für die Phasen und Radialfunktionen bekommen. Die Ableitung der Formeln ist ähnlich der Ableitung des Virialsatzes für Moleküle. Die Methode gestattet Anwendungen auf Probleme der Beugung einer ebenen Welle an einer räumlichen Inhomogenität endlicher Dimension.

*P. Urban.*

**March, N. H.:** The virial theorem for Dirac's equation. *Phys. Review*, II. Ser. **92**, 481—482 (1953).

**Vrkljan, V. S.:** Ist das Diracsche Verfahren der Linearisation notwendig? *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A* **37**, 491—498 (1953).

Verf. zeigt, daß eine Linearisierung in der Form:

$(\gamma_1 p_x + \gamma_2 p_y + \gamma_3 p_z + \gamma_4 m_0 c) (\beta_1 p_x + \beta_2 p_y + \beta_3 p_z + \beta_4 m_0 c) = (u c) \xi u c$   
zwar nicht notwendig auf die Diracsche Form führt, doch stets genau dieselben Resultate ergibt.

*F. Penzlin.*

**Durand, Émile:** Une identité conduisant à la solution du problème de Kirchhoff pour les ondes amorties. *C. r. Acad. Sci., Paris* **237**, 647—649 (1953).

Die Arbeit enthält die Ableitung der Kirchhoffschen Formel für die Klein-Gordon-Gleichung.

*P. Urban.*

**Loc, Phan van:** Sur le principe de Huygens en théorie de l'électron de Dirac. *C. r. Acad. Sci., Paris* **237**, 649—651 (1953).

Die Arbeit berichtet über die Behandlung der Dirac-Gleichung nach der Methode von Kirchhoff.

*P. Urban.*

**Roussopoulos, Paul:** Diffusion d'une particule de Dirac chargée, par un centre diffuseur électrostatique. *C. r. Acad. Sci., Paris* **237**, 1397—1399 (1953).

L'A. applique le formalisme de B. Lippman et J. Schwinger (ee Zbl. **39**, 424) au calcul d'une expression approchée de la section efficace de diffusion d'une particule de Dirac chargée par un centre diffuseur électrostatique.

*G. Petiau.*

**Jackson, T. A. S.:** Accidental degeneracy of hydrogen. *Proc. phys. Soc., Sect. A* **66**, 958—959 (1953).

**Bodiu, Georges:** Impossibilité de décomposer la fonction d'onde  $\psi(M_1, \dots, M_k, \dots, M_N)$  d'une assemblée de fermions  $M_i$  en un produit de fonctions d'onde  $\psi_i(M_i)$ , individuelles. *C. r. Acad. Sci., Paris* **237**, 1493—1495 (1953).

**March, N. H.:** The exchange potential in an electron gas at nonzero temperature. *Phys. Review*, II. Ser. **92**, 510—511 (1953).

**Fabre de la Ripelle, Michel:** Résolution des équations de perturbation. III. Expression des constantes de transition. *C. r. Acad. Sci., Paris* **237**, 874—876 (1953).

**Urban, P. und K. Wildermuth:** Über die Konvergenz des Bornschen Näherungsverfahrens. *Z. Naturforsch.* **8a**, 594—598 (1953).

An Hand einiger Beispiele (Streuung am abgebrochenen Coulombfeld, Streuung an einer Potentialmulde) wird die Konvergenz des Bornschen Verfahrens zur Behandlung von Streuproblemen in Abhängigkeit von Streupotential und Stoßenergie untersucht. Allgemeine Behauptungen von W. Kohn (dies. Zbl. **46**, 438) über den Konvergenzbereich der Bornschen Näherung in Abhängigkeit vom Kopplungsparameter werden nur teilweise bestätigt.

*Th. Sexl.*

**Parker, K.:** The effect of nuclear multipole moments on electron scattering. *Proc. phys. Soc., Sect. A* **66**, 881—884 (1953).

Der Einfluß von Kernquadrupol- und höheren Momenten auf die Elektronenstreuung bei großen Energien wird in Bornscher Näherung berechnet. Diese Näherung ist für große Kernladungszahlen und Winkel nicht mehr gültig, sie gibt aber eine



Abschätzung des Effekts: Der theoretische Wirkungsquerschnitt wird durch Mitberücksichtigung dieser höheren Momente höchstens um 1/1000 verändert, also vernachlässigbar gering. *E. Freese.*

**Redhead, M. L. G.:** Radiative corrections to the scattering of electrons and positrons by electrons. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **220**, 219—239 (1953).

Da die neuere Quantenelektrodynamik bisher nur bei kleiner Impulsabgabe durch das Experiment prüfbar ist (Lambshift, anomales magnetisches Moment), ist es von Wichtigkeit, alle Korrekturen zu Streuvorgängen, vor allem bei höheren Energien, theoretisch und experimentell zu untersuchen. In der vorliegenden Arbeit werden die Strahlungskorrekturen zur Streuung von Elektronen an Elektronen und Positronen (Mollersche bzw. Bhabhasche Formeln) mit Hilfe der Feynmanschen Methode untersucht. Gegenüber anderen Arbeiten über das gleiche Thema, die zum Teil früher erfolgt sind (vgl. Achiezer und Polovin, dies. Zbl. **50**, 432) hat diese Arbeit den Vorteil, daß numerische Resultate berechnet wurden, die in übersichtlichen Kurven angegeben sind und zeigen, daß die Strahlungskorrekturen für sehr hohe Energien des gestreuten Elektrons beträchtlich sind. Außerdem werden experimentelle Resultate diskutiert. *P. Urban.*

**Moses, Harry E.:** The formulation of the Kohn-Hulthén variational principle in terms of the scattering operator formalism. *Phys. Review, II. Ser.* **92**, 817—821 (1953).

Der Autor übernimmt das Kohn-Hulthénsche Variationsverfahren [W. Kohn, *Phys. Review, II. Ser.* **84**, 495—501 (1951)] in den *S*-Matrix-Formalismus. Zunächst werden, in Anlehnung an Arbeiten von Møller und Friedrichs, Grundeigenschaften dieses allgemeinen Konzeptes wiederholt. Das Variationsproblem läßt sich dann direkt für den nichtsingulären Teil der *S*-Matrix formulieren. Der Variationsansatz wird mit Hilfe der Eigenwertgleichungen verifiziert, wobei besonders darauf geachtet wird, daß im zu variierenden Funktional eine Grenzwertbildung mit der Integration nicht vertauscht werden darf, um das Auftreten undefinierter Produkte singulärer Funktionen zu vermeiden. Damit umgeht man auch gewisse Zweideutigkeiten der älteren Fassung des Variationsproblems. Mit der expliziten Angabe der Form des Funktionals und einer Betrachtung über die Bornschen Näherungen als Variationsnäherungen schließt die Arbeit. *P. Urban.*

**Salam, Abdus and P. T. Matthews:** Fredholm theory of scattering in a given time-dependent field. *Phys. Review, II. Ser.* **90**, 690—695 (1953).

Verff. untersuchen mit Hilfe der Fredholmschen Theorie die Integralgleichung für das Problem der Streuung (bzw. Paarerzeugung) im Falle eines quantisierten Elektron-Positronfeldes bei vorgegebenem elektromagnetischem Feld. Insbesondere wird auf die Zusammenhänge eingegangen, die zwischen dem Fredholmschen Verfahren und den bei der Feynman-Dysonschen Methode betrachteten Ausdrücken bestehen. *H. Lehmann.*

**Costa de Beauregard, Olivier:** Relation entre le principe des potentiels retardés et le second principe de la thermodynamique. *C. r. Acad. Sci., Paris* **236**, 666—668 (1953).

Die Entropieänderung bei Emission und Absorption von Photonen (ohne Änderung der Teilchenzahl der Materie) wird untersucht. Im unendlich ausgedehnten (euklidischen) Raum vermehrt jede Photonenemission die Entropie, im endlichen wird sie je nach  $n < \bar{n}$  bzw.  $n > \bar{n}$  ( $n$  = Anzahl,  $\bar{n}$  = Gleichgewichtsanzahl der Photonen) durch Emission bzw. Absorption vermehrt. Der Verf. glaubt darin eine Begründung für die übliche Verwendung der retardierten Potentiale erblicken zu können. *H. Kümmel.*

**Bade, W. L. and Herbert Jehle:** An introduction to spinors. *Reviews modern Phys.* **25**, 714—728 (1953).

Für Physiker bestimmte einführende Darstellung und Bericht über Spinoralgebra und -analysis. Anwendungen auf die Diracgleichung und die Maxwell-Lorentzgleichungen werden ausführlich behandelt. *G. Höhler.*

**Cap, Ferdinand: Spinortheorie der Elementarteilchen. I. Z. Naturforsch. 8a, 740—744 (1953).**

**Donnert, Hermann: Spinortheorie der Elementarteilchen. II. Mathematische Durchführung des Postulates der Beschreibung mit  $2(2s+1)$  bzw.  $4(2s+1)$  reellen Wellenfunktionen. Z. Naturforsch. 8a, 745—747 (1953).**

**Cap, Ferdinand: Spinortheorie der Elementarteilchen. III. Das freie Teilchen. Z. Naturforsch. 8a, 748—753 (1953).**

A new formulation of the theory of particles with an arbitrary spin  $s$  is given. Each sort of charged particles with spin  $s$  is described by  $2(2s+1)$  independent field quantities satisfying the (second order) Schrödinger-Gordon equation in both cases of integer and of half integer spin in contradistinction to the traditional theory where the (first order) Dirac equation was used in the case of half integer spin. The equivalence of this new formalism with the formalism of Fierz is demonstrated in the interaction-free case. *J. Rayski.*

**Olsen, H., P. Werenskiöld and H. Wergeland: Retardation of meson fields. Norske Vid. Selsk. Forhdl. 25, 54—59 (1953).**

Bekanntlich breiten sich Mesonwechselwirkungen nicht nur auf der Oberfläche, sondern über das ganze Innere des Lichtkegels aus. Dieses Resultat wird durch ausführliche Rechnung gewonnen. Der Übergang zu einer den Liénard-Wiechert-Potentialen analogen Formel bereitet Schwierigkeiten, weil neben der Geschwindigkeit auch die Beschleunigung und alle höheren Zeitableitungen auftreten. Die Durchführung der Rechnung unter Mitnahme des Beschleunigungsgliedes zeigt, daß der Retardierung im Falle der Mesontheorie (wenigstens für nichtrelativistische Geschwindigkeiten) keine größere Bedeutung zukommt als in der Elektrodynamik. *F. Penzlin.*

**Costa de Beauregard, Olivier: Intégrales de Fourier covariantes et résolution du problème de Cauchy pour les particules libres de spin  $1/2$  et  $1$ . C. r. Acad. Sci., Paris 237, 1495—1497 (1953).**

L'A. rectifie une expression donnée précédemment (ce Zbl. 42, 212) pour l'expression réciproque d'une solution générale covariante de l'équation de Dirac généralisant une formule de M. Riesz (ce Zbl. 30, 424). Extension au cas de la particule de spin  $\hbar$ . *G. Petiau.*

**Hepner, W. A. and D. R. Workman: The interpretation of Bhabha's theory of particles of maximum spin  $3/2$ . Phys. Review, II. Ser. 92, 1071—1072 (1953).**

**Darling, B. T. and P. R. Ziesel: The theory of finite displacement operators and fundamental length. Phys. Review, II. Ser. 91, 1252—1256 (1953).**

Die üblichen Differentialgesetze (Feldgleichungen) sollen ersetzt werden durch endliche Verschiebungsgesetze, derart daß die Feldgleichungen an einem gegebenen Punkte nur die Feldgrößen in solchen Punkten enthalten, deren Abstand von dem gegebenen Punkte die zeitartige Bedingung  $\sum_n 1x_n^2 + 4\omega^2 = 0$  erfüllt. Dabei ist  $\omega$  eine universelle Länge. Relativistische Wellengleichungen der Form  $(\gamma_\sigma u_\sigma + k)\psi = 0$  mit  $u_\sigma = i \partial x_\sigma$  werden dazu umgedeutet in Differenzengleichungen der Form

$$(\gamma_\sigma g(u) u_\sigma + k f(u)) \psi = 0,$$

wobei  $g(u)$  und  $f(u)$ , mit  $u = [\sum_n u_n^2]^{1/2}$ , Operatoren einer endlichen Verschiebung darstellen. Die Verf. bestimmen diese aus Invarianz- und Korrespondenzbetrachtungen zu  $f(u) = 2J_1(2\omega u) 2\omega u$ ,  $g(u) = 8J_2(2\omega u) (2\omega u)^2$  ( $J_1, J_2$  = Besselfunktionen). Man kommt damit wieder zu der schon früher von Darling (dies. Zbl. 39, 426) vorgeschlagenen und hinsichtlich ihrer Eigenwerte analysierten Gleichung. *W. Wessel.*



Freistadt, Hans: Electromagnetic mass and a particle model in Darling's theory of elementary particles. Phys. Review, II. Ser. 92, 1015—1016 (1953).

Heisenberg, Werner: Doubts and hopes in quantum-electrodynamics. Physica 19, 897—908 (1953).

Rosenfeld, L.: Problems of interpretation of quantum electrodynamics. Physica 19, 859—868 (1953).

Pais, A.: Isotopic spin and mass quantization. Physica 19, 869—887 (1953).

Knight jr., Bruce W.: Canonical field theory. A prototype example. Amer. J. Phys. 21, 421—427 (1953).

Begriffe der klassischen und auch der quantisierten Feldtheorie werden am Beispiel der schwingenden Saite erläutert. *G. Höhler.*

Thirring, Walter: On the divergence of perturbation theory for quantized fields. Helvet. phys. Acta 26, 33—52 (1953).

Verf. untersucht die Konvergenz der Entwicklung nach dem Kopplungsparameter  $\lambda$  für ein renormalisiertes Skalarfeld mit dem Wechselwirkungsterm  $\lambda \psi^3$ . Es zeigt sich, daß für Prozesse niedriger Energien (d. h. bei Energien, bei denen Teilchen-erzeugung nicht berücksichtigt zu werden braucht) die Reihe für alle  $\lambda$  divergiert. Diese Aussage läßt sich auf zwei Skalarfelder  $\psi$  und  $\Phi$  mit der Wechselwirkung  $\lambda \Phi \psi^2$  übertragen. *H. Kümmel.*

Ferretti, B.: Sulla diagonalizzazione della hamiltoniana nella teoria dei campi. II. Nuovo Cimento, Ser. IX. 10, 1079—1125 (1953).

[Part I, Nuovo Cimento, Ser. IX 8, 108—131 (1951).] In view of the circumstance that the solutions of the field equations in quantum field theory are not analytic functions of the coupling parameter  $e$  at the point  $e = 0$ , a new approach to the perturbation method is investigated. Assuming that the Hamiltonian is diagonalized for a value  $e \neq 0$ , the problem of diagonalization of the Hamiltonian for a value  $e + \delta e$  is investigated. It is shown that the divergences arising by varying the coupling parameter can be eliminated by means of invariant renormalization. *J. Rayski.*

Källén, Gunnar: Non perturbation theory approach to renormalization technique. Physica 19, 850—858 (1953).

Schönberg, M.: Application of second quantization methods to the classical statistical mechanics. II. Nuovo Cimento, Ser. IX 10, 419—472 (1953).

Verf. setzt seine früheren Untersuchungen [Nuovo Cimento, Ser. IX 9, 1139—1182 (1952)] über die Beschreibung der klassischen statistischen Mechanik mittels der Methode der Quantenfeldtheorie fort und erweitert sie. In dem Formalismus tritt das Gibbssche Paradoxon nicht auf. Die Wechselwirkungen der Partikel lassen sich relativ einfach erfassen. Die hier geschilderte Methode führt zu der großen kanonischen Gesamtheit. Die zugehörige „unquantisierte“ Theorie ist eine „überklassische Theorie“, die — weniger „richtig“ als die klassische Mechanik — die Dynamik und das theoretische Verhalten eines kontinuierlich verteilten Stoffes beschreibt. Die Möglichkeit der „quantenfeldtheoretischen Beschreibung“ der klassischen Statistik hängt aufs engste mit der Darstellung der klassischen Bewegung durch unitäre Transformationen im Hilbertraum der  $f(p, q)$  zusammen. Untersuchungen über die Irreversibilität — die mit Hilfe der Feldbeschreibung naturgemäß sehr erleichtert wird — werden angekündigt. *H. Kümmel.*

Schönberg, M.: A generalization of the quantum mechanics. Nuovo Cimento, Ser. IX 10, 350—353 (1953).

Verf. verallgemeinert die Quantentheorie, indem er statt der Schrödingerfunktion  $\psi(t; x)$  das lineare Funktional  $\chi[t, \psi^*] = \int \psi(t, x) \psi^*(x) dx$  einführt. Dann gilt für  $\chi$  eine Bewegungsgleichung (Integralgleichung), die Lösungen (Volterrasche Reihen) von anderem Typus (d. h. nicht linear in  $\psi^*$ ) besitzt. Im ersten Fall ändert sich die Interpretation der Quantenmechanik nicht. Eine genauere Diskussion wird angekündigt. *H. Kümmel.*

**Green, H. S.:** A generalized method of field quantization. Phys. Review, II. Ser. **90**, 270—273 (1953).

Die quantentheoretischen Feld- und Bewegungs-Gleichungen  $i\psi/\partial x^\alpha = i[P_\alpha, \psi]$ , wo  $P_\alpha$  der Energie-Impuls-Vektor ist, können für  $P^\alpha = \sum_r p_r^\alpha [b_r^*, b_r]$  mit den Vertauschungsregeln  $[b_r, [b_s^*, b_t]] = \delta_{rs} b_t$  für die Entwicklungskoeffizienten  $b_r$  von  $\psi$  erfüllt werden (und einer weiteren Vertauschungsregel mit null auf der rechten Seite).  $b_r^*$  und  $b_r$  können als Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren angesehen werden, und ein Zustand kann höchstens eine bestimmte Zahl von Teilchen enthalten. Für  $P^\alpha = \sum_r p_r^\alpha [b_r^*, b_r]$  folgt  $[b_r, [b_s^*, b_t]] = \delta_{rs} b_t$ . F. Hund.

**Schwinger, Julian:** A note on the quantum dynamical principle. Philos. Mag., VII. Ser. **44**, 1171—1179 (1953).

Verf. zeigt, daß die von Burton und Tousek (dies. Zbl. **50**, 223) angegebenen Schwierigkeiten bei der Herleitung der Vertauschungsrelationen aus dem von ihm (dies. Zbl. **43**, 422) vorgeschlagenen Formalismus sich bei Einführung von kanonischen Variablen leicht lösen, so daß keine Inkonsistenz dieser Theorie vorliegt.

F. Penzlin.

**Burton, W. K. and B. F. Tousek:** Schwinger's dynamical principle. Philos. Mag., VII. Ser. **44**, 1180—1181 (1953).

Erwiderung auf die vorsteh. referierte Note, in der festgestellt wird, daß die Benutzung von kanonischen Variablen über die ursprüngliche Form der von Schwinger (dies. Zbl. **43**, 422) vorgeschlagenen Theorie hinausgeht, während die von der Verf. vorgeschlagene Heranziehung der Peierlsschen Methode im Rahmen dieser Theorie bleibt.

F. Penzlin.

**Hughes, J. B.:** Note on a paper by K. H. Tzou. Philos. Mag., VII. Ser. **44**, 1300—1302 (1953).

Verf. bemerkt, daß die von Tzou (dies. Zbl. **31**, 142) angewandte relativistisch-invariante Methode zur Berechnung der Bewegung eines freien Elektrons zu denselben Resultaten führt wie die klassische Methode von Dirac.

F. Penzlin.

**Eden, R. J.:** Quantum field theory of bound states. II. Relativistic theory of resonance reactions. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **217**, 390—408 (1953).

Der Verf. setzt seine Untersuchungen über die Bindungszustände (Eden, dies. Zbl. **47**, 219) fort. Die Resonanz läßt sich mit der Feynman-Dyson'schen Graphenmethode bis zur gewünschten Ordnung beschreiben, weil sie durch die Wechselwirkung mit endlich vielen virtuellen Teilchen hervorgerufen wird. Zur Berücksichtigung der Dämpfung müssen jedoch unendliche Reihen von Graphen berücksichtigt werden, die als Lösungen von Integralgleichungen für die Fortpflanzungsfunktion gefunden werden können (ähnlich dem Vorgang bei der Bethe-Salpeter-Gleichung). Diese Überlegungen werden zunächst an einem Modell klargemacht und schließlich verallgemeinert.

H. Kümmel.

**Dyson, Freeman J.:** The use of the Tamm-Dancoff method in field theory. Phys. Review, II. Ser. **90**, 994 (1953).

Verf. beschreibt eine Modifikation des Tamm-Dancoff-Formalismus, die die Schwierigkeiten der Vakuumgraphen (disconnected closed loops) vermeidet. Die Änderung besteht im wesentlichen darin, daß bei der Definition der Wellenfunktionen das freie Vakuum durch das wahre Vakuum ersetzt wird.

H. Lehmann.

**Dyson, F. J.:** Mass-renormalization with the Tamm-Dancoff method. Phys. Review, II. Ser. **91**, 421—422 (1953).

Am Beispiel des Beitrages des Nukleonselbstenergiegraphen niedrigster Ordnung zur Streuung eines Mesons an einem Nukleon wird die Möglichkeit der Renormierung der Tamm-Dancoff-Gleichung untersucht. Verf. zeigt, daß die von ihm vorgeschlagene „neue Tamm-Dancoff-Methode“ (s. vorsteh. Ref.) ein endliches und eindeutig Resultat für diesen Beitrag liefert, während dies bei der „alten“ Tamm-Dancoff-Methode nicht der Fall ist.

H. Lehmann.



**Macke, Wilhelm:** Zum relativistischen Zweikörperproblem der Quantenmechanik. I. II. Z. Naturforsch. **8a**, 599—615, 615—620 (1953).

The equation of Bethe and Salpeter (this Zbl. **44**, 431) for the bound states of two fermions coupled by means of a mesonic field has been derived anew and reduced to a single-time form. A method for an approximative solution of this Bethe-Salpeter-Macke equation (B. S. M.) in powers of the retardation constant  $v/c$  ( $v$  relative velocity of the two particles,  $c$  velocity of light) has been developed. In the first approximation the usual static Yukawa interaction is obtained. The B. S. M. equation is of a similar form to the Tamm-Dancoff-Levy eigen-equation (T. D. L.) [Tamm, J. Phys. USSR **9**, 449 (1945); Dancoff, this Zbl. **36**, 273; Lévy, this Zbl. **48**, 224] however, the interaction potential appearing in the two equations differs in several respects. These differences have been discussed and made understandable on account of the dependence of the potential in the B. S. M. equation on the energy eigenvalue  $W$  which produces an ambiguity of the representation. Different representations of the eigen-equation are connected by transformations possessing reciprocals. The transformation leading from the B. S. M. equation to the T. D. L. equation (with vacuum terms omitted) has been constructed explicitly. *J. Rayski.*

**Macke, Wilhelm:** The single-time Bethe-Salpeter equation. Phys. Review, II. Ser. **92**, 1072 (1953).

**Wataghin, G.:** On a non-local field theory. Nuovo Cimento, Ser. IX **10**, 1602—1604 (1953).

A relativistically invariant form factor dependent on the total energy-momentum of the system of particles is suggested. A general rule for supplementing the  $S$ -matrix (or rather the hermitian  $K$ -matrix) with this form factor is formulated. The modified non-local  $S$ -matrix satisfies correspondence requirements and permits to apply a statistical treatment similar to the one suggested by Fermi for the problem of multiple production of mesons. *J. Rayski.*

**Gulmanelli, P.:** On a theorem in non-local field theories. Nuovo Cimento, Ser. IX **10**, 1582—1589 (1953).

The non-local field theory was quantized previously [Rayski, this Zbl. **44**, 440, and Bloch, Danske Vid. Selsk., mat.-fys. Medd. **27**, Nr. 8 (1952)] by (i) replacing the basic integro-differential equations by inhomogeneous integral equations involving the free ingoing waves, and by (ii) assuming for the ingoing waves the usual commutation relations for free waves (known from the usual local field theory). The author tries to check the consistency of such a quantization procedure by showing that the ingoing waves satisfy the same Poisson-bracket (P. B.) relations as the interaction free waves. A new definition of the P. B. given by Peierls (this Zbl. **48**, 446) is used. However, the proof of the identity of the two P. B. relations has been given only under the restriction to classical (commuting) fields which hampers a decisive conclusion. *J. Rayski.*

**Hori, Shoichi:** On the transition amplitude in quantum electrodynamics. Progress theor. Phys. **9**, 299—311 (1953).

Die Zustandsvektoren der Quantenelektrodynamik werden nach Zuständen freier Teilchen entwickelt; die Schrödingergleichung für die Entwicklungskoeffizienten wird in eine kovariante Gestalt gebracht. *G. Lüders.*

**Svenonius, Per:** On the coherent scattering of light by an electrostatic field according to the Dirac hole theory. Ark. Fys. **6**, 269—277 (1953).

Calcul relativiste détaillé utilisant la forme classique de la théorie des lacunes, antérieure aux travaux de Feynman. Les résultats numériques seront donnés dans une étude ultérieure. *O. Costa de Beauregard.*

**Ambrosino, Georges, Jean Houbault et Paul Maignan:** Sur la distribution angulaire des photons d'annihilation des électrons. Étude expérimentale. C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 708—711 (1953).

Slansky, Serge: Sur les photons annihilés et les interactions électro-magnétiques. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 972—973 (1953).

Cloizeaux, Jacques des et Georges Ambrosino: Probabilités respectives de l'annihilation d'un positron avec un électron 3 d ou avec un électron libre du cuivre. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 1069—1071 (1953).

Arnous, E. and W. Heitler: Theory of line-breadth phenomena. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 220, 290—310 (1953).

Eine allgemeine Theorie der Spektrallinienform wird gegeben, die es gestattet, im Prinzip in jeder Ordnung der quantenelektrodynamischen Störungstheorie (nach der Feinstrukturkonstanten  $\alpha$ ) eindeutige und endliche Resultate zu finden. Die Hauptschwierigkeit, die dieses Problem von den bisher behandelten quantenelektrodynamischen Problemen unterscheidet, ist das Vorhandensein eines gebundenen Systems („Atom“) in Wechselwirkung mit dem Strahlungsfeld. Die Zustände des Atoms müssen dann, analog wie Zustände freier Elektronen, so umdefiniert werden, daß die begleitenden virtuellen Photonen in ihnen eingeschlossen sind. Während jedoch für die Zustände freier Teilchen virtuell das ist, was den Energiesatz verletzt, kann die Trennung virtuell-reell im vorliegenden Fall, wo angeregte Zustände endlicher Lebensdauer existieren, nicht willkürfrei eindeutig festgelegt werden. Diese Vieldeutigkeit rührt vom Einfluß der vorgängigen Anregung des Atoms in den betrachteten Zustand her. Mathematisch äußert sich dieser Sachverhalt so, daß die kanonische Transformation  $T$ , welche die virtuellen Photonen wegschafft, nur teilweise festgelegt ist, nämlich im wesentlichen durch die Bedingung, daß der Grundzustand des Atoms stabil sein soll. Abhängigkeit resp. Unabhängigkeit von  $T$  bedeutet dann physikalisch für eine Größe Abhängigkeit resp. Unabhängigkeit von den Anregungsbedingungen. Das Hauptresultat, gültig bis zur Ordnung  $\alpha^4$ , ist, daß die Linienform in Funktion von  $E$  gegeben ist durch  $[1 + \frac{1}{2}(E)]^2 [(E - E_0)^2 + \gamma^2/4]$ .  $E_0$ , das Zentrum der Linie, ist gegenüber der ungestörten Lage um die Lamb-shift (2. u. 4. Ordnung) verschoben. (Außerdem besteht eine weitere, äußerst kleine, Verschiebung bei Linien endlicher Breite, entsprechend der klassischen Linienverschiebung eines gedämpften Oszillators.)  $\gamma$  ist die klassische Linienbreite  $\gamma_0$  vermehrt um eine Korrektur ( $\sim \alpha^2 \gamma_0$ ), die stets vernachlässigbar ist. Sowohl  $E_0$  wie  $\gamma$ , also der ganze Resonanznenner, sind von  $T$  unabhängig. Der Zähler  $[1 + \frac{1}{2}(E)]^2$  indessen hängt, bereits in der Ordnung  $\sim \alpha$ , von  $T$ , also von den Anregungsbedingungen ab, was natürlich physikalisch zu erwarten ist. Für Resonanzstreuung, d. h. Anregung durch einfallendes Licht, wird dieser Faktor explizit berechnet. In niedrigster Ordnung ist er durch die elementaren Ausdrücke gegeben, die höheren Korrekturen sind vernachlässigbar klein ( $\sim \alpha^3$ ). Es zeigt sich also, daß die klassische Theorie der Linienform eine ausgezeichnete Approximation darstellt (bis auf Fehler  $\sim \alpha^3$ ). Durch die vorliegende systematische und vollständige Theorie ist jene damit auf eine solide Grundlage gestellt.

M. R. Schafroth.

Gluckstern, R. L., M. H. Hull jr. and G. Breit: Polarization of Bremsstrahlung radiation. Phys. Review, II. Ser. 90, 1026—1029 (1953).

Der Querschnitt für Bremsstrahlung als Funktion der Polarisation der emittierten Photonen wird berechnet in derselben Annäherung wie in der Bethe-Heitler-Formel (die man nach Integration über die Polarisation erhält). Es wird bemerkt, daß die Matrixelemente entweder durch die gewöhnliche Einführung der Zwischenzustände erhalten werden oder auch durch die Berechnung der Matrixelemente eines direkten Übergangs des Systems Kern + Elektron + Feld zwischen stationären Zuständen.

P. Budini.

Gluckstern, R. L. and M. H. Hull jr.: Polarization dependence of the integrated Bremsstrahlung cross section. Phys. Review, II. Ser. 90, 1030—1035 (1953).

Der in der vorigen Note berechnete Querschnitt wird über alle Richtungen des emittierten Elektrons integriert. Es wird bewiesen, daß man eine bemerkbare Polarisation im Gebiet kleiner und großer Energien des Photonspektrums erhält. Einige Einzelfälle werden numerisch wiedergegeben.

P. Budini.

Baranger, M., H. A. Bethe and R. P. Feynman: Relativistic correction to the Lamb shift. Phys. Review, II. Ser. 92, 482—501 (1953).

In der vorliegenden Arbeit werden die sogenannten relativistischen Korrekturen des Lambshifts ausgerechnet, d. h. Glieder der Größenordnung  $\alpha \cdot (Z\alpha)^5 \cdot mc^2$  der Niveauverschiebung des Wasserstoffatoms. Dasselbe Problem ist auch von Karplus, Klein und Schwinger (dies. Zbl. 47, 231) behandelt worden. Die Ergebnisse der beiden Rechnungen sind gleich, die verwendeten Methoden voneinander unabhängig und in Einzelheiten voneinander sehr verschieden.

G. Källén.



Weneser, J., R. Bersohn and N. M. Kroll: Fourth-order radiative corrections to atomic energy levels. Phys. Review, II. Ser. 91, 1257—1262 (1953).

Die Verf. berechnen die Strahlungskorrekturen vierter Ordnung für die Niveaueverschiebung des Wasserstoffatoms mit Hilfe der neueren Quantenelektrodynamik. Hierfür werden zwei Verfahren angewandt: Entweder eine direkte Berechnung der Selbstenergie mit Hilfe der Störungsrechnung (French und Weisskopf) oder über die Strahlungskorrekturen zur elastischen Streuung eines Elektrons an einem vorgegebenen Potential (Feynman). In der vorliegenden Arbeit wird die (einfachere) zweite Methode angewendet. Das Ergebnis wird als Zusatzglied zur Wechselwirkungsenergiedichte des Elektrons mit dem äußeren Potential

$$-ie\bar{\psi}(x)\gamma_{\mu}\psi(x)\square^2/\kappa^2 A_{\mu}^e(x) [(\alpha/4\pi)^2(0,52 \pm 0,21)]$$

bedeutet, wozu noch das bereits bekannte anomale magnetische Moment kommt. Die Beiträge von den Vakuumpolarisationsströmen werden weggelassen. Dieser Term liefert einen Beitrag zur Niveaueverschiebung von der Größe  $(\alpha^4 Z^4/n^3) R y \delta_{l,0} [(4/\pi^2)/0,52 \pm 0,21]$ . Für das 2S-Niveau des Wasserstoffs beträgt dieser  $0,24 \pm 0,10$  Mc/sec. Die Berechnungen haben insofern praktische Bedeutung, als erst kürzlich genaue experimentelle Messungen der Feinstruktur der  $n=2$  Niveaus für Wasserstoff und Deuterium angestellt wurden. P. Urban.

Brueckner, K. A. and K. M. Watson: The construction of potentials in quantum field theory. Phys. Review, II. Ser. 90, 699—708 (1953).

Verff. beschreiben eine Methode zur Ableitung des Wechselwirkungspotentials zwischen zwei Teilchen aus einer gegebenen Feldtheorie. Sie gehen dazu von einer formalen Lösung der Schrödingergleichung aus, die von Lippmann-Schwinger (dies. Zb. 39, 424) angegeben worden ist, und zeigen, daß man hieraus das Potential in Form einer Reihenentwicklung (die jedoch keine Potenzreihe in der Kopplungskonstanten ist) erhalten kann. Bezüglich der Frage, ob man die auftretenden Divergenzen durch Renormierung eliminieren kann, wird auf eine zukünftige Arbeit verwiesen. H. Lehmann.

Ôneda, Sadao: On some properties of the interactions between elementary particles. Progress theor. Phys. 9, 327—344 (1953).

Für die Umwandlung von Elementarteilchen wird neben der Erhaltung der elektrischen Ladung die der „nukleonischen Ladung“ gefordert, um die Stabilität der schweren Teilchen zu gewährleisten. Familien von Elementarteilchen, gekennzeichnet nach nukleonischer Ladung und Statistik, werden postuliert, und es wird diskutiert, welche Typen von Kopplungen mit den bisherigen experimentellen Erfahrungen verträglich sind. G. Lüders.

Trucco, Ernesto: On the stability of heavy nuclei in the strong-coupling limit of the pseudovector meson theory. Helvet. phys. Acta 26, 75—90 (1953).

L'A. examine dans le cas du couplage fort et de la théorie symétrique pseudovectorielle le problème de la stabilité des noyaux lourds déjà considéré par G. Wentzel (ce Zbl. 28, 44) dans le cas scalaire et par F. Coester [Helvet. phys. Acta 17, 35 (1944)] dans les cas pseudoscalaire et symétrique vectoriels. L'énergie nucléaire totale est évaluée en fonction du volume nucléaire en introduisant un potentiel du type de Thomas-Fermi. Les courbes représentant les variations de l'énergie en fonction du volume sont très proches de celles obtenues par G. Wentzel dans le cas de l'interaction scalaire et ne conduisent pas à prévoir un effet de saturation. En conclusion, le modèle étudié ne semble pas convenir pour représenter les propriétés d'un noyau réel. G. Petiau.

Kalitzin, Nikola St.: Über eine neue Kerntheorie. Acta phys. Acad. Sci. Hungar. 3, 45—53 (1953).

Die neue Kerntheorie wird auf Grund einer Verallgemeinerung der Maxwell-Lorentz'schen Elektrodynamik im sechsdimensionalen euklidischen Raum  $R_6$  aufgebaut, wobei das Vektorpotential  $A_i$  durch ein Tensorpotential  $\varphi_{\alpha\beta}$  ersetzt wird. Es ergibt sich zunächst ohne irgendwelche zusätzliche Annahmen, daß ein im  $R_6$  ruhendes Nukleon zwei Kernladungen und einen Spin besitzt. Das betrachtet der Autor als zwangsläufiges Auftreten eines Spins in einer klassischen Theorie. Ferner ergibt sich die spinabhängige Wechselwirkungsenergie zweier Nukleonen im Abstand

$r$  voneinander mit Spinmomenten  $\vec{\sigma}_a$  und  $\vec{\sigma}_b$  zu  $U = [g_1 g_1^+ + g_2 g_2^+ + f f^+ (\vec{\sigma}_a \vec{\sigma}_b)] e^{-\eta r}/r$ , wo  $g_1, g_1^+, g_2, g_2^+, f, f^+$  charakteristische Konstanten des Nukleons und  $\eta = m c/\hbar$  ( $m$  = Masse des Mesons) sind. Das unbequeme Dipolpotential  $1/r^3$  tritt in der nichtrelativistischen Näherung nicht auf. Eine relativistische Verallgemeinerung der Theorie wird angekündigt, von welcher sich der Autor auch das Auftreten der Tensorkräfte verspricht.

*Th. Sexl.*

**Mitter, H. und P. Urban:** Zur Streuung schneller Elektronen. I. Elastische Streuung. Acta phys. Austr. 7, 311—323 (1953).

Verff. berechnen nach der Methode von Feynman-Dyson die Matrixelemente für die elastische Streuung eines Dirac-Elektrons an einem Yukawapotential in zweiter und an einem Coulombpotential in dritter Näherung. Die Ergebnisse stimmen mit denen von MacKinley und Feshbach [Phys. Review, II. Ser. 74, 1759 (1948)] überein.

*F. Penzlin.*

**Konopinski, E. J. and H. M. Mahmoud:** The universal Fermi interaction. Phys. Review, II. Ser. 92, 1045—1049 (1953).

Auf der Basis der Hypothese der universellen Wechselwirkung zwischen allen Fermionen untersuchen die Verff. die Anwendung der Gesetzmäßigkeiten des  $\beta$ -Zerfalls auf den  $\mu$ -Zerfall. Bei Bevorzugung der Skalar-Tensor-Pseudoskalar-Wechselwirkung und der Annahme, daß die beim  $\mu$ -Zerfall entstehenden zwei Neutrinos völlig gleichartig sind, gelingt die Unterdrückung aller unerwünschten Umwandlungsprozesse.

*F. Cap.*

**Budini, P.:** Processi del second'ordine dell'interazione alla Fermi. Nuovo Cimento, Ser. IX 10, 1299—1310 (1953).

Da die Fermi-Wechselwirkung bekanntlich nicht renormalisierbar ist, führt Verf. zur Erfassung der Wechselwirkung zwischen zwei Fermionen eine nichtlokale Wechselwirkung ein, um auf diesem Weg wenigstens einen Teil der Divergenzen wegschaffen zu können. Mit dieser Theorie werden die Streuprozesse zweiter Ordnung betrachtet. Nach Einführung eines allerdings etwas willkürlichen Formfaktors werden die  $S$ -Matrixelemente berechnet und die Ergebnisse auf die Elektron-Neutrino-Streuung angewendet, deren Wirkungsquerschnitt mit dem der Elektron-Elektron-Streuung verglichen wird.  $\sigma_{ee} \sim 10^{19} \sigma_{\nu e}$ .

*F. Cap.*

**Budini, P.:** Processi del quart'ordine dell'interazione alla Fermi. Nuovo Cimento, Ser. IX 10, 1486—1488 (1953).

Der Verf. macht darauf aufmerksam, daß im Sinne seiner Arbeit (vorsteh. Referat) Corbens Überlegungen [Nuovo Cimento, Ser. IX 10, 1485 (1953)] durch Einführung einer nicht lokalen Wechselwirkung verbessert werden können, und führt diesen Gedanken durch. Als Corbensehe Kraft großer Reichweite zwischen zwei Fermionen ergibt sich interessanterweise  $V(r) = \text{const}/r$  wobei sich const an die Gravitationskonstante und die Teilchenmassen näherungsweise zurückführen läßt. Damit wird ein Zusammenhang zwischen der universellen Fermiwechselwirkungskonstanten  $g$  und der Gravitationskonstanten  $\gamma$  hergestellt.

$$\gamma = g^4 c^5 m_0^6 / 64 \pi^5 \hbar^{11} \sim 6,7 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1} \text{ g}^{-1}, \text{ wo } m_0 \sim 7 m_{\text{Elektron}}.$$

Durch die Rechnung von Budini fügt sich die Gravitation in den Rahmen der allgemeinen Fermi-Wechselwirkung ein, und die Befürchtungen Corbens werden gegenstandslos.

*F. Cap.*

**Budini, P. e G. Poiani:** Sulla anelasticità degli urti nucleone-nucleone a grande energia. Nuovo Cimento, Ser. IX 10, 1288—1298 (1953).

**Hamada, Tetsuo and Masao Sugawara:** Remarks on Lévy's fourth order potential. Progress theor. Phys. 9, 555—557 (1953).

**Klein, Abraham:** The Tamm-Dancoff formalism and the symmetric pseudoscalar theory of nuclear forces. Phys. Review, II. Ser. 90, 1101—1115 (1953).

Verf. gibt eine Behandlung des Deuteronproblems für die pseudoskalare symmetrische Mesontheorie, die von der Bethe-Salpeter-Gleichung ausgeht und diese sukzessive in eine einzeitige



Integralgleichung überführt. Man erhält dann eine einzige Integralgleichung für die „Wellenfunktion“ des Deuterons, deren Kern als Potenzreihe in der Kopplungskonstanten berechnet werden kann. Hieraus bestimmt der Verf. das adiabatische Potential 2. und 4. Näherung. Außerdem werden höhere Näherungen und Mehrkörperkräfte diskutiert. Die erhaltenen Resultate werden mit denen von Lévy (dies. Zbl. 48, 226) verglichen, der dasselbe Problem mit Hilfe der Tamm-Dancoff-Methode behandelt hat. Es wird dabei auf verschiedene Fehler in der Lévy'schen Rechnung aufmerksam gemacht. — Es ist offenbar vom Verf. nicht bemerkt worden, daß die momentane Form der Bethe-Salpeter-Gleichung nicht vollständig der Tamm-Dancoff-Gleichung äquivalent ist, da die „Wellenfunktionen“ beider Methoden sich (durch Bezugnahme auf verschiedene Vakua) unterscheiden. (Anm. d. Ref.)

H. Lehmann.

**Brueckner, K. A. and K. M. Watson:** Nuclear forces in pseudoscalar meson theory. Phys. Review, II. Ser. 92, 1023—1035 (1953).

Die Verf. untersuchen im Rahmen der symmetrischen pseudoskalaren Mesonentheorie mit pseudoskalarer Kopplung in nicht relativistischer Näherung den Einfluß der Streuung der virtuellen Mesonen und der Erzeugung von Nukleon-Paaren auf des Kernkraftpotential. Es zeigt sich, daß für Entfernungen  $< 0,5 \hbar/\mu c$  die Streuterme überwiegen und die Reihenentwicklung nicht mehr konvergiert. Für größere Entfernungen hingegen ergeben sich bekannte Resultate, die mit der experimentellen Erfahrung bei niederen Energien übereinstimmen. Für kleine  $r$  sind die Kräfte sehr groß und stark abstoßend. Da sie jedoch nicht genau bekannt sind, schlagen Verf. die Einführung eines phänomenologischen hard core (Abstoßungspotential) vor, dessen Radius zu  $0,3$  bis  $0,5 \hbar/\mu c$  geschätzt wird. Abschließend wird die Anschauung Lévy's, geschwindigkeitsabhängige Terme zweiter Ordnung könnten durch statische Potentiale vierter Ordnung ausgedrückt werden, einer Kritik unterzogen.

F. Cap.

**Ruderman, M.:** Nuclear forces from pseudoscalar meson theory. Phys. Review, I. Ser. 90, 183—185 (1953).

Eine Berechnung der Strahlungskorrektur in der Wechselwirkung zweier Nukleonen, die durch pseudoskalar gekoppelte Mesonen bewirkt wird, zeigt bei der üblichen Größe der Kopplungskonstante, wie sie durch die Experimente gefordert wird, keinen Einfluß auf die Reichweite und die Gestalt des Potentials bei großen Entfernungen vom Ursprung.

Th. Sexl.

**Arnowitz, R. and S. Deser:** Solutions of the meson-nucleon equation in the adiabatic limit. Phys. Review, II. Ser. 92, 1061 (1953).

**Klein, Abraham:** Convergence of the adiabatic nuclear potential. II. Phys. Review, II. Ser. 92, 1017—1020 (1953).

Der Verf. zeigt, daß seine in einer Vorarbeit (Teil I, dies. Zbl. 50, 441) aufgestellte Behauptung, daß die Reihe für das adiabatische Potential der pseudoskalaren Mesonentheorie in pseudoskalarer Kopplung für  $\kappa r \leq 1$  nicht konvergiere, falsch ist. Es zeigt sich vielmehr, daß für  $g^2 = 15 \cdot 4\pi$  für  $\kappa r > 985$  Konvergenz besteht.

F. Cap.

**Wentzel, G.:** Recoil corrections in strong coupling meson theory. Phys. Review, II. Ser. 92, 173—177 (1953).

Verf. untersucht, wie die übliche statische Mesonentheorie mit starker Kopplung bei Berücksichtigung nichtrelativistischer Nukleonen-Rückstöße abzuändern ist. Da man für sehr große Nukleonenmassen wieder die übliche statische Starke-Kopplung-Theorie erhalten muß, muß der übliche Abschneideprozeß beibehalten werden. Verf. untersucht das neutrale  $PS - PS$ -Feld und geht nur am Schluß kurz auf das symmetrische Feld ein, über welches eine weitere Arbeit angekündigt wird. Es zeigt sich, daß die Berücksichtigung der Nukleon-Rückstöße an der üblichen statischen Theorie beim neutralen (und symmetrischen) Feld praktisch nichts ändert. Nur für die  $D$ -Streuwellen (Meson am Nukleon gestreut) ergeben sich neue Verhältnisse.

F. Cap.

**Kaufman, Allan N.:** Strong coupling theory of meson scattering. Phys. Review, II. Ser. 92, 468—481 (1953).

Während alle bisherigen Arbeiten zur Theorie der starken Kopplung nach dem ersten Glied abbrechen, führt Verf. die Entwicklung um ein weiteres Glied, bis  $g^{-2}$  weiter. Verf. betrachtet im Rahmen der geladenen skalaren Mesonentheorie die gewöhnliche und Ladung austauschende Streuung von  $\pi^{\pm}$  an Nukleonen. Hierbei wird insbesondere die Wirkung der isobaren Zustände des Nukleons auf den Streuprozess beachtet. Die abgeleiteten differentiellen Wirkungsquerschnitte werden mit experimentellen Ergebnissen nicht verglichen, da ja bei letzteren pseudoskalare Mesonen auftreten.

*F. Cap.*

**Lanza, G.:** Sulla sezione d'urto totale di scattering mesone-nucleone. Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari 22, 58—62 (1953).

**Francis, N. C. and K. M. Watson:** The elastic scattering of particles by atomic nuclei. Phys. Review, II. Ser. 92, 291—303 (1953).

Nach dem „optical model“ kann die elastische Streuung von Teilchen auf die Lösung einer Schrödingergleichung zurückgeführt werden, welche ein Wechselwirkungspotential enthält, das nur von den Koordinaten des einfallenden Teilchens relativ zum Schwerpunkt des Kerns abhängt. Besitzen einfallendes Teilchen und streuender Kern einen Spin, so hängt das Potential auch von ihnen ab, aber nicht von individuellen Koordinaten der den Kern zusammensetzenden Neutronen und Protonen. Auf diese Weise wird das Mehrkörperproblem, das ja die Streuung darstellt, auf ein Zweikörperproblem zurückgeführt. Da in vielen Fällen die Auffindung eines entsprechenden Zweikörperersatzpotentials einfacher ist als die direkte Behandlung einer Mehrkörper-Schrödingergleichung, wurde diese Methode häufig benutzt (Breit, Bethe, Feshbach, Serber etc.). Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist die Untersuchung des Zusammenhangs zwischen dem optischen Ersatzmodell und dem Mehrkörperproblem. Es wird ein expliziter Ausdruck für das Ersatzpotential in Abhängigkeit von den Streuamplituden, die das einfallende Teilchen an den den Kern zusammensetzenden Neutronen und Protonen erfährt, gegeben.

*Th. Seel.*

**Henley, E. M. and M. A. Ruderman:** Nuclear forces from  $p$ -wave mesons. Phys. Review, II. Ser. 92, 1036—1044 (1953).

Da die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung von der Meson-Nukleon-Streumatrix abhängt, berechnen die Verff. unter Verwendung des Modells von Chew [Phys. Review, II. Ser. 89, 591—593 (1953)] und der Feynman-Dyson-Methodik diese Matrix für  $p$ -Mesonen. Die Korrekturterme zweiter und vierter Ordnung für die Kernkräfte werden abgeschätzt. Es zeigt sich, daß die von den Verff. vorgenommenen Vernachlässigungen von Zuständen, bei denen drei oder mehr vom emittierenden Nukleon nicht wieder absorbierte Mesonen vorhanden sind, nicht gerechtfertigt ist. Für die Kernkräfte ergeben sich durch diese Arbeit kaum wesentliche Änderungen, da sich der Einfluß dieser Rechnungen auf reale Mesonen weit mehr auswirkt als auf virtuelle.

*F. Cap.*

**Gatto, R.:** On the scattering of  $\mu$ -mesons by nuclei. Nuovo Cimento, Ser. IX 10, 1559—1581 (1953).

Um die abnorm großen Wirkungsquerschnitte der  $\mu$ -Mesonstreuung an Kernen erklären zu können, betrachtet Verf. den Einfluß der elektromagnetischen Korrekturen. Insbesondere wird der inkohärente Streuwirkungsquerschnitt abgeschätzt und untersucht, inwieweit verschiedene Kernmodelle die Überlegungen beeinflussen. Es zeigt sich, daß die inkohärente Streuung die großen Wirkungsquerschnitte nicht zu erklären vermag.

*F. Cap.*

**Jouvin, Jacqueline:** Sur l'estimation du paramètre de forme du spectre d'énergie des électrons de désintégration des mésons  $\mu$ . C. r. Acad. Sci., Paris 237, 153—156 (1953).

Für das Energiespektrum der Zerfallselektronen des  $\mu$ -Mesons wurde von Michel [Nature 163, 959—960 (1949) und dies. Zbl. 36, 276] eine Formel mit einer unbestimmten Parameter  $\rho$  angegeben. Durch eine Transformation wird die Formel in eine der experimentellen Energiemessung angepaßte Form gebracht. Dadurch wird eine Abschätzung von  $\rho$  aus der Messung ermöglicht.

*K.-H. Höcker.*

**Espagnat, Bernard d':** La section efficace de la réaction  $p(\pi^+, 2\pi^+)n$  au voisinage du seuil. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 139—141 (1953).



Das in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 50, 442) des Verf. abgeleitete Matrixelement wird zur Berechnung des Wirkungsquerschnittes für die Reaktion  $p(\pi^+, 2\pi^+)n$  in der Umgebung der Schwelle verwendet. Es wird die Heitlersche Gleichung des Problems näherungsweise gelöst.

*P. Urban.*

**Fabri, E.: Teoria semiclassical della diffusione dei mesoni  $\pi$  su nucleoni.** Nuovo Cimento, Ser. IX 10, 1367—1374 (1953).

In Erweiterung der klassischen Theorie von Pauli (Pauli, Meson theory of nuclear forces, New York 1946; Feldman, dies. Zbl. 47, 223; Wada, dies. Zbl. 47, 450) wird nach einer Fouriertransformation eine Art differentieller Wirkungsquerschnitt für die Streuung von  $\pi^\pm$  und  $\pi^0$  an  $n$  bzw.  $p$  abgeleitet. Die Genauigkeit der verwendeten Näherung wird diskutiert. Bei der Interpretation der Resultate ergeben sich gewisse Schwierigkeiten, da die Ladung nicht quantisiert wird; immerhin stimmen jedoch die gewonnenen Wirkungsquerschnitte mit den quantentheoretischen Resultaten gut überein.

*F. Cap.*

**Wada, W. W.: Scattering of mesons by complex nuclei.** Phys. Review, II. Ser. 92, 152—155 (1953).

Unter Verwendung der Ergebnisse einer Vorarbeit (dies. Zbl. 47, 450) und eines — bezüglich seiner Anwendbarkeit ausführlich diskutierten — klassisch optischen Modells des Atomkerns diskutiert Verf. die Streuung von  $\pi$ -Mesonen an Atomkernen. Es zeigt sich, daß ein solches Modell dann verwendbar ist, wenn die Wellenlänge der Mesonen groß ist gegenüber dem durchschnittlichen Abstand zwischen den Nukleonen. Verf. leitet eine der Lorenz-Lorentz'schen Formel der Optik analoge Formel für den Brechungsindex der Mesonenwellen im kontinuierlich gedachten Kernmedium ab: Schließlich werden die Absorptions- und Streuwirkungsquerschnitte berechnet und mit experimentellen Daten verglichen. Verf. findet gute Übereinstimmung.

*F. Cap.*

**Austern, N.: Evaluation of the interaction effect in  $n$ - $p$  capture.** Phys. Review, II. Ser. 92, 670—674 (1953).

**Komoda, Toshiya and M. Sasaki: On the proton-neutron interaction.** Progress theor. Phys. 9, 468 (1953).

Verf. behandelt das Deuteron (Annahme:  $E = 2,237$  MeV,  $m_\pi = 273 m_e$ ; Berechnung des magnetischen Momentes und des Quadrupolmomentes) mit dem phänomenologischen Ansatz:

$$V(r) = \frac{1}{2} (\tau_1 \tau_2) V_0 (J + \gamma' S_{12} J/\kappa r) e^{-r\kappa}/\kappa r$$

wo  $\gamma'$  ein Parameter. Es zeigt sich, daß ein „zero cut off“ schlechte Ergebnisse (Abschneideradius zu groß, Quadrupolmoment zu klein), ein „hard core“ (vermutlich unendlich, wie bei Jastrow?) vernünftige Resultate ergibt.

*F. Cap.*

**Solmitz, F. T.: Proton-proton scattering for a nucleon isobar model.** Phys. Review, II. Ser. 92, 164—172 (1953).

Die Proton-Proton-Streuung bei sehr hohen Energien wird auf Grund einer Wechselwirkung berechnet, welche angeregte Nukleonenzustände zu berücksichtigen gestattet. Die erhaltenen Resultate für die Singulett- und Triplett-Streuquerschnitte sind im Widerspruch zur Erfahrung.

*Th. Sexl.*

**Belinfante, Frederik J.: Pions from production of baryons by protons.** Phys. Review, II. Ser. 92, 145—152 (1953).

Treffen Nukleonen mit höherer Energie als 600 MeV (im Laboratoriumssystem) auf Nukleonen oder Kerne auf, so können Nukleon-Isobare (Baryonen) vom Spin  $3/2$ ,  $5/2$  etc. entstehen. Verläßt ein solches Baryon innerhalb seiner Lebensdauer von ca.  $10^{-22}$  sec die Pionenwolke, mit der es gleichzeitig erzeugt wurde, so ist sein Zerfall in ein Nukleon und ein Pion als ein von der  $\pi$ -Meson-Erzeugung unabhängiger Vorgang anzusehen. Verf. berechnet nun unter Annahme der Ladungsunabhängigkeitshypothese der Kernkräfte die Wirkungsquerschnitte für die Erzeugung und den späteren  $\pi$ -Mesonenzerfall der Baryonen. Unter der Annahme, daß das Spin- $3/2$ -Baryon die vier isobaren Zustände  $b^{++}$ ,  $b^+$ ,  $b^0$ ,  $b^-$  besitzt, werden die Erzeugungsprozesse

$$\begin{array}{llll} p + p \rightarrow n + b^{++}, & p + n \rightarrow n + b^+, & p + p \rightarrow p + b^+, & p + n \rightarrow p + b^0, \\ p + p \rightarrow b^{++} + b^0, & p + n \rightarrow b^{++} + b^-, & p + p \rightarrow b^+ + b^+, & p + n \rightarrow b^+ + b^0, \end{array}$$

und die Zerfallsarten

$$b^{++} \rightarrow p + \pi^+, \quad b^0 \begin{cases} \nearrow n + \pi^0 \\ \searrow p + \pi^- \end{cases}, \quad b^+ \begin{cases} \nearrow n + \pi^+ \\ \searrow p + \pi^0 \end{cases}, \quad b^- \rightarrow n + \pi^-,$$

betrachtet und diskutiert. Numerische Werte für die Wirkungsquerschnitte können mangels gewisser Matrixelemente nicht angegeben werden. Schließlich wird noch die Erzeugung des 5/2-Spin-Baryons z. B.  $p + p \rightarrow b^{++} + \bar{b}^-$  erwähnt, welches Teilchen durch Prozesse Nukleon + Nukleon  $\rightarrow$  Nukleon +  $\bar{b}$  nicht erzeugt werden und durch  $\bar{b} \rightarrow$  Nukleon +  $\pi$  nicht zerfallen kann. — Im Anhang findet sich eine Tabelle über die Vektoraddition von Spins. *F. Cap.*

**Ono, Ken-ichi:** The theory of  $V$ -particles. Progress theor. Phys. 9, 524—528 (1953).

**Nishijima, Kazuhiko:** Models of  $V$ -particles. Progress theor. Phys. 9, 414—430 (1953).

Die möglichen Zerfalls-Schemata der  $V^0$ -Teilchen in Rahmen der heutigen experimentellen und theoretischen Kenntnisse werden diskutiert. Es besteht die Schwierigkeit, die relativ reichliche Erzeugung der  $V$ -Teilchen in Kernstößen zusammen mit ihrer langen Lebensdauer zu verstehen. Nachdem die bis heute vorgeschlagenen Modelle in negativem Sinne diskutiert worden sind, schlägt Verf. die Einführung eines dazwischen auftretenden neutralen Teilchens  $X$  vor, das direkt in Kernstößen erzeugt wird und das selbst in  $V^0$ -Teilchen zerfällt:

$$N + N \xrightarrow{g_1} X + X \xrightarrow[g_2]{g'_2} V^0 + \dots; \quad V^0 \xrightarrow{g_3} p + \pi^-,$$

wo die Kopplungskonstanten  $g_1$  und  $g'_2$  groß im Verhältnis zu  $g_3$  und  $g'_2$  groß im Verhältnis zu  $g'_2$  sind. Es scheint im allgemeinen, daß das Verhalten der neuen Teilchen nur mit sehr komplizierten Annahmen im Rahmen der heutigen theoretischen Kenntnisse dargestellt werden kann.

*P. Budini.*

● **Massey, H. S. W.:** Atoms and energy. (Science in Action, I.) London: Elek Books, Ltd. 1953. 174 p. 16 s.

Cet ouvrage constitue une excellente mise au point pour le grand public non spécialisé sur les aspects scientifiques plutôt que techniques de la physique nucléaire et sur ses possibilités d'applications. Après avoir montré comment protons, neutrons et électrons peuvent s'associer pour constituer les noyaux, puis les atomes, comment la réunion de ceux-ci forme les molécules et l'origine de l'énergie chimique, H. S. W. Massey décrit les mécanismes physiques par lesquels on peut espérer libérer l'énergie nucléaire. Ceci conduit à un exposé sommaire sur les phénomènes de fission et de la technique de production des explosifs nucléaires. Mais l'énergie atomique peut aussi être mise au service de l'homme. M. Massey insiste sur les applications déjà réalisées et sur leurs possibilités d'avenir moyennant un contrôle international convenable. L'ouvrage se termine par un chapitre sur l'orientation actuelle de la physique atomique, et notamment sur les recherches portant sur les rayons cosmiques et la physique des mésons.

*G. Petiau.*

**Inglis, D. R.:** Energy levels and the structure of light nuclei. Reviews modern Phys. 25, 390—450 (1953).

**Swan, P.:** On the existence of a bound state of  $^4\text{H}$ . Proc. phys. Soc., Sect. A 66, 1066—1076 (1953).

**Salpeter, E. E. and J. S. Goldstein:** Momentum space wave functions. II. The deuteron ground state. Phys. Review, II. Ser. 90, 983—986 (1953).

In Fortsetzung einer früheren Arbeit (E. E. Salpeter, dies. Zbl. 44, 428) bestimmen die Verf. nach einem dort angegebenen Iterationsverfahren den tiefsten Eigenwert und die zugehörige Eigenfunktion des Deuteronproblems in statischer Näherung. Die Rechnungen beziehen sich auf die Schrödingergleichung im Impulsraum bei Vorgabe zentralsymmetrischer Potentiale.

*H. Lehmann.*

**Malenka, B. J.:** Theory of high-energy deuteron pickup. Phys. Review, II. Ser. 92, 516 (1953).

**Ramsey, N. F., B. J. Malenka and U. E. Kruse:** Polarizability of the deuteron. Phys. Review, II. Ser. 91, 1162—1164 (1953).

Da die Bestandteile eines Deuteronen nicht das gleiche Verhältnis Ladung zu



Masse besitzen, ist es in einem äußeren homogenen elektrischen Felde polarisierbar. Läßt man eine Tensorkraft zwischen Neutron und Proton zu, betrachtet den Grundzustand in üblicher Weise als 4proz. Beimischung eines  ${}^3D_1$ -Zustandes zu einem  ${}^3S_1$ -Zustand und setzt das Störungspotential zu  $-ezE/2$  an ( $z$  = Komponente der Relativ-Entfernung Neutron-Proton in Richtung der elektrischen Feldstärke  $E$ ), so ergibt sich die Polarisierbarkeit  $\alpha$  in Abhängigkeit von einer magnetischen Quantenzahl  $m$  in bezug auf die Richtung des elektrischen Feldes zu  $\alpha_{SS} + (3m^2 - 2)\alpha_{SD} + (3m^2 - 2)^2\alpha_{DD}$ . Unter der speziellen Voraussetzung von Hulthén'schen Wellenfunktionen für den Grundzustand  $u(r) = N(e^{-\gamma r} - e^{-\epsilon r})$  ergibt sich  $\alpha_{SS} \sim 0,6 \cdot 10^{-39}$  und  $\alpha_{SD} \sim 0,03 \cdot 10^{-39} \text{ cm}^3$ . Eine physikalische Anwendung auf die Streuung von 8 MeV Deuteronen an Bi zeigt, daß die Rutherford-Streuung in der Rückwärtsrichtung infolge der Polarisierbarkeit des Deuterons um 3% herabgemindert wird.

*Th. Seel.*

**Friedman, F. L. and W. Toboeman:** An approximate wave-mechanical description of deuteron stripping. Phys. Review, II. Ser. 92, 93—100 (1953).

Unter dem Prozeß „deuteron-stripping“ versteht man das Abstreifen eines der Bestandteile des Deuterons und die alleinige Wechselwirkung desselben bei einer Reaktion mit einem Kern des Streufohlenmaterials, während der andere Bestandteil mit der ihm im Deuteron eigenen Geschwindigkeit weiterläuft. Die Wirkungsquerschnitte derartiger Prozesse wurden bisher auf Grund der Bornschen Näherungsmethode mit sehr roh angenäherten Wellenfunktionen berechnet. Erst in jüngster Zeit wurden strengere wellenmechanische Methoden verwendet, und es zeigte sich ein entscheidender Einfluß der Winkelverteilung des in Freiheit gesetzten Teilchens von der Azimutalquantenzahl des abgestreiften Teilchens. Die Verf. verfeinern die Betrachtungen derartig, daß Wellenfunktionen benützt werden, welche Randbedingungen an der Oberfläche des reagierenden Kerns für das abgestreifte Teilchen benützen. Dadurch werden Beziehungen zur üblichen Theorie der Kernreaktionen auf Grund des Einkörpermodells gewonnen. Auch ein Vergleich mit experimentell gewonnenen Winkelverteilungskurven der Neutronen bei der Reaktion  ${}^{24}\text{Mg}(d, n){}^{25}\text{Al}$  wird durchgeführt.

*Th. Seel.*

**Foldy, Leslie L.:** Matrix elements for the nuclear photoeffect. Phys. Review, II. Ser. 92, 178—188 (1953).

Die Wechselwirkung von Kernen mit einem elektromagnetischen Feld wird rein phänomenologisch formuliert, und Ausdrücke für die Matrixelemente des Kernphotoeffekts werden entwickelt. Die dabei wesentlichste Voraussetzung ist, daß Ladungs- und Stromdichten für den Kern allein durch Kernparameter ohne Berücksichtigung des Hereinspielens virtueller Mesonen ausdrückbar sind. Die Ausdrücke für die Matrixelemente werden dabei in einer bereits über alle Kernmultipole aufsummierten Form gegeben.

*Th. Seel.*

**Reifman, A.:** Wechselwirkung zwischen Nukleonenbewegung und Oberflächenschwingungen der Kerne beim Kernphotoeffekt. Z. Naturforsch. 8a, 505—522 (1953).

Es wird ein Kernmodell beschrieben, in dem sich die Teilchen zunächst unabhängig voneinander in einem gemeinsamen Potentialtopf bewegen, eine gegenseitige Wechselwirkung jedoch dadurch zustande kommt, daß die Oberfläche des Potentialtopfes von der Bewegung der Einzelnukleonen abhängt. Durch die Änderungen der Randbedingung für die Nukleonen ergibt sich so eine Wechselwirkungsenergie zwischen Oberflächenschwingungen und Nukleonenbewegung. Mit ihrer Hilfe werden die Matrixelemente für Entstehung und Vernichtung von Oberflächenschwingungsquanten bei gleichzeitiger Änderung eines Nukleonenzustandes ermittelt. Sie liefern größenordnungsmäßig richtige Werte für die Breiten der  $(\gamma, n)$  Resonanzen und ermöglichen so ein Verständnis der Dämpfung. Im 2. Teil der Arbeit werden aus dem einfachen Modell der unabhängigen Teilchen die Resonanzstellen errechnet und Übereinstimmung mit den experimentellen Daten gefunden.

*B. Stech.*

**Marx, G.:** Über die Dilatationsschwingungen der Atomkerne. Acta phys. Acad. Sci. Hungar. 3, 1—10 (1953).

Verf. berechnet die Dilatationsschwingungen eines Atomkernes unter Zugrundelegung des Flüssigkeitströpfchenmodells. Die Schwingungsgleichung ergibt sich in

bekannter Weise als lineare Näherung aus den Eulerschen Gleichungen der Hydrodynamik und der Kontinuitätsgleichung. Unter Verwendung der von verschiedenen Verfassern berechneten Kompressibilität der „Kernflüssigkeit“ läßt sich dann die Frequenz der verschiedenen Dilatationsschwingungen und damit aus der Energie-Frequenz-Beziehung der Quantenmechanik die Anregungsenergie bestimmen. Die Ergebnisse zeigen, daß oberhalb 10 MeV eine Vernachlässigung der Dilatationsschwingungen nicht möglich ist. *G. Ecker.*

**Süßmann, G.:** Die Energieverteilung der  $\alpha$ -Teilchen bei der Kernverdampfung unter der Berücksichtigung der Spaltung I. *Z. Naturforsch.* 8a, 404—416 (1953).

Um das Auftreten sehr energiearmer  $\alpha$ -Teilchen zu erklären, wird die Kernverdampfung und die Auswirkung einer Kernspaltung von Br- und Ag-Kernen in der photographischen Emulsion diskutiert. Grundlage der Diskussion ist die Berechnung des Energiespektrums des Verdampfungsprozesses, der Verdampfungs- und Spaltwahrscheinlichkeit. Der hoch angeregte Kern wird nacheinander einzelne Nukleonen und kleinere zusammengesetzte Partikel mit bestimmtem Energiespektrum emittieren. Zwischendurch kann eine Spaltung eintreten (Heisenberg, unveröffentlicht). Deren Wahrscheinlichkeit ist ungefähr  $\frac{1}{2}$ . Die von einem Spaltprodukt abgedampften Protonen und  $\alpha$ -Teilchen haben ein wesentlich flacheres Energiespektrum und beginnen bei niederen Energien. *K.-H. Höcker.*

**Gilles, J. M.:** Sur une variante possible du cycle de Bethe-Weizsäcker. *Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci.*, V. Sér. 39, 196—204 (1953).

**Devaney, Joseph J.:** Theory of alpha decay. I. *Phys. Review*, II. Ser. 91, 587—593 (1953).

Die Theorie von Feshbach, Weisskopf und Peaslee über die nukleonischen Resonanzphänomene wird auf das Problem des  $\alpha$ -Zerfalls übertragen. So können Formeln abgeleitet werden, in denen keine speziellen Kernmodell-Annahmen stecken; benötigt wird lediglich die logarithmische Ableitung  $j$  (des „emittierten“  $\psi$  am Kernrand) als Funktion der Energie  $W$ . Die bisherigen Theorien des  $\alpha$ -Zerfalls sind demzufolge in dieser enthalten. Mit Hilfe einer plausibeln Näherungsannahme ( $\arctg(c_1 f) \approx c_2 W$ ) kommt Verf. zu einem relativ einfachen Resultat, das mit der Erfahrung verglichen werden kann; letzteres soll in Teil II durchgeführt werden. *G. Süßmann.*

**Benoist-Gueutal, P.:** Contribution à l'étude théorique de la radioactivité  $\beta$  et de la capture  $E$ : Intervention du cortège électronique. *Ann. de Physique*, XII. Sér. 8, 593—645 (1953).

Kritik der verschiedenen Rechnungen über die Elektronendichten im Atom, insbes. in der  $K$ - und  $L$ -Schale. Dann wird die Wahrscheinlichkeit des Übergangs von einem Hüllenelektron in den Kern in Abhängigkeit von der jeweiligen chemischen Bindung des einfangenden Atoms diskutiert. Der Einfluß ist beträchtlich bei leichten Atomen; er nimmt mit zunehmender Kernladung ab. Die Emission von  $\beta$ -Strahlen durch den Atomkern wird dagegen wenig beeinflusst. Die Formeln gestatten, die Wahrscheinlichkeit der Anregung und Ionisation des Endkerns abzulesen. *K.-H. Höcker.*

**Pfirsch, Dieter:** Der Zusammenhang zwischen der Theorie der Kernspaltung und der Theorie der Kernquadrupolmomente. *Z. Phys.* 135, 593—601 (1953).

Zur Erklärung der Kernquadrupolmomente nach der Theorie des Verf. wird eine viel kleinere Deformierbarkeit der Kerne benötigt als in der Bohr-Wheelerschen Theorie der Kernspaltung. Um diese Diskrepanz aufzuklären, wird dargelegt, daß im nichtangeregten Zustand, in welchem das Pauliprinzip Stöße der Nukleonen untereinander verhindert, die Deformierbarkeit des Kerns hauptsächlich durch die Unschärferelation bestimmt ist, im angeregten Zustand jedoch, also z. B. bei der Kernspaltung, allein von der Oberflächenspannung und Coulombkraft herrührt. Im letzteren Falle ist nämlich die freie Weglänge der Nukleonen nicht mehr groß



gegen Kerndimensionen, der Einfluß des Pauliprinzipts wird kleiner, und zahlreiche Stöße der Nukleonen untereinander sind möglich.

*B. Stech.*

**Gatto, R.: Sul contributo delle forze tensoriali ai momenti di quadrupolo dei nuclei pesanti.** Nuovo Cimento, Ser. IX 10, 1311—1324 (1953).

Verf. untersucht, welchen Beitrag die Tensorkräfte zu den Quadrupolmomenten der schweren Kerne liefern. Es zeigt sich, daß die Tensorkraft  $S_{12}$  der Mesonentheorie keine sehr großen Quadrupolmomente bei schweren Kernen erzeugt, solange die Sättigungsbedingungen erfüllt sind. Als Wechselwirkungssatz wird  $V = \frac{1}{3} (\tau_1 \tau_2) \cdot [(\sigma_1 \sigma_2) + \gamma S_{12}] J(r)$  und für niedere Energie  $V = -(1 + \gamma S_{12}) J(r)$  verwendet.  $J(r)$  wird erst verhältnismäßig spät im Gang der Rechnung zu  $J = J_0 e^{-ar^2}$  spezialisiert; die Kernkrafttheorie ist also eigentlich phänomenologisch.

*F. Cap.*

**Volkoff, G. M.: Second order nuclear quadrupole effects in single crystals.** I. Canadian J. Phys. 31, 820—836 (1953).

Das Ergebnis von Rechnungen über die Wechselwirkung elektrischer Kernquadrupole mit den in Einkristallen am Kernort vorliegenden elektrischen Feldgradienten wird mitgeteilt. Die durch die Wechselwirkung erzeugte Linienaufspaltung und Verschiebung der magnetischen Kernresonanz werden in Abhängigkeit von der Orientierung des Kristalls gegen das Magnetfeld bis zur zweiten, teilweise bis zur dritten Ordnung berechnet. Es wird gezeigt, wie aus Fourier-Zerlegungen der Winkelabhängigkeit von Aufspaltung und Verschiebung die Quadrupolkopplungskonstante, die Lage der Hauptachsen des Feldgradienten-Tensors und dessen Abweichung von der Rotationssymmetrie bestimmt werden. Eine Methode zur Bestimmung des Kernspins aus den Linienverschiebungen wird als Ergänzung der sonst üblichen Methode des Abzählens der Linienkomponenten vorgeschlagen.

*W. Humbach.*

**Ayant, Yves, Maurice Buyle-Bodin et François Lubeat: Effet du phénomène de semi-rotation sur la résonance quadrupolaire.** C. r. Acad. Sci., Paris 237, 1511—1513 (1953).

**Belinfante, F. J.: Intrinsic magnetic moment of elementary particles of spin 3/2.** Phys. Review, II. Ser. 92, 997—1001 (1953).

Die Fierz-Paulische Theorie für Spin-3/2-Teilchen (dies. Zbl. 23, 430) wird so formuliert, daß die Feldgleichung eine gewisse Ähnlichkeit zur Dirac-Gleichung für Spin-1/2-Teilchen erhält. Die explizite relativistische Invarianz geht dabei allerdings verloren. Die Feldgleichung (mit Einschluß eines äußeren elektromagnetischen Feldes) wird danach in nichtrelativistischer Näherung geschrieben, so daß die Größe des magnetischen Momentes  $\mu$  eines dieser Gleichung genügenden, langsam bewegten Teilchens explizit erscheint. Sind  $q$  und  $m$  dessen Ladung und Masse, so erhält man:  $\vec{\mu} = (q/3mc) \hbar \vec{S}$ .  $\hbar \vec{S}$  ist hierbei der Spin-Operator des Teilchens. Es ergeben sich also ein gyromagnetisches Verhältnis von  $q/3mc$  sowie ein maximales magnetisches Moment (in einer Komponente) von  $q\hbar/2mc$ .

*G. Heber.*

**Belinfante, F. J.: Magnetic moments of neutron and proton.** Phys. Review, II. Ser. 92, 994—997 (1953).

Kritische Diskussion zweier Arbeiten (R. G. Sachs, dies. Zbl. 47, 225; M. Sugawara, dies. Zbl. 48, 228), welche in halbphänomenologischer Weise ein Verständnis der magnetischen Momente von Proton und Neutron anstreben. Dabei wird vor allem auf das magnetische Moment der  $\pi$ -Mesonen-Wolken und eventueller angeregter Zustände der Nukleonen geachtet.

*G. Heber.*

**Bethe, H. A., L. Maximon und F. Low: Bremsstrahlung at high energies.** Phys. Review, II. Ser. 91, 417—418 (1953).

**Fano, U.: Degradation and range straggling of high-energy radiations.** Phys. Review, II. Ser. 92, 328—349 (1953).

Verf. führt die Berechnung des Energieverlustes eines ionisierenden Teilchens

beim Durchgang durch Materie durch. Man fragt nach dem Energiespektrum, das die Teilchen einer monochromatischen Quelle hinter dem Materieblock aufweisen. Vergleich mit den Ergebnissen anderer Autoren insbesondere bei Mesonen und schwereren Teilchen. *K.-H. Höcker.*

**Knipp, Julian K., Tetsuo Eguchi, Masao Ohta and Shozo Nagata:** Ionization of gas by electrons. *Progress theor. Phys.* **10**, 24—30 (1953).

**Fujimoto, Yoichi, Satio Hayakawa and Kazuhiko Nishijima:** Theory of rearrangement collisions. *Progress theor. Phys.* **10**, 113—114 (1953).

**Budini, P. e L. Taffara:** Sulla ionizzazione e sulla radiazione di Čerenkov. *Nuovo Cimento, Ser. IX* **10**, 1489—1492 (1953).

Es werden Formeln für Ionenbildung, Anregung und Ausstrahlung aus einer früheren Arbeit (P. Budini, dies. Zbl. **50**, 440) speziell für Wasserstoff diskutiert. *K.-H. Höcker.*

**Sternheimer, R. M.:** The energy loss of a fast charged particle by Čerenkov radiation. *Phys. Review, II. Ser.* **91**, 256—265 (1953).

Die Energie, die ein relativistisches Teilchen bei Stößen mit einem Stoßparameter größer als  $b$  in einem bestimmten Medium verliert, wird bei der Fermischen Methode als Strom des Poynting-Vektors des Feldes des Teilchens durch eine Zylinder-Oberfläche vom Radius  $b$  gegeben. Verf. wendet die Fermische Formel im Falle einer bestimmten Ionisationsspur an, setzt für  $b$  den tatsächlichen Radius der Spur (z. B. im Falle einer Photoemulsion den Radius eines AgBr-Kornes) und interpretiert die so gefundene Energie als Energie der emittierten Čerenkov-Strahlung. Numerische Resultate für verschiedene Einzelfälle werden angegeben. *P. Budini.*

**Mandò, M. e P. G. Sona:** Sull'applicabilità del concetto di percorso per l'assorbimento dei muoni sotto terra. *Nuovo Cimento, Ser. IX* **10**, 1275—1287 (1953).

Es ist im allgemeinen nicht zulässig, aus dem Spektrum energiereicher  $\mu$ -Mesonen auf Meereshöhe mittels Reichweiteformeln auf das Spektrum in großen Tiefen zu schließen, da die Strahlungsverluste eine Verzerrung bewirken. In dem speziellen Fall, wo ein Potenzspektrum (mit dem Exponenten  $-3$ ) vorliegt, gibt die Umrechnung über die Reichweite näherungsweise richtige Werte. Korrekturen werden ausgerechnet. *K.-H. Höcker.*

**Spencer, L. V. and Charles Wolff:** Penetration and diffusion of hard X-rays. Polarization effects. *Phys. Review, II. Ser.* **90**, 510—514 (1953).

Wenn man die Streuung und Absorption der Röntgenstrahlen in Materie berechnet, ist es üblich, die Polarisation der gestreuten Photonen zu vernachlässigen. In dieser Arbeit wird die Wirkung der Polarisation auf die Absorption berücksichtigt. Die Boltzmann-Gleichung für Photonen wird nach Kugelfunktionen entwickelt und numerisch gelöst. Als Wirkung der Polarisation ergibt sich eine Reduktion der Absorption der 100—200 keV-Photonen um etwa ein bis zwei Prozent. *P. Budini.*

**Gamba, A.:** The number of independent components of tensors in symmetrical systems. *Nuovo Cimento, Ser. IX* **10**, 1343—1344 (1953).

**Okuń, L. B.:** Zur Theorie der Paarbildung beim Zusammenstoß schwerer Teilchen. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* **89**, 833—835 (1953) [Russisch].

**Johnson, John L. and J. L. McHale:** The calculation of the half-widths of one-body resonances. *Phys. Review, II. Ser.* **91**, 87—89 (1953).

**Amaldi, E., L. Mezzetti and G. Stoppini:** On the longitudinal development of air showers according to Fermi's theory of meson production. *Nuovo Cimento, Ser. IX* **10**, 803—816 (1953).

**Messel, H. and R. B. Potts:** Longitudinal development of extensive air showers. *Nuovo Cimento, Ser. IX* **10**, 754—778 (1953).

**Stroffolini, R.:** Sul contributo alla componente elettronica della radiazione cosmica nell'atmosfera derivante dal decadimento delle particelle  $\mu$ . *Nuovo Cimento, Ser. IX*, **10**, 300—306 und engl. Zusammenfassg. 307 (1953).



Verf. berechnet die Elektronen-Komponente der kosmischen Strahlung in der Luft, die durch Zerfall der  $\mu$ -Mesonen erzeugt wird. Die von Bhabha und Chakrabarty gegebenen Lösungen der Kaskaden-Gleichungen werden angewandt. Die Resultate werden mit früheren Rechnungen und mit den Experimenten verglichen.

*P. Budini.*

**Torrey, H. C.: Nuclear spin relaxation by translational diffusion.** Phys. Review, II. Ser. 92, 962—969 (1953).

L'A. précise la théorie générale de la relaxation des spins nucléaires de Bloembergen, Purcell et Pound [Phys. Review, II. Ser. 73, 679 (1948)] en étudiant la relaxation due aux mouvements des spins voisins considérés comme résultant d'un processus de marche au hasard dont la diffusion n'est que la limite macroscopique. L'introduction des paramètres  $\langle r^2 \rangle$ , moyenne du carré du libre parcours, et  $\tau$  durée moyenne d'un parcours, dans la description du phénomène de relaxation, est plus générale que celle du paramètre  $D = \langle r^2 \rangle / 6\tau$  et conduit au moins en principe à la possibilité de mesures de ces paramètres dans certains cas. Développant les calculs dans le cas de la diffusion isotrope, l'A. examine en détail le cas où il existe une distribution de probabilité pour le libre parcours et le cas où celui-ci est constant. Le cas d'un réseau est aussi examiné et des résultats numériques sont obtenus pour un réseau cubique à faces centrées.

*G. Petiau.*

**Wangsness, R. K. and F. Bloch: The dynamical theory of nuclear induction.** Phys. Review, II. Ser. 89, 728—739 (1953).

Die dynamischen Vorgänge bei der Kern-Induktion werden vom mikroskopischen Standpunkt aus mit statistischen Methoden behandelt. Vernachlässigt wird nur die Spin-Spin-Wechselwirkung benachbarter Kerne. Der gleichzeitige Einfluß eines äußeren Feldes und der molekularen Umgebung auf einen herausgegriffenen Kern führt mathematisch zu einem System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung für die „Verteilungsmatrix“. Hieraus läßt sich der makroskopische Erwartungswert jeder Spinfunktion in seiner Zeitabhängigkeit ermitteln. Insbesondere wird untersucht, wie weit die makroskopische Kernpolarisation der ursprünglichen Blochschen Differentialgleichung genügt. Es zeigt sich, daß deren Gültigkeit nur eingeschränkt wird, wenn der Kernspin größer als eins ist und wenn zusätzlich Quadrupolrelaxation wesentlich wird. Unter gewissen näher angegebenen Bedingungen bleibt die Blochsche Gleichung aber auch in diesem Falle gültig.

*W. Oldekop.*

## **Bau der Materie:**

**Bodmer, A. R.: Nuclear scattering of electrons and isotope shift.** Proc. phys. Soc., Sect. A 66, 1041—1058 (1953).

Die elastische Streuung von Elektronen an Atomkernen und die Isotopie-Verschiebung von Spektrallinien lassen sich durch das einer Riccatischen Gleichung genügende Verhältnis der beiden Lösungen der radialen Dirac-Gleichung beschreiben, und zwar durch den Wert am Kernrand. Verf. diskutiert ein Iterationsverfahren zur Lösung der Riccatischen Gleichung. Der für praktische Zwecke genügende erste Schritt des Verfahrens wird bis auf einen Faktor durch ein (radiales) Moment der Kernladung dargestellt, dessen Ordnung vom Drehimpuls des Elektrons abhängt. Die Methode zeichnet sich durch besondere Einfachheit aus. In den physikalischen und numerischen Ergebnissen geht die Arbeit nicht über das hinaus, was auch aus den zitierten Arbeiten zu entnehmen ist.

*W. Humbach.*

**Hoerni, Jean S. and James A. Ibers: Complex amplitudes for electron scattering by atoms.** Phys. Review, II. Ser. 91, 1182—1185 (1953).

Die Verf. untersuchen die Elektronenstreuung an U- und F-Atomen bei einer Energie von 40 und 11 keV unter Verwendung komplexer Streuamplituden  $f(\theta)$ . Bei diesen Energien können Elektronenaustausch und Polarisierungseffekte vernachlässigt werden. Bei Anwendung des Verfahrens auf das  $\text{UF}_6$ -Molekül finden sie ihre Resultate in guter Übereinstimmung mit den experimentellen Werten von Bastiansen sowie Felsenfeld und Ibers (vorläufige Resultate). Die Arbeit

wurde im Anschluß an eine Arbeit von Schomaker und Glauber [Nature **170**, 290 (1952)] gemacht, welche zuerst auf die Vorteile der Verwendung komplexer Streuamplituden hingewiesen haben.  
*P. Urban.*

**Althuler, Saul:** Exchange scattering of an electron by the hydrogen atom. Phys. Review, II. Ser. **91**, 1167—1171 (1953).

Oppenheimer [Phys. Review, II. Ser. **32**, 361—376 (1928)] hat zum ersten Male die Austauschstreuung untersucht, welche bei Streuung eines Elektrons an einem neutralen Wasserstoffatom auftritt. Dasselbe Problem wurde von Mott und Massey (The theory of atomic collision, Oxford 1949, dies. Zbl. **39**, 224) nach einer wesentlich anderen Methode behandelt. Der Verf. untersucht neuerdings das Matrixelement für die Austauschstreuamplitude auf Grund der zuständigen Integralgleichung und bringt eine theoretische Rechtfertigung für das Oppenheimer'sche Verfahren. Er zeigt ferner, daß das Resultat von Mott und Massey Beiträge von der einfallenden Welle enthält, welche wegzulassen sind, um die Austauschamplituden sinngemäß zu ermitteln. In einer neueren Arbeit behandelt K. Wildermuth (dies. Zbl. **50**, 232) ebenfalls das Oppenheimer'sche Verfahren an Hand eines einfachen eindimensionalen Beispiels, das sich mathematisch verhältnismäßig leicht durchschauen läßt, um Aussagen über seinen Gültigkeitsbereich zu gewinnen. Dabei stellt sich außerdem heraus, daß man durch dieses Verfahren die Ununterscheidbarkeit gleicher Teilchen auch nicht näherungsweise berücksichtigen kann. Es wird in dieser Arbeit auch kurz diskutiert, wie man dieses Verfahren abändern muß, um der Ununterscheidbarkeit Rechnung zu tragen.  
*P. Urban.*

**Brandsen, B. H., A. Dalgarno and N. M. King:** The application of variational methods to scattering by ions. II. The distorted wave approximation and the  $1s$ - $2s$  excitation of helium ions by electron impact. Proc. phys. Soc., Sect. A **66**, 1097—1103 (1953).

**Brandsen, B. H. and A. Dalgarno:** The calculation of auto-ionization probabilities. I. Perturbation methods with application to auto-ionization in helium. II. A variational method for radiationless transitions with applications to the  $(2s)^2\ ^1S$ - $(1sk\ s)\ ^1S$  transition of helium. Proc. phys. Soc., Sect. A **66**, 904—910, 911—920 (1953).

Unter kritischer Prüfung früherer Arbeiten werden in Teil I verbesserte Methoden zur Berechnung der Autoionisierungswahrscheinlichkeiten entwickelt und zur Ermittlung dieser Wahrscheinlichkeiten für gewisse Zustände des Heliums angewendet.

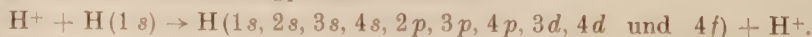
Dabei sind Integrale von der Form  $\int_0^\infty e^{-\beta r} r^n f(r) dr$  auszuwerten:  $f(r)$  ist definiert als reguläre Lösung  $F_l(r)$  der Differentialgleichung

$$(d^2/dr^2 + k^2 + 2\alpha/r - l(l+1)/r^2) F_l(r) = 0$$

mit  $F_l(0) = 0$ . In Teil II wird zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit strahlungsloser Übergänge eine Variationsmethode entwickelt und auf den  $(2s)^2\ ^1S$ - $(1sk\ s)\ ^1S$ -Übergang des Heliums angewendet. Die Identifizierung gewisser ultravioletter Heliumlinien wird untersucht.  
*E. Kreszsig.*

**Bates, D. R. and A. Dalgarno:** Electron capture. III. Capture into excited states in encounters between hydrogen atoms and fast protons. Proc. phys. Soc., Sect. A **66**, 972—976 (1953).

[Teil I und II, Proc. phys. Soc., Sect. A **65**, 919 (1952); **66**, 173 (1952).] Die Verff. behandeln im Teil III den Elektroneneinfang. Es werden die Wirkungsquerschnitte für folgende Elektroneneinfangprozesse ermittelt:



Diese Wirkungsquerschnitte werden benutzt, um die Bruchteile  $f_\alpha$  und  $f_\beta$  der Gesamteinfangszahl zu bestimmen, die Anlaß zur Emission von  $H_\alpha$ - und  $H_\beta$ -Linien geben. Die graphische Darstellung dieser Resultate erfolgt in einem Diagramm, in welchem die Bruchteile  $f_\alpha$  und  $f_\beta$  als Funktion des Logarithmus der Energie der einfallenden Protonen aufgetragen sind. Es zeigt sich, daß ausgeprägte Maxima bei  $f_\alpha = 0.050$  resp.  $f_\beta = 0.015$  auftreten, für eine Stoßenergie von etwa 70 keV.

*P. Urban.*



**Bates, D. R. and G. Griffing: Inelastic collisions between heavy particles. I. Excitation and ionization of hydrogen atoms in fast encounters with protons and with other hydrogen atoms.** Proc. phys. Soc., Sect. A **66**, 961—971 (1953).

Die Verff. berechnen, unter Verwendung der Bornschen Näherungsmethode, die Wirkungsquerschnitte für unelastische Stöße schwerer Partikel. Im vorliegenden ersten Teil behandeln sie die Anregung und Ionisation von Wasserstoffatomen durch Stöße von raschen Protonen und anderen Wasserstoffatomen. Dabei werden folgende Prozesse untersucht:

$H^+$  (oder  $H(1s)$ ) +  $H(1s) \rightarrow H^+$  (oder  $H(1s)$ ) +  $H(2s, 2p, 3s, 3p, 3d$  oder  $C$ ), wobei  $C$  die kontinuierlichen Zustände bezeichnet. Die Ergebnisse werden hauptsächlich in graphischer Form wiedergegeben. Bei Ionisierungsstößen wird auch die Energieverteilung der weggeschleuderten Elektronen ermittelt. Bei der Berechnung nach dem Bornschen Verfahren wird bekanntlich der Austausch nicht berücksichtigt. Die Ergebnisse für relativ kleine Stoßenergien gestatten, den Gültigkeitsbereich für die Näherungsmethode festzustellen. Der Vergleich mit den experimentellen Arbeiten, speziell von Keene [Philos. Mag., VII. Ser. **40**, 369 (1949)] liefert allerdings nur eine dürftige Übereinstimmung mit der Theorie. Diese Diskrepanzen werden von den Verff. auf die außerordentlichen Schwierigkeiten zurückgeführt, die die Versuche den Messungen entgegenstellen.

*P. Urban.*

**Bates, D. R., Kathleen Ledsham and A. L. Stewart: Wave functions of the hydrogen molecular ion.** Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A **246**, 215—240 (1953).

The electronic wave functions of ten states of  $H_2^+$  are computed, in spheroidal coordinates; the results are listed in tables of parameters. A brief comparison with L. C. A. O. results is made. Some contour diagrams of the normalized wave functions are also presented.

*J. Jacobs.*

**Lefebvre, Roland: Sur l'application de la méthode d'interaction de configuration aux molécules.** C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 1158—1160 (1953).

The use of selfconsistent one-electron wave functions in the energy matrix is advocated. This allows certain configurations to be excluded a priori from the calculation of the ground state energy, as is shown for the case of trans-butadiene.

*J. Jacobs.*

**Gáspár, R. und A. Kónya: Zur Theorie des HJ-Moleküls.** Acta phys. Acad. Sci. Hungar. **3**, 31—44 (1953).

The statistical model for  $J^-$ , including correlation correction and perturbation, forms the basis of this theory of the HJ molecule; purely ionic bonding is assumed. The correlation correction proves important whenever density in the outer regions of an ion is significant, as in calculations of polarizability. No empirical constants are assumed. Good agreement with empirical values for dissociation energy and induced dipole moment are obtained.

*J. Jacobs.*

**Griffith, J. Stanley: A free-electron theory of conjugated molecules. II. A derived algebraic scheme.** Proc. Cambridge philos. Soc. **49**, 650—658 (1953).

[Part I: Trans. Faraday Soc. **49**, 345 (1953).] From any free-electron wave function  $\psi(p)$ , at nucleus  $p$ , a vector  $\vec{c}$  is derived with components  $c_p = a^{1/2} \psi(p)$ , where  $a$  is the  $CC$  bond length. This vector satisfies a matrix equation similar in form to the  $LCAO$  secular equation. Symmetry, degeneracy, and energy of the eigenvectors correspond exactly with those found by the usual methods. A theorem about free-electron charge density in alternant hydrocarbons is derived:  $\frac{2}{3} a^{-1}$  at the nucleus of each centre linked to 3 neighbours,  $a^{-1}$  at the nucleus of every other centre.

*J. Jacobs.*

**Fraser, P. A. and W. R. Jarman: Vibrational transition probabilities of diatomic molecules. I.** Proc. phys. Soc., Sect. A **66**, 1145—1152 (1953).

Jarmain, W. R. and P. A. Fraser: Vibrational transition probabilities of diatomic molecules. II. Proc. phys. Soc., Sect. A 66, 1153—1157 (1953).

Daudel, Raymond: Sur la localisabilité des corpuscules dans les noyaux et les cortèges électroniques des atomes et des molécules. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 601—603 (1953).

Perl, William and Vernon Hughes: Relativistic contributions to the magnetic moment of  $^3S_1$  helium. Phys. Review, II. Ser. 91, 842—852 (1953).

Die Verf. gehen von der Wellengleichung für stationäre Zustände eines Zweielektronensystems in einem gegebenen äußeren elektromagnetischen Feld aus und stellen sich die Aufgabe relativistische Korrekturen für das magnetische Moment im Falle heliumähnlicher Atome im Zustand  $^3S_1$  des niedrigsten Energietriplets zu berechnen, wie sie der Dirac-Breit-Margenau'schen Theorie ohne inneres Strahlungsfeld, jedoch mit Coulombscher und Breit'scher Wechselwirkung entsprechen. Im Falle wasserstoffähnlicher Atome ist diese Rechnung durch Breit und Margenau durchgeführt worden. Es handelt sich darum, den Beitrag  $\Delta E_H$  der äußeren magnetischen Wechselwirkung zum Energieeigenwert  $E$  bis zur Ordnung  $\alpha^2 \sim (137)^{-2}$  auszuwerten. Dazu darf die Störungstheorie erster Ordnung verwendet werden. Dabei wird die 16-komponentige Form des Matricelementes der magnetischen Wechselwirkungsenergie in Termen der nichtrelativistischen Wellenfunktionen nach Paulis Näherungstheorie ausgewertet mit Benutzung der Winkel- und Spinsymmetrie des Zustands  $^3S_1$ . Diese Methode wird dadurch ermöglicht, daß Paulis Näherungstheorie die gewünschte Genauigkeitsordnung  $\alpha^2$  streng garantiert. Im Resultat erhalten die Verf. für den sogenannten  $g$ -Wert zweier Elektronen gebunden in Wechselwirkung im Zustand  $^3S_1$  die Summe zweier Ausdrücke, deren erster der Erwartungswert der totalen kinetischen Energie ist, während der zweite die elektrostatische Wechselwirkungsenergie im Zustand  $^3S_1$  beschreibt (verursacht von der Breit'schen Wechselwirkung). Auch Breit-Margenau's Resultat für ein einzelnes Elektron ist in diesem Ergebnis eingeschlossen. Für  $^3S_1$  Helium ergibt sich der numerische  $g$ -Wert 2  $[1 - (38,7 + 2,3) 10^{-6}]$ .

M. Pinl.

Perl, William: Relativistic contributions to the magnetic moment of  $n$ -electron atoms. Phys. Review, II. Ser. 91, 852—858 (1953).

Genaue Messungen des Zeeman-Effektes haben in der Atomstrahlspektroskopie im Grundzustand Abweichungen der  $g_J$ -Werte (vgl. vorsteh. Referat) von der Einheit ergeben, die z. B. für Rubidium Natrium  $1 + 5 \cdot 10^{-5}$  und für Cäsium/Natrium  $1 + 13,4 \cdot 10^{-5}$  betragen. Auch für Kalium Wasserstoff wurde  $1 + (1,6 + 0,4) \cdot 10^{-5}$  gemessen. Da der Wert  $g_J = 1$  von der nichtrelativistischen Theorie vorausgesagt wird, liegt es nahe, diese Abweichungen als relativistische Effekte zu deuten. Dazu wird eine Schrödinger-Pauli-Näherungsrechnung für ein  $n$ -Elektronen-Atom in einem äußeren Magnetfeld  $H$  von Diracs Gleichung gewonnen unter unmittelbarer Verallgemeinerung des Falles  $n = 2$ . Die resultierende Hamiltonfunktion enthält die Terme  $\alpha^2 \mu_0 H$  und  $\alpha^2 R_y$  ( $\alpha$  = Feinstrukturkonstante,  $\mu_0$  = Bohrsches Magneton,  $H$  = äußere magnetische Feldstärke,  $R_y$  = Rydberg-Energie).  $\alpha^2 \mu_0 H$  kann als Summe der relativistischen Breit-, Margenau-, Lamb-Effekte gedeutet werden mit einem weiteren zusätzlichen Effekt, der Verwandtschaft zu einem Spineffekt der Feinstruktur zeigt. Zum Schluß werden die  $^2S_{1/2}$  Grundzustände der schweren Alkalien untersucht.

M. Pinl.

Kou, Tsing-Tsuan and Kai-Yi Chang: A calculation of the diamagnetic susceptibilities of atoms and ions with variational wave functions. Chinese J. Phys. 9, 93—103 u. engl. Zusammenfassg. 104—109 (1953) [Chinesisch].

Wilhelm, Johannes: Zur Sondentheorie in elektronegativen Gasen. Ann. der Physik, VI. F. 12, 401—409 (1953).

Die vorliegende Arbeit untersucht die Verwendungsmöglichkeit ebener Sonden zum Studium elektronegativer Gase. In Anlehnung an die klassische Theorie von Langmuir-Mott-Smith werden zunächst die Gesetzmäßigkeiten der Trägerbewegung in der Raumladungsschicht vor der Sondenoberfläche bestimmt. Der Zusammenhang zwischen dem Spannungsbedarf und der räumlichen Ausdehnung stellt sich als komplizierter Integralausdruck dar, für den Verf. im Spezialfall sowohl Näherungslösung als auch numerische Auswertung angibt und zum Vergleich graphisch darstellt. Die Möglichkeiten zur Bestimmung der verschiedenen Plasmakenngrößen, sowie der Gültigkeitsbereich der Berechnungen werden diskutiert.

G. Ecker.



**Hasikuni, Mitugi:** The dispersion relation of plasma oscillations in an external electric field. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 17, 129—138 (1953).

**Nardini, R.:** Lösung eines Randwertproblems der Magneto-Hydrodynamik. Z. angew. Math. Mech. 33, 304—305 (1953).

**Boer, J. de:** La théorie des liquides monoatomiques. Nuovo Cimento, Suppl., Ser. IX 10, 225—250 (1953).

Zusammenfassender Bericht über neuere Arbeiten zur Theorie der Flüssigkeiten. § 3 bringt eine Dimensionsbetrachtung über den Einfluß der Quantisierung auf die Zustandsgleichung. Es zeigt sich, daß merkbare Abweichungen bereits beim Neon auftreten. Im Anschluß daran wird die Theorie der radialen Dichteverteilung besprochen. Die letzten Kapitel behandeln die Lennard-Jonesche Theorie.

*H. Koppe.*

**Buckthought, K.:** A quantum-statistical theory of liquid helium. Canadian J. Phys. 31, 932—941 (1953).

He II wird als Bosegas mit Wechselwirkung behandelt. Ähnlich zur Berücksichtigung der Elektronenwechselwirkung in der Metalltheorie rechnet Verf. mit unabhängigen Teilchen in einem Potential, das näherungsweise aus den Eigenfunktionen dieser Teilchen (als Blochsche Wellen angesetzt) und dem bekannten Wechselwirkungspotential zweier He-Atome hergeleitet wird. Die Schrödingergleichung führt mit der Näherung hoher Energien auf die Termdichte, mit der dann nach den üblichen Formeln Entropie, spezifische Wärme usw. berechnet werden. Anwendung des gleichen Verfahrens und Benutzung der Fermistatik für He<sup>3</sup>. *G. Höhler.*

**Temperley, H. N. V.:** A new theory of liquid helium. Further treatment. Proc. phys. Soc., Sect. A 66, 995—1008 (1953).

In der Einleitung wird zunächst ausgeführt, daß weder die Näherung vom kristallinen Zustand, noch die vom Gaszustand her beim Helium zu befriedigenden Ergebnissen führen kann. Es wird dann in Anlehnung an die Mayersche Theorie die Annahme eingeführt, daß sich die Heliumatome zu „Haufen“ von  $n$  Atomen vereinigen können und daß man die Wechselwirkung zwischen verschiedenen Haufen vernachlässigen kann. Die Haufen selbst sollen die Eigenschaften haben, daß 1. für ein bestimmtes  $n = z$  die Bindungsenergie pro Atom ein Maximum hat, 2. die Haufen mit  $n \approx z$  keine angeregten Bindungszustände besitzen und 3. die Haufen mit großen  $n$  sehr viele angeregte Zustände besitzen (d. h. sich schon wie kleine Kristalle benehmen). Die Zustandssumme läßt sich unter diesen Annahmen hinschreiben, und es zeigt sich, daß im wesentlichen eine der drei folgenden Situationen vorliegen kann: 1. Keine Haufen, 2. vorwiegend Haufen mit großem  $n$ , 3. vorwiegend Haufen mit  $n = z$ . Mit sinkender Temperatur werden diese Zustände in der angegebenen Reihenfolge durchlaufen. Der Übergang von 2 zu 3 entspricht dem  $\lambda$ -Punkt. Die Haufen mit großem  $n$  sind bei höherer Temperatur gegenüber den  $z$ -Haufen bevorzugt, da sie wegen ihrer vielen Anregungszustände eine höhere Entropie haben.

*H. Koppe.*

**Pekeris, C. L.:** A classical model of a roton. Proc. nat. Acad. Sci. USA 39, 443—451 (1953).

Wenn eine Kugel sich mit konstanter Geschwindigkeit durch eine ideale inkompressible Flüssigkeit bewegt, entsteht eine wirbelfreie Strömung. Ersetzt man die Kugel durch Flüssigkeit, die eine geeignete Wirbelbewegung hat, so entsteht eine Lösung der hydrodynamischen Gleichungen. U. a. hat Hicks [Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 192, 33—100 (1899)] einen solchen Wirbel gefunden, der einen Gesamtdrehimpuls in Richtung seines Linearimpulses hat. Die Abhängigkeit der Energie vom Linearimpuls hat die von Landau [J. Phys., Moscow 11, 91 (1947)] für seine „Rotonen“ angegebene Form:  $E(p) = \Delta + (p - p_0)^2/2\mu$ . Die drei von Landau aus dem Experiment hergeleiteten Konstanten  $p_0$ ,  $\Delta$ ,  $\mu$  folgen angenähert aus den hier verfügbaren zwei Parametern mit  $3,2 \cdot 10^{-8}$  cm als Kugelradius und  $1,5 \hbar$  als Drehimpuls. Verf. hofft, daß einige Eigenschaften des Wirbels bei der Quantisierung erhalten bleiben. Vgl. folgendes Referat. *G. Höhler.*

**Ziman, J. M.:** Quantum hydrodynamics and the theory of liquid helium. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 219, 257—270 (1953).

Die Quantenhydrodynamik von Kronig und Thellung (dies. Zbl. 47, 448) war auf den

wirbelfreien Fall beschränkt. Ausgehend von der Darstellung eines beliebigen Geschwindigkeitsfeldes durch  $\mathbf{v} = -1/\Phi \nabla \psi$  [Clebsch, J. reine angew. Math. 56, 1 (1859)] und von der Lagrangedichte  $L = \rho \{ \dot{\Phi} + \chi \dot{\psi} - v^2/2 - W(\rho) \}$  (Bateman, Partial differential equations of mathematical physics, Cambridge 1932, dies. Zbl. 4, 214) —  $\rho$  = Dichte,  $W(\rho)$  = Kompressionsenergie pro Masseneinheit — gewinnt Verf. zunächst einen Hamiltonformalismus für die klassische Hydrodynamik reibungsfreier Flüssigkeiten einschließlich Wirbelbewegung. Als kanonisch konjugierte Variable treten auf:  $(\Phi, \rho)$ ;  $(\psi, \rho\chi)$ . Nach der Kontakttransformation  $\psi = \psi_1/\psi_2$ ,  $\rho\chi = \psi_2^{2/2}$  erfolgt die Quantisierung durch Angabe der Vertauschungsrelationen

$$[\Phi(\mathbf{r}), \rho(\mathbf{r}')] = [\psi_1(\mathbf{r}), \psi_2(\mathbf{r}')] = i\hbar \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Der Geschwindigkeitsoperator erhält mit  $\Psi = (2\hbar)^{-1/2} (\psi_1 - i\psi_2)$ ,  $\Psi^* = (2\hbar)^{-1/2} (\psi_1 + i\psi_2)$  die Form  $\mathbf{v} = -1/\Phi \nabla - (1/2) i\hbar \rho^{-1} \{ \Psi^* | \Psi - \Psi | \Psi^* \}$ . Er erfüllt die von Landau [J. Phys., Moscow 5, 71 (1941), 11, 91 (1947)] auf ganz anderem Wege gewonnenen Vertauschungsrelationen. Fourierzerlegung der Operatoren und Benutzung der schon von Kronig und Teller vorgenommenen Entwicklung von  $\rho W(\rho)$  nach Potenzen von  $(\rho - \rho_0)$  führt auf einen Hamiltonoperator, der zunächst die schon von diesen Autoren untersuchten Phonon-Anteile enthält. Daneben tritt, von den Variablen  $\Psi, \Psi^*$  herrührend, ein „Roton-Anteil“ auf, dessen Spektrum die von Landau angegebene Form  $E(p) = 1 + p^2/2\mu$  hat. Dabei mußte die im Ansatz nicht enthaltene Endlichkeit der Zahl der Freiheitsgrade durch Abschneidung eines Integrals berücksichtigt werden. — Es wird gezeigt, daß der Rotonenzustand einer klassischen Wirbelbewegung entspricht. — Eine genaue Untersuchung der Wechselwirkungsterme steht noch aus.

G. Höhler.

**Itô, Hiroshi:** Variational principle in hydrodynamics. Progress theor. Phys. 9, 117—131 (1953).

Zielsetzung und klassische Theorie wie im vorsteh. Ref. Der Übergang zur Quantentheorie wird jedoch in den Variablen  $(\Phi, \rho)$ ,  $(\psi, \rho\chi)$  versucht; dabei gelingt es nicht, die Landauschen Formeln für die Rotonen zu gewinnen. Verf. bringt die Größe  $\chi$  (vorsteh. Ref.) in Verbindung mit der Entropie.

G. Höhler.

**Belov, N. V.:** Über das sogenannte Gesetz der kristallographischen Symmetrie. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 88, 63—65 (1953) [Russisch].

Das Grundgesetz der kristallographischen Symmetrie sagt aus, daß es bei Kristallen nur 1-, 2-, 3-, 4- und 6-zahlige Achsen gibt. Es kann auf verschiedene Weisen bewiesen werden. Verf. gibt einen Beweis, der darauf beruht, daß, wenn die Struktur eine Achse ungerader Ordnung  $n$  aufweist, alle zu dieser Achse senkrechten Netzebenen Achsen von doppelter Ordnung  $2n$  besitzen. Da die Gitterpunkte, welche durch die Drehachsen auseinander hervorgehen, untereinander keine Abstände, die kleiner als der Abstand Gitterpunkt auf Achse — zu drehender Gitterpunkt sind, aufweisen müssen, ergibt sich die bekannte Beschränkung (vgl. z. B. P. Niggli, Lehrbuch der Mineralogie, 1. Aufl., Berlin, 1920, S. 27/28) (nach deutscher Übersetzung referiert).

W. Nowacki.

**Subnikov, A. V.:** Über die sogenannte Homologie der Kristalle. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 88, 453—456 (1953) [Russisch].

Unter einer Symmetrietransformation versteht man eine lineare Transformation  $x_i = c_{i1}x'_1 + c_{i2}x'_2 + c_{i3}x'_3$  ( $i = 1, 2, 3$ ), wobei die  $c_{ik}$  der Orthogonalitätsbedingung genügen; unter einer Homologietransformation eine solche, bei der die  $c_{ik}$  dies nicht tun. Die Grundoperation der Homologieoperationen ist die „schiefe Spiegelung“, bei der alle Punkte einer Figur auf die andere Seite einer gewissen Ebene längs einer mit ihr keinen rechten Winkel bildenden Richtung übertragen werden, in Entfernungen, die gleich ihren Abständen von dieser Ebene in der gegebenen schiefen Richtung sind. Es wird an Hand eines monoklinen Kristalles gezeigt, daß eine Homologie der Kristalle überhaupt nicht existiert, da sich die Transformationen nicht nur auf die rein mathematische Form, sondern auch auf die physikalischen Eigenschaften der Kristalle beziehen müssen (wie dies bei den Symmetrietransformationen der Fall ist). Die Anwendung des Homologiebegriffes beschränkt sich daher auf abstrakt-geometrische Figuren. (Nach deutscher Übersetzung referiert.)

W. Nowacki.



**Fieschi, R. and F. G. Fumi:** High-order matter tensors in symmetrical systems. *Nuovo Cimento*, Ser. IX **10**, 865—882 (1953).

Verf. erhält, teils mit elementaren gruppentheoretischen Methoden (trigonales, hexagonales System), teils durch unmittelbare Einsicht, die kennzeichnenden Bedingungen, die zwischen den Komponenten von Tensoren V. und VI. Stufe im Dreidimensionalen unter der Gültigkeit kristallographischer Punktgruppen bestehen. Die Arbeit ergänzt eine vorangehende (Fumi, dies. Zbl. **48**, 386) und ist von Bedeutung für die anisotropen Materialeigenschaften. *F. L. Bauer.*

**Hove, J. and J. A. Krumhansl:** The evaluation of lattice sums for cubic crystals. *Phys. Review*, II. Ser. **92**, 569—572 (1953).

Ein der Ewaldschen Methode ähnliches Verfahren wird entwickelt, um eine rasche Berechnung von Gittersummen bei Kristallen zu ermöglichen. *G. Leibfried.*

**Mott, N. F.:** Ricerche recenti in teoria dei solidi. *Nuovo Cimento*, Suppl., Ser. IX **10**, 211—224 (1953).

**Viswanathan, K. S.:** The characteristic vibrations of crystal lattices. I, II. *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A* **37**, 424—434, 435—440 (1953).

Eine anfängliche Störung an einem Kristallgitter läßt sich asymptotisch (für große Zeiten) als eine Überlagerung von charakteristischen Eigenschwingungen des Kristalles mit zeitabhängiger Amplitude darstellen. Diese charakteristischen Schwingungen sind dadurch ausgezeichnet, daß für sie die Gruppengeschwindigkeit verschwindet. Ihre Anzahl hängt von der Kristallstruktur ab. Verf. schließt daraus, daß nur diese Schwingungen und nur die entsprechenden Frequenzen physikalisch bedeutsam sind, und will so die Ramanschen Vorstellungen über die Kristallschwingungen stützen. Tatsächlich aber ist der asymptotische Zustand keine eigentliche Superposition solcher charakteristischen Schwingungen, da die Amplituden zeitabhängig sind. Die Anregungsstärke einer beliebigen Gitterschwingung ändert sich zeitlich nach dem anfänglichen Eingriff nicht mehr. Damit ist auch die Behauptung, daß schließlich nur noch eine Anzahl charakteristischer Frequenzen angeregt sind, nicht haltbar. *G. Leibfried.*

**Iribarne, Julio V. und Dora G. de Kowalewski:** Berechnung der normalen Schwingungsfrequenzen für das Molekül  $(\text{PNCI}_2)_3$ . *Revista Un. mat. Argentina* **15**, 193—210 (1953) [Spanisch mit engl. Zusammenfassg.].

**Yanagawa, Sadaaki:** Theory of the normal modes of vibration in crystal. *Progress theor. Phys.* **10**, 83—94 (1953).

Für spezielle Wahl des Ausbreitungsvektors ist die Auswertung der Säkulargleichung zur Bestimmung der Eigenfrequenzen von Gitterschwingungen besonders einfach, da die Säkulargleichung auf mehrere Gleichungen niederen Grades reduziert werden kann. Verf. führt diese Reduktion mit gruppentheoretischen Hilfsmitteln durch. Kennt man die Eigenfrequenzen längs bestimmter Richtungen im Raum der Ausbreitungsvektoren, so kann man daraus näherungsweise die spektrale Verteilung der Eigenfrequenzen darstellen. Für NaCl und Diamant wird das Spektrum auf diese Weise numerisch ermittelt. *G. Leibfried.*

**Bauer, E.:** The vibrational spectrum and specific heat of sodium. *Phys. Review*, II. Ser. **92**, 58—67 (1953).

Eine von Houston am kubisch primitiven Gitter verwendete Methode zur näherungsweisen Darstellung des Frequenzspektrums wird beim raumzentrierten Gitter angewandt und am Natrium mit anderen Näherungsmethoden und dem experimentellen Verlauf der spezifischen Wärme verglichen. *G. Leibfried.*

**Stratton, R.:** A surface contribution to the Debye specific heat. *Philos. Mag.*, VII. Ser. **44**, 519—532 (1953).

Das Frequenzspektrum eines oberflächenspannungsfreien, elastischen, endlichen Körpers wird berechnet und nach der Debyeschen Theorie behandelt. Die Debyesche Formel wird durch einen der Oberfläche proportionalen Term ergänzt. *G. Leibfried.*

**Quimby, S. L. and Paul M. Sutton:** Computation of mean Debye temperature of cubic crystals from elastic constants. *Phys. Review*, II. Ser. **91**, 1122—1127 (1953).

Das Verfahren von Hopf und Lechner zur Bestimmung von Debyetemperaturen anisotroper kubischer Kristalle wird durch Angabe günstiger Stützpunkte für die nötige Interpolation in der Genauigkeit verbessert und für die Anwendung vereinfacht. Die Güte der Näherung wird abgeschätzt und ein Korrekturglied für den Fall starker Anisotropie angegeben.

*W. Brenig.*

**Fosdick, Lloyd D. and Hubert M. James:** A new approximation method for order-disorder problems. *Phys. Review*, II. Ser. **91**, 1131—1141 (1953).

Die Bethesche Näherungsmethode zur Behandlung der Ordnungserscheinungen bei Legierungen und des Ferromagnetismus wird durch Hinzunahme eines zweiten Parameters erweitert. Es wird neben den einfachen ebenen Gittern noch das kubisch primitive Gitter behandelt und mit anderen Methoden verglichen.

*G. Leibfried.*

● **Read, W. T.:** Dislocations in crystals. (International Series in pure and applied Physics.) New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Co. Inc. 1953. 228 S. 36 s.

In den letzten Jahren ist eine besondere Art von Kristallstörung, die Versetzung, in der Festkörperphysik in den Vordergrund getreten. Der 1. Teil des Buches bringt eine Einführung in die Theorie der Versetzungen. Im 2. Teil werden Kristallwachstum und Korngrenzen als die Anwendungsgebiete behandelt, bei denen man die Rolle der Versetzungen klar übersieht. Die Eigenschaften der Versetzungen, die verschiedenen Typen, ihre Wechselwirkung untereinander und mit äußeren Spannungsfeldern werden klar und übersichtlich beschrieben und mit einer großen Anzahl guter Abbildungen verdeutlicht. Die mathematische Formulierung und Begründung ist weitgehend unterdrückt und wird zum Teil in den Übungsaufgaben behandelt. Aus diesem Grunde sind die Aufgaben ziemlich schwierig, bilden aber eine notwendige Ergänzung. Wer das Buch nur liest, ohne die Aufgaben zu berücksichtigen, wird lediglich einen qualitativen Überblick bekommen, wird aber seine Kenntnisse nicht recht verwerten können. Wer dagegen die Aufgaben richtig behandeln kann und verstanden hat, wird in der Lage sein, auf diesem Gebiet selbständig weiter zu arbeiten. Was in der Einführung fehlt und nur zum Teil bei der Behandlung der Korngrenzen nachgeholt wird, sind Ausführungen über die möglichen Anordnungen vieler Versetzungen. Bei den Anwendungen werden die Erscheinungen bei der plastischen Verformung nicht berücksichtigt, „da bisher keine systematische, gesicherte, allgemeine Theorie dieser Erscheinung existiert“. Als Einführung ist das Buch ausgezeichnet geeignet. Als Anleitung zur selbständigen Arbeit in einem neuen wichtigen Problemkreis der Festkörperphysik kann es empfohlen werden.

*G. Leibfried.*

**Leibfried, G.:** Versetzungen in anisotropem Material. *Z. Phys.* **135**, 23—43 (1953).

Durch Störungsrechnung wird hier das Verschiebungs- und Spannungsfeld einer beliebig verlaufenden Versetzungslinie in einem homogenen anisotropen Medium behandelt. Zunächst wird die Mittelwertbildung der elastischen Konstanten über alle Richtungen, die nach Voigt vorgenommen wird, besprochen. Entwickelt man die elastischen Konstanten nach Potenzen der Abweichungen von der Isotropie und behält nur Glieder erster Ordnung bei, so kann man das sog. elastische Fundamentalintegral geschlossen berechnen und das Verschiebungsfeld der Versetzungslinie entweder als Linienintegral längs der Versetzungslinie oder als Flächenintegral über die von der Versetzung umschlossene Fläche darstellen. Ausführlich behandelt werden geradlinige Stufen- und Schraubenversetzungen, und zwar in hexagonalen Kristallen in der Basisebene, in kubischen Kristallen in der (111)-Ebene mit Burgersvektor  $[110]$ , wobei der Einfluß der Anisotropie auf die Spannungsfelder an Hand numerischer Beispiele diskutiert wird.

*A. Seeger.*

**Frank, F. C. and J. F. Nicholas:** Stable dislocations in the common crystal lattices. *Philos. Mag.*, VII. Ser. **44**, 1213—1235 (1953).

Auf Grund eines einfachen Stabilitätskriteriums werden die möglichen stabilen Versetzungen und Partialversetzungen in einfachen Gittern untersucht und diskutiert.

*G. Leibfried.*



**Eshelby, J. D.:** The equation of motion of a dislocation. Phys. Review, II. Ser. **90**, 248—255 (1953).

Die Bewegungsmöglichkeiten einer Schraubenversetzung werden untersucht. Ein Beispiel einer beschleunigten Bewegung wird gegeben. Eine Bewegungsgleichung für kleine Geschwindigkeiten wird aufgestellt und diskutiert. *G. Leibfried.*

● **Verma, A. R.:** Crystal growth and dislocations. London: Butterworths Scientific Publications 1953. 30 s.

**Cottrell, A. H., S. C. Hunter and F. R. N. Nabarro:** Electrical interaction of a dislocation and a solute atom. Philos. Mag., VII. Ser. **44**, 1046—1067 (1953).

Eine Stufenversetzung in einem Metall steht in Wechselwirkung mit Fremdatomen des Gitters. Diese Wechselwirkung hat einen elastischen und einen elektrischen Anteil. Verf. schätzen den elektrischen Anteil für Zn, Ga, Ge, As in Cu ab. Es stellt sich heraus, daß die elektrische Wechselwirkung etwa  $1/5$  der elastischen ausmacht. *G. Leibfried.*

**Säenz, A. W.:** Changes in the electrical, thermal and thermoelectrical properties of monovalent metals by lattice distortions. Phys. Review, II. Ser. **91**, 1142—1151 (1953).

Der Einfluß von Gitterverzerrungen auf elektrische und thermische Leitfähigkeit, sowie die Thermokraft wird untersucht. Die bei plastischer Verformung auftretenden Widerstandsänderungen können nach den Resultaten des Verf. nicht auf die im Laufe der Verformung erzeugten Versetzungen zurückgeführt werden, sondern sollten durch Leerstellen bzw. Zwischengitteratome erklärt werden. *G. Leibfried.*

**Herpin, A.:** Les forces de polarisabilité dans les cristaux. J. Phys. Radium **14**, 611—620 (1953).

Die Kräfte zwischen polarisierbaren geladenen Gitterbausteinen werden quantenmechanisch abgeleitet. Es ergeben sich Kräfte von Typ der Mehrkörperkräfte, welche die Abweichungen von den Cauchy-Relationen der elastischen Konstanten bei den Alkalihalogeniden in guter Übereinstimmung mit dem Experiment beschreiben. *G. Leibfried.*

**Meier, Rudolf und Kurt Schuster:** Zur Theorie der Anregung von Dickenschwingungen piezoelektrischer Kristall-Platten. Ann. der Physik, VI. F. **12**, 386—392 (1953).

**Dexter, D. L.:** The small angle scattering of X-rays from cold-worked solids. Phys. Review, II. Ser. **90**, 1007—1012 (1953).

Die Intensitäten der Kleinwinkelstreuung von Röntgenstrahlen durch Löcher und Versetzungen werden berechnet und mit Messungen an kaltbearbeitetem Material verglichen. Die experimentellen Daten können aus der Versetzungsstreuung nicht gedeutet werden. Zur Erklärung werden Anhäufungen von Löchern herangezogen. *G. Leibfried.*

**Stroh, A. N.:** A theoretical calculation of the stored energy in a work-hardened material. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **218**, 391—400 (1953).

Die in einem plastisch verformten Material aufgespeicherte Energie wird im Versetzungsmodell unter verschiedenen Annahmen berechnet. Die Energie der aus einer Quelle erzeugten Versetzungen wird ermittelt, und die einzelnen Quellbereiche werden statistisch (nach einer von Mott entwickelten Theorie) behandelt. Bei hohen Verformungen ergibt sich die Energie als proportional zur Verformung in annehmbarer Übereinstimmung mit dem experimentellen Material. Bei kleinen Verformungen soll die Erzeugung von Löchern und Zwischengitterplätzen einen großen Anteil der aufgespeicherten Energie liefern. *G. Leibfried.*

**Poppe, J. A.:** Dielectric polarization of a dipolar lattice. Philos. Mag., VII. Ser. **44**, 1276—1280 (1953).

Eine strenge Berechnung der Polarisierbarkeit eines Dipolgitters für hohe Temperaturen wird in Form einer Reihenentwicklung für verschiedene Gitter angegeben und mit anderen Berechnungen verglichen. *G. Leibfried.*

**Overhauser, Albert W.:** Polarization of nuclei in metals. Phys. Review, II. Ser. **92**, 411—415 (1953).

Verf. weist auf eine Möglichkeit hin, die Spins der Atomkerne von Metallen teilweise zu orientieren. Es soll die magnetische Spin-Resonanz-Absorption der Leitungselektronen ausgenutzt werden. Einer der hierbei auftretenden Relaxationsprozesse besteht im Spinaustausch von Atomkern und Leitungselektron; er führt unter gewissen Bedingungen zu einer Anreicherung der Kernspins einer Richtung. *G. Heber.*

**Keilson, Julian:** On the diffusion of decaying particles in a radial electric field. J. appl. Phys. **24**, 1397—1400 (1953).

Es wird das folgende in der Transistorphysik auftretende Problem behandelt: Von einer Punktquelle werden Ladungsträger in einen Halbleiter emittiert, in welchem ein mit  $1/r^2$  abfallendes Coulombfeld aufrechterhalten wird, dessen Zentrum nicht mit der Punktquelle zusammenfällt. Gefragt wird nach dem Bruchteil  $\gamma$  der Ladungsträger, die eine bestimmte, als Senke dienende Äquipotentialfläche des Coulombfeldes ohne vorherige Rekombination erreichen. Die Punktquelle soll sich außerhalb der kugelförmigen Äquipotentialfläche befinden. Die Diffusion von Ladungsträgern endlicher Lebensdauer im Coulombfeld läßt sich in allgemeiner Form nur schwer behandeln. Doch kann der Bruchteil  $\gamma$  aus kugelsymmetrischen Lösungen des Diffusionsproblems ermittelt werden. Für  $\gamma$  als Funktion des Äquipotentialkugeldurchmessers läßt sich eine zur Diffusionsgleichung analoge Differentialgleichung herleiten. *W. Oldekop.*

**Ziel, A. van der:** A modified theory of production of secondary electrons in solids. Phys. Review, II. Ser. **92**, 35—39 (1953).

Der Wirkungsquerschnitt für die Erzeugung von Sekundärelektronen durch mittelschnelle, in Metalle geschossene Primärelektronen wird berechnet. Dabei wird, der Plasma-Theorie entsprechend, die Wechselwirkung der Elektronen durch ein abgeschirmtes Coulomb-Potential beschrieben, während alle bisherigen Rechnungen auf diesem Gebiet mit dem nichtabgeschirmten Coulomb-Potential operierten. Es zeigt sich, daß die sogen. Wooldrigdeschen Prozesse (Erzeugung von Sekundärelektronen unter Mitwirkung des Metallgitters) gegenüber den von Baroody betrachteten zu vernachlässigen sind. Außerdem werden gewisse Schwierigkeiten, die der Theorie des Energieverlustes des Primärelektrons bisher anhafteten, beseitigt. *W. Brauer.*

**Banbury, P. C.:** Theory of the forward characteristic of injecting point contacts. Proc. phys. Soc., Sect. B **66**, 833—849 (1953).

Es wird die Strom-Spannungscharakteristik einer Spitzendiode (bestehend aus einem Halbleiter mit aufgesetzter Metallspitze) in der Durchlaßrichtung untersucht. Dabei wird vorausgesetzt, daß der Stromtransport in dem betrachteten  $n$ -Halbleiter nur durch die injizierten Defektelektronen erfolgt. Rekombinationseffekte werden vernachlässigt. Nach einer kurzen Diskussion dieser Näherungsannahmen werden die theoretischen Formeln mit beobachteten Kennlinien verglichen und auch photoelektrische Messungen besprochen. *W. Oldekop.*

**Pratt jr., George W.:** Eigenfunctions of  $S^2$  by a spin operator method. Phys. Review, II. Ser. **92**, 278—288 (1953).

Es wird ein Operator angegeben, der bei Anwendung auf eine Slater-Determinante eine Eigenfunktion zum Gesamtspin erzeugt. *W. Brenig.*

**March, N. H.:** Introduction of exchange in the Thomas-Fermi model for atoms. Philos. Mag., VII. Ser. **44**, 1193—1196 (1953).

**Band, William:** Low temperature diamagnetism of electrons in a cylinder. Phys. Review, II. Ser. **91**, 249—255 (1953).

Verf. behandelt die Schrödinger-Gleichung  $\hat{H}\Psi = E\Psi$  mit  $\hat{H} = -(\hbar^2/2M)\Delta - i\hbar(eH/2Mc)\partial/\partial\Phi + (r^2/2)(eH/2Mc)^2$ , die, mit geeigneten Randbedingungen, das Verhalten eines Elektrons in einem zylindrischen



Gefäß bei Anwesenheit eines longitudinalen Magnetfeldes beschreibt. Es gelingt, exakte Lösungen dieser Gleichung in der Form

$\psi = \exp(i k z) \exp(i m \Phi) \exp(-\alpha r^2/2) J_m^*(K r)$ ;  $\alpha = e H/2 \hbar c$ ,  $K^2 = 2 M E/\hbar^2 - k^2 - 2 m \alpha$  zu finden, wobei  $J_m^*$  modifizierte Besselfunktionen sind, die für verschwindendes  $H$  in diese übergehen und für schwache Felder die Nullstellen mit diesen gemein haben. Das Eigenwertspektrum ist  $E_{k m j} = \hbar^2 k^2/2 M + \hbar^2 K_{m j}^2/2 M + m e \hbar H/Mc$ ,  $K_{m j}$  ist, entsprechend der Randbedingung: Zylinderbegrenzung bei  $r = a$ , Lösung der Gleichung  $J_m^*(a K_{m j}) = 0$ . Dieses Spektrum ist wesentlich von dem Eigenwertspektrum des freien Raumes verschieden. Anschließend wird unter Benutzung eines Näherungsverfahrens (Integrationsmethode) die Fermi-Verteilung bei  $T = 0$  und deren Energie berechnet. Die Ergebnisse weichen wesentlich von denen früherer Arbeiten (M. F. M. Osborne, dies. Zbl. 47, 238; M. C. Steele, dies. Zbl. 47, 238; R. B. Dingle, dies. Zbl. 50, 240) ab. Das Elektronensemble zeigt einen starken, von der Größe des Zylinders abhängigen Paramagnetismus, die Suszeptibilität wird  $\chi_{\text{cyl}} = 24,52 e^2 a^2 (N/V)/M c^2$  gegenüber dem Wert im freien Raum  $\chi_{\text{frei}} = -0,105 e^2 (N/V)^{1/3}/M c^2$ . Verf. führt die total verschiedenen Ergebnisse anderer Autoren auf die Verwendung der WKB-Methode zur Lösung der Radialgleichung zurück. Ferner wird in der Diskussion hervorgehoben, daß eine Potentialänderung, die den Diamagnetismus der Supraleitung hervorrufen könnte, so groß sein müßte, daß sie wohl nicht mehr störungstheoretisch, ausgehend von den Wellenfunktionen freier Elektronen, gehandhabt werden kann.

F. Beck.

Elliott, R. J. and K. W. H. Stevens: The theory of magnetic resonance experiments on salts of the rare earths. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 218, 553—566 (1953).

Es wird gezeigt, wie man aus der Form und Größe des Kristallfeldes in kristallinen Salzen der seltenen Erden das paramagnetische Resonanzspektrum dieser Substanzen berechnen kann. In der Praxis schließt man dann umgekehrt aus den beobachteten Absorptionen auf das Kristallfeld.

G. Heber.

Oguchi, Takehiko and Yukio Obata: A theory of antiferromagnetism. Progress theor. Phys. 9, 359—369 (1953).

Bei der Einführung des inneren Feldes in eine Theorie des Ferro- oder Antiferromagnetismus nach dem Vorbilde von Bethe ist es bis zu einem gewissen Grade willkürlich, was man als inneres Feld ansehen will. Verff. geben eine andere Definition dieses Feldes als Weiss (dies. Zbl. 32, 330) und Li (dies. Zbl. 44, 450) und entwickeln auf der Grundlage dieser Definition eine Theorie des Antiferromagnetismus. Oberhalb des Curiepunktes stimmt die errechnete Suszeptibilität mit der von Li angegebenen überein, dagegen ergeben sich für tiefere Temperaturen Unterschiede. (Die Rechnungen lassen sich in diesem Modell im Gegensatz zum Lischen auch bei tiefen Temperaturen ohne wesentliche Schwierigkeiten durchführen.) Ein Anticurie-Punkt wird nicht erhalten.

G. Heber.

Ubbink, J.: Theory of antiferromagnetic resonance in a crystal of rhombic symmetry at the absolute zero. Physica 19, 9—25 (1953).

Verf. leitet die Bedingung für die magnetische Resonanz eines antiferromagnetischen, rhombischen Kristalles am Temperatur-Nullpunkt bei anisotropem magnetischen Momente der magnetischen Ionen und anisotroper Austauschwechselwirkung ab. Die Basis seiner Rechnungen bildet die kürzlich von Gorter und Haantjes [Physica 18, 285 (1952)] entwickelte Molekularfeld-Theorie solcher Substanzen.

G. Heber.

Dingle, R. B.: Some magnetic properties of metals. VI. Surface corrections to the Landau diamagnetism and the de Haas van Alphen effect. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 219, 463—477 (1953).

(Teil V, dies. Zbl. 50, 240.) Die genannten Korrekturen werden für freie Elektronen aus der Schrödingerschen Gleichung hergeleitet. Die Elektronen befinden sich einerseits in einem zylinderförmigen Hohlraum, dessen Achse mit der Richtung des Magnetfeldes übereinstimmt, andererseits in einem quaderförmigen Kasten, dessen Abmessungen in 2 Richtungen sehr groß relativ zur Ausdehnung in der dritten Richtung sind.

G. Heber.

Beck, F.: Der Energie-Impulstensor in der phänomenologischen Theorie der Supraleitung. Z. Phys. 134, 334—345 (1953).

Verf. zeigt, daß eine konsequent Lorentz-invariant formulierte phänomenologische Theorie der Supraleitung mit symmetrischem Welttensor notwendig nicht-linear ist. Die Nichtlinearität besteht in dem Zusammenhang zwischen Suprastrom und Supraimpuls. Die in der Londonschen Theorie auftretende Supraleitungskonstante muß stromabhängig sein. Die Forderung nach einer nicht überschreitbaren Maximalstromdichte ist anschaulich verständlich, wenn man von der Beschleunigungsgleichung für die Supraelektronen ausgeht; denn die Elektronen dürfen nicht auf Überlichtgeschwindigkeit beschleunigt werden. Das Zusatzglied zur ersten London-Gleichung ist klein von relativistischer Größenordnung. Verf. kann die Grundgleichungen und den Energie-Impulstensor aus einer Lagrangedichte herleiten, die die vierdimensionale Verallgemeinerung des v. Laueschen elektrodynamischen Potentials im Supraleiter darstellt. *G. U. Schubert.*

**Stenberg, N. R.:** The polarization of  $\gamma$ -radiation from aligned nuclei. Proc. phys. Soc., Sect. A **66**, 391—398 (1953).

**Stenberg, N. R.:** Population distribution of nuclei aligned at low temperatures. Proc. phys. Soc., Sect. A **66**, 399—402 (1953).

**Nakano, Huzio:** The Heisenberg theory of ferromagnetism of the crystal constituted by the atoms with spin one. Progress theor. Phys. **9**, 403—413 (1953).

Verf. zeigt auf gruppentheoretischem Wege, daß die bekannte Form des Diracschen Austauschenergieoperators auch für Kristalle aus Mehrelektronen-Atomen im wesentlichen erhalten bleibt, falls die Hundsehe Regel über die Multiplizität des tiefsten Zustandes für jedes einzelne Atom des Kristalles gültig ist. Dieser Operator wird dann der Ermittlung der Zustandssumme usw. für einen Kristall zugrunde gelegt, welcher aus Atomen mit Spin 1 besteht. Verf. führt eine Näherung durch, welche auf eine Entwicklung dieser Größe nach fallenden Potenzen von  $T$  hinausläuft. Es wird eine transzendente Gleichung für die Magnetisierung des Kristalles erhalten, aus welcher insbesondere der Curiepunkt als Funktion des Austauschintegrals und die Suszeptibilität oberhalb dieses Punktes deduziert werden. *G. Heber.*

**Dacey, G. C.:** Space-charge limited hole current in germanium. Phys. Review II. Ser. **90**, 759—763 (1953).

In Halbleitern gibt es Vorgänge, die große Ähnlichkeit mit der durch Raumladungen begrenzten Emission von Elektronen ins Vakuum besitzen. Die Theorie von Shokley und Prim (dies. Zbl. **50**, 451) wird auf den Fall hoher Feldstärken erweitert, wobei die Näherungsformel  $v = \mu \cdot (E \cdot E_0)^{1/2}$  für die Driftgeschwindigkeit  $v$  benutzt wird, wenn  $\mu$  = Beweglichkeit bei schwachen Feldern,  $E$  = Elektrische Feldstärke,  $E_0$  = „kritische Feldstärke“. Für die Stromdichte in einer planparallelen Diode folgt dann die zum Childschen Gesetz analoge Formel

$$J = \frac{2/3 (5/3)^{3/2} \cdot K \cdot \mu \cdot E_0^{3/2} \cdot V_a^{3/2}}{u^{3/2}}$$

Hierbei ist  $V_a$  die Potentialdifferenz längs einer Diode der Dicke  $u$  und  $K$  die Dielektrizitätskonstante in mks-Einheiten. Eine gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment wird für den Löcherstrom in Germanium bei Temperaturen der flüssigen Luft erzielt, wobei  $\mu$ - und  $E_0$ -Werte benutzt wurden, die unabhängig von Ryder gefunden worden sind. *W. Oldekop.*

**Frank, V.:** On the geometrical arrangement in Hall effect measurements. Appl. sci. Research B **3**, 129—140 (1953).

Es wird untersucht, wie die gemessene Hallspannung durch die Geometrie der Anordnung insbesondere durch den Kurzschlußeffekt der stromzuführenden Elektroden, gegenüber dem theoretischen Wert verändert wird. Es wird angenommen, daß man das Problem zweidimensional behandeln darf und daß ein einfach zusammenhängender Bereich vorliegt, der auf zwei gegenüberliegenden Seiten von den Elektroden und auf den beiden anderen Seiten von freier Oberfläche begrenzt wird. Bildet man ihn konform auf ein Rechteck ab, so geht die Geometrie der ursprünglichen Anordnung nur noch in die Randbedingungen des neuen Potentialproblems ein und zwar durch einen einzigen dimensionslosen Parameter  $a = \mu B$  ( $\mu$  = Beweglichkeit,  $B$  Magnetfeldstärke). Eine Näherungslösung wird für  $a^2 \ll 1$  gegeben, und es wird gezeigt, daß man unter dieser Voraussetzung den geometrischen Korrekturfaktor für die Hallspannung an dem experimentell zu bestimmenden Widerstand mit  $B = 0$  errechnen kann. Bei mehrfach zusammenhängenden Bereichen herrschen dagegen wesentlich kompliziertere Verhältnisse, so daß sie für die Praxis nicht zu empfehlen sind. Für Metalle ist die Bedingung  $a^2 \ll 1$  wohl immer erfüllt, dagegen braucht dies bei Halbleitern nicht der Fall zu sein. *A. Seeger.*



**Rooshbroeck, W. van:** The transport of added current carriers in a homogeneous semiconductor. Phys. Review, II. Ser. **91**, 282—289 (1953).

Erhöht man in einem homogenen Halbleiter die lokale Konzentration der Defektelektronen oder Elektronen durch Injektion der entsprechenden Ladungsträger, so wird der Konzentrationsüberschuß  $\Delta p$  (oder  $\Delta n$ ) durch eine entsprechende Konzentrationszunahme der anderen Ladungsträgerart kompensiert, so daß keine merklichen Raumladungen auftreten. Das hat zur Folge, daß der Transport des Konzentrationsüberschusses  $\Delta p$  nicht mit dem Transport der injizierten Ladungsträger selbst identifiziert werden kann. Die hergeleitete Kontinuitätsgleichung für den Konzentrationsüberschuß  $\Delta p$  zeigt, daß die den Transport von  $\Delta p$  charakterisierenden Größen wie Diffusionskonstante, Beweglichkeit und Lebensdauer im allgemeinen ganz andere Werte haben als die entsprechenden Größen für die in der Minderheit befindlichen Ladungsträger und noch von den lokalen Konzentrationen abhängen. Die lokale Driftgeschwindigkeit von  $\Delta p$  hat in einem  $n$ -Halbleiter die Richtung der Gesamtstromdichte, in einem  $p$ -Halbleiter die entgegengesetzte Richtung. Für kleine  $|\Delta p|$ -Werte wird die Kontinuitätsgleichung linear, weil Driftgeschwindigkeit, Diffusionskonstante, Lebensdauer und scheinbare Beweglichkeit dann unabhängig von  $\Delta p$  werden und nur noch von den mikroskopischen Materialkonstanten abhängen. Eine Bedingung für diesen Fall wird angegeben, und die betrachteten Größen werden für Ge als Funktionen von Temperatur und Leitfähigkeit ermittelt. *W. Oldekop.*

**Buckingham, M. J.:** The interaction of electrons with lattice vibrations. Radiation by a fast electron. Proc. phys. Soc., Sect. A **66**, 601—607 (1953).

Ein freies Elektron ist an ein in Debyescher Näherung behandeltes Gitter gekoppelt (Ansatz wie Fröhlich, dies. Zbl. **47**, 455). Wenn die Bewegung des Elektrons als vorgegeben angesehen wird, berechnet sich die durch die Kopplung hervorgerufene Deformation des Gitters aus einer inhomogenen Wellengleichung für das elastische Potential. Die Rechnung wird wegen der Debyeschen Abschneidevorschrift im Raum der Wellenzahlen durchgeführt. — Speziell berechnet Verf. die Energieabstrahlung durch ein mit konstanter Überschallgeschwindigkeit bewegtes Elektron (Analogon zum Čerenkov-Effekt) und vergleicht das Ergebnis seiner klassischen Rechnung mit der quantenmechanischen Störungstheorie. Er untersucht auch klassisch die Wechselwirkung zweier Elektronen infolge ihrer Kopplung an das Feld der Gitterwellen und findet ein Ergebnis von Singwi (dies. Zbl. **47**, 456) wieder, das dieser mittels einer Bloch-Nordsieck-Transformation gewonnen hatte.

*G. Höhler.*

**Haken, H.:** Eine modellmäßige Behandlung der Wechselwirkung zwischen einem Elektron und einem Gitteroszillator. Z. Phys. **135**, 408—430 (1953).

Für den eindimensionalen Fall werden strenge Lösungen der Schrödinger-Gleichung (1)  $H_{\text{El}} + H_{\text{Osz}} + H_w \Psi = E \Psi$  gefunden, die die Wechselwirkung eines sich im periodischen Potential bewegendem Elektrons mit einem Gitteroszillator beschreiben soll. Dementsprechend setzt

$$\text{Verf. für die einzelnen Teile des Hamilton-Operators an (2a) } H_{\text{El}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \sigma \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - na),$$

$$(2b) \quad H_{\text{Osz}} = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2}{dq^2} + \frac{M}{2} \omega^2 q^2, \quad (2c) \quad H_w = -\tau q \sum_{-\infty}^{+\infty} \cos kna \cdot \delta(x - na).$$

Obwohl  $H_w$  nicht die übliche Form  $\sim q \cos kna \cdot dV/dx$  hat, betont Verf., daß die wesentlichen Züge dieses Wechselwirkungsgliedes: 1. Linearität in  $q$ , 2. Periodizität in der Elektronencoordinate  $x$ , 3.  $H_w \neq 0$  nur dort, wo  $V \neq 0$ , auch in (2c) enthalten sind. Der Ansatz (2) für  $H$  entspricht einem periodischen Schwankungen unterworfenen Kronigspinschen Potentialmodell. Für dieses vereinfachte Modell ist eine strenge Lösung der Wellengleichung möglich. Ohne speziellen Ansatz für  $V(x)$  und  $H_w$  folgen jedoch aus (1) folgende allgemeine Eigenschaften der Lösung:  $\Psi = e^{i\mu x} u_\mu(x, q_1, \dots, q_n)$ ;  $v = \hbar^{-1} \partial E / \partial \mu$ ;  $\dot{\mu} = eF/\hbar$  (für kleine Feldstärken  $F$ ). Daraus folgt 1. a., daß es in dem hier behandelten Modell keine stabilen oder metastabilen stromführenden Zustände geben kann. Die spezielle Lösung gemäß (2) gelingt durch Entwicklung von  $\Psi$  nach Oszillator-Eigenfunktionen und Aufsuchen einer geeigneten Greenschen Funktion in Form eines unendlichen homogenen Systems linearer algebraischer Gleichungen für die Entwicklungskoeffizienten  $c_2(x)$ . Die Bedingung des Verschwindens der Determinante liefert die Abhängigkeit der Energie von der Wellenzahl. Aus rechen-technischen Gründen ist die Lösung nur für kurze Gitterwellen numerisch auswertbar. Für diesen Fall werden einige Beispiele durchgerechnet. Es tritt eine Bänderstruktur auf, jedoch spalten die Bänder im Gegensatz zum ruhenden Gitter in Einzelbereiche auf. Dieses Ergebnis wird im Hinblick auf die strahlungslosen Übergänge diskutiert und mit der Störungsrechnung verglichen. Letztere stellt nicht für alle Werte der Wellenzahl, insbesondere bei starker Kopplung, eine sinnvolle Näherung dar. *F. Beck.*

## Astronomie. Astrophysik. Geophysik.

● Smart, W. M.: *Celestial mechanics*. London: Longmans 1953. 70 s net.

Thüring, B.: *Analyse der Beziehungen zwischen Inertialsystem, Gravitation, Präzession und Eigenbewegungen der Fixsterne*. *Astron. Nachr.* **281**, 49—58 (1953).

Die Unmöglichkeit, ein Inertialsystem allein auf Grund der beobachteten Bewegungen von Planeten und Fixsternen abzuleiten, ist seit langem bekannt. Notwendig ist, nicht nur die Form des Kraftgesetzes vorzugeben, sondern auch gewisse statistische Annahmen über die Eigenbewegungen der Fixsterne zu machen, von denen dann die Bestimmung der Präzessionskonstante abhängt. Obwohl die übliche Hypothese von der Regellosigkeit der Pekuliarbewegung der Fixsterne sicher unrichtig ist, glaubte man auf dem Wege über sie — als erste Annäherung in einem Approximationsverfahren — zu einem absoluten Inertialsystem zu gelangen. Verf. zeigt, daß dieser Weg auf einen *circulus vitiosus* führt und daß es unmöglich ist, das Inertial ohne ein zusätzliches Prinzip zu definieren, durch das die überschüssigen Unbekannten des Problems sich festlegen lassen. Das Prinzip der Regellosigkeit der pekuliären Anteile der Eigenbewegungen ist für diesen Zweck wenig geeignet, weil 1. die Eigenbewegungen keine Gaußsche Verteilung zeigen und 2. die Bestimmung der Präzessionskonstante von der jeweiligen Auswahl der benutzten Eigenbewegungen abhängt. Verf. schlägt als hypothesenfreies Prinzip das der einfachsten Bestimmung der „Träger des Fundamental-Koordinatensystems (FKS)“ vor. Die Träger des FKS sind alle Sterne, die innerhalb der Grenzen der Beobachtungsgenauigkeit und eines hinreichend langen Zeitraums ihre gegenseitigen Abstände nicht ändern, und, falls es mehrere derartige Systeme gibt, das mit der größten Sternzahl. Liegt dies System einmal fest, so sind die Eigenbewegungen und unabhängig von ihnen die Präzessionskonstante ein für alle mal bestimmbar. Ob die 1587 Sterne des FK3 eine hinreichend zahlreiche Gruppe von Sternen enthalten, die die erforderlichen Eigenschaften besitzen, muß eine vom Verf. angekündigte weitere Untersuchung zeigen. Die Hauptmasse der Träger des FKS werden die Spiralnebel liefern, deren Bewegungen ja hauptsächlich in radialer Richtung erfolgt, deren astrometrische Einfügung in das System des FK3 aber noch einer Arbeit von Jahrzehnten bedarf. K. Stumpff.

Bucerus, H.: *Bahnbestimmung als Randwertproblem*. IV. *Astron. Nachr.* **281**, 97—106 (1953).

Die schon in den früheren Teilen I—III dieser Artikelserie (dies. Zbl. **37**, 400, 401, 44, 454) behandelte Frage nach der Konvergenz der Gaußschen Bahnbestimmungsmethode wird wieder aufgegriffen und zu Ende behandelt. Früher konnte nachgewiesen werden, daß in dem Gebiet eindeutiger Lösungen, also in jener umfangreichen Klasse von Fällen, in denen die Beobachtungen in einem weit ausgedehnten Bereich um die Opposition liegen, im Laufe des Iterationsverfahrens die „Gaußsche Gleichung“ entbehrlich ist. Diese Untersuchung wird nun auch auf die übrigen Gebiete des Raumes ausgedehnt. Unter anderem wird gezeigt, daß die durch Verzicht auf die Gaußsche Gleichung verkürzte Methode nur noch in gewissen Teilgebieten des realistischen Raumes konvergiert. K. Stumpff.

Jekhowsky, Benjamin de: *Nouvelle méthode pour la détermination des orbites paraboliques*. *C. r. Acad. Sci., Paris* **237**, 970—972 (1953).

Diese Methode der Kometenbahnbestimmung muß unter die allgemeine Gruppe der Laplace-Methoden gezählt werden, da ein mittlerer Ort  $(\alpha, \delta)$  ausgezeichnet wird und differentielle Beziehungen benutzt werden. Zur Determinierung wird daher außer  $(\alpha, \delta)$  noch benötigt die zeitlichen Ableitungen  $(\alpha', \delta')$  und ein weiterer Ort  $(\alpha_1, \delta_1)$ . Das Problem reduziert sich auf eine bekannte Gleichung 6. Grades für die geozentrische Distanz. Numerische Anwendungen sollen erfolgreich gewesen sein, werden aber nicht explizit mitgeteilt. H. Bucerus.

Caro, E. de: *Sulla variazione degli elementi orbitali nel moto relativo di due astri di masse variabili*. *Atti Accad. Gioenia Sci. natur. Catania*, VI. Ser. **8**, 141—147 (1953).

Für zwei Massen  $M$  und  $m$ , die nach dem Gesetz  $\dot{M}/M = \dot{m}/m = \text{const.}$  zeitlich variabel angenommen werden, wird das Zweikörperproblem unter Voraussetzung der folgenden Gleichungen im Inertialsystem  $d(M v_1)/dt = k^2 M m (P_2 - P_1) / d(m v_2)/dt = k^2 M m (P_1 - P_2) / r^3$  behandelt und das Ergebnis angewendet auf die Kosmogonie des Sonnensystems und der Doppelsterne, wobei eine säkulare Massenveränderlichkeit nach neueren Ansichten (Armellini, Fesenkoff) eine wesentliche Rolle spielt.



ische Rolle spielen soll. Nach Meinung des Ref. müßten die Trägheitsterme auf den linken Seiten der Bewegungsgleichungen für den Fall kugelsymmetrischer Teilchenemission der beiden Körper  $M dv_1/dt$  bzw.  $m dv_2/dt$  lauten. (Vgl. Jeans, *Astronomy and Cosmogony*, Cambridge 1927, p. 290.) *H. Bucerius.*

**Armellini, G.: Osservazioni sul problema dei due corpi di masse variabili e sopra alcune sue applicazioni alla cosmogonia.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 14, 727—733 (1953).

Neuere kosmogonische Ansichten über die säkulare Massenabnahme der Sterne durch Korpuskularstrahlung haben das Zweikörperproblem mit variabler Masse bei Anwendung auf Doppelsterne wieder in den Vordergrund gerückt. (Spektroskopische) Doppelsternsysteme großer Masse weisen im Mittel geringe, (visuelle) Systeme geringer Masse größere Exzentrizität auf, was durch die Hypothese der Massenabnahme gedeutet werden soll. Die beiden möglichen Grundgleichungen

$$m(t) \hat{A} = \hat{F} \quad \text{und} \quad d[m(t) \hat{V}]/dt = \hat{F}$$

[ $\hat{F}$  Vektor der äußeren Kraft,  $\hat{A}$  Beschleunigungsvektor,  $\hat{V}$  Geschwindigkeitsvektor,  $m(t)$  variable Masse] werden diskutiert, die erstere als für das Problem zutreffend erkannt und ein Wachstum der Exzentrizität umgekehrt proportional der sich vermindernenden Masse abgeleitet. *H. Bucerius.*

**Elste, G.: Die Entzerrung von Spektrallinien unter Verwendung von Voigtfunktionen.** Z. Astrophys. 33, 39—73 (1953).

Es werden die Eigenschaften der Voigtfunktionen zusammengestellt und die Funktionen auf Grund einer Neuberechnung geeignet vertafelt. Außerdem wird gezeigt, daß durch additive und subtraktive Zusammensetzung mehrerer Voigtfunktionen der Bereich der entzerrbaren Spektrallinien erheblich erweitert werden kann ohne großen Mehraufwand gegenüber dem bisherigen Verfahren der Darstellung durch nur eine Voigtfunktion. Die praktische Anwendung der beschriebenen Verfahren wird an folgenden Beispielen gezeigt: a) die Approximation des Apparateprofils eines Gitterspektrographen, b) die Entzerrung von Protuberanzlinien.

*H. Vogt.*

**Busbridge, Ida W.: Coherent and non-coherent scattering in the theory of line formation.** Monthly Not. Roy. astron. Soc. 113, 52—66 (1953).

Für eine Sternatmosphäre mit wahrer Absorption und kohärenter Streuung (deren Verhältnis von der Tiefe unabhängig sein soll), in welcher die Kirchhoff-Planck-Funktion linear mit der optischen Tiefe anwächst, hat s. Z. S. Chandrasekhar (*Radiative Transfer*, Oxford 1950, dies. Zbl. 37, 432) eine exakte Lösung des Strahlungsgleichgewichtsproblems gegeben. Diese Lösung wird zunächst in etwas anderer Weise nochmals abgeleitet. Das analoge Problem für völlig nichtkohärente Streuung wird dann mit Hilfe der Invarianten-Methodik von V. A. Ambarcumjan und in Anlehnung an eine Arbeit von V. V. Sobolev [*Astronomičeskij Žurn.* 26, 129 (1949)] behandelt. Eine exakte Lösung ergibt sich nur unter der sehr schematisierten Annahme, daß die Kirchhoff-Planck-Funktion für alle Frequenzen dieselbe lineare Funktion der geometrischen Tiefe in der Atmosphäre ist. Einige Punkte der Sobolevschen Abhandlung werden kritisch beleuchtet.

*A. Unsöld.*

**Cimino, Massimo: Sull'equilibrio stellare convettivo in condizioni politropiche generalizzate.** Atti. Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 14, 779—783 (1953).

Die Emdensche Definition der polytropen Weggleichung  $dQ = \xi \cdot dT$  mit konstantem  $\xi$  ( $Q$  Wärmemenge,  $T$  Temperatur) wird verallgemeinert auf ein von  $T$  abhängiges

$$\xi(T) = \xi_0 + \xi_1 T^{m_1} + \dots + \xi_\lambda T^{m_\lambda}$$

mit konstanten  $\xi_\nu$  und  $m_\nu$ . Aus der hydrostatischen Gleichung und der idealen



Gasgleichung ergibt sich eine Poissonsche Differentialgleichung für das Potential  $U$ :  $d^2U/dr^2 + (2/r) dU/dr + 4\pi f\mu(U) = 0$ , wo  $f$  die Gravitationskonstante und die Dichte  $\mu(U)$  implizit durch elementare Funktionen definiert ist. Speziell für den Ansatz aller  $\xi_r = 0$  außer  $\xi_0$  und  $\xi_1$  in der Nachbarschaft des Emdenschen Falles ( $\xi_1 = 0$ ) werden vom Differentialgleichungsstandpunkt unter Heranziehung einer früheren Arbeit des Verf. die Existenzbedingungen einer physikalisch sinnvollen Lösung angegeben. H. Bucerius.

**Nardini, Renato:** Soluzione di un problema al contorno della magneto-idrodinamica. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **35**, 269—290 (1953).

In un fluido perfetto incompressibile ed omogeneo un accoppiamento di forze meccaniche ed elettromagnetiche fa sorgere i cosiddetti fenomeni magneto-idrodinamici (Alfvén, questo Zbl. **28**, 269). L'A. calcola la soluzione del problema piano che si ottiene supponendo che il fluido occupi il semispazio  $Z \geq 0$  e che l'intensità del campo magnetico, la velocità e la pressione del fluido dipendano solo da  $Z$  e dal tempo. Le condizioni iniziali ed al contorno sono state suggerite all'A. da suoi precedenti studi sull'unicità della soluzione nella teoria delle onde magneto-idrodinamiche (questo Zbl. **48**, 205, 206). L'A. determina la soluzione coll'applicazione formale della trasformata di Laplace, verifica poi che essa soddisfa a tutte le condizioni imposte e indica condizioni sufficienti affinché essa sia l'unica. L'A. rileva anche che, con diverso significato dei simboli, il problema posto coincide con quello della determinazione del moto di una corda omogenea, quando si tenga conto della viscosità interna. G. Capriz.

**Dungey, J. W.:** A family of solutions of the magneto-hydrostatic problem in a conducting atmosphere in a gravitational field. Monthly Not. Roy. astron. Soc. **113**, 180—187 (1953).

**Lampariello, G.:** Das elektrische Erdfeld und das magnetische Sonnenfeld; ein Versuch ihre Beziehung auf Grund der relativistischen Elektrodynamik zu erklären. Z. angew. Math. Mech. **33**, 275—279 (1953).

Die während der Bahnbewegung der Erde um die Sonne entstehende elektrische Oberflächenladung auf der Erde wird berechnet unter der Annahme, daß sie durch elektromagnetische Induktion eines solaren magnetischen Dipolfeldes entsteht. Bei experimentell bekannter elektrischer Oberflächenladung könnte dann umgekehrt das solare Magnetfeld bestimmt werden. G. Thiessen.

**Lampariello, G.:** Allgemeine Betrachtungen über die Randwertbedingungen in der Elektrodynamik bewegter Körper. Z. angew. Math. Mech. **33**, 274—275 (1953).

Es wird darauf hingewiesen, daß — falls bei der Bewegung eines Körpers im Vakuum die Sommerfeldsche kinematische Bedingung nicht erfüllt ist, d. h. wenn dabei die Oberfläche nicht in sich selbst verschoben wird — dann auch die Stetigkeit der tangentiellen Komponenten der elektrischen Feldstärke am Rande vorhanden ist, wenn die magnetische Feldstärke auf beiden Seiten der Oberfläche gleich ist. G. Thiessen.

**Haar, D. ter:** On Kuiper's theory of the origin of the solar system. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A **64**, 1—8 (1953).

G. P. Kuipers Weiterbildungen (1949—51) der v. Weizsäckerschen Theorie über die Entstehung des Planetensystems werden in verschiedener Hinsicht kritisiert: 1. Kuipers halbempirische Darstellung der Bahnradialen unter Mitverwendung der Massen ist nicht besser als die Darstellung der Bahnradialen durch eine geometrische Reihe. 2. Berücksichtigt man, daß die turbulenten Geschwindigkeiten im Urplanetensystem höchstwahrscheinlich größer waren als die thermischen Geschwindigkeiten, so entsprechen die geforderten Dichten in der Äquatorialscheibe nicht mehr den Voraussetzungen Kuipers. 3. Das hydrodynamische Problem der Anordnung und Stabilität der großen Wirbel in der Äquatorialscheibe (v. Weizsäcker) bedarf weiterer Klärung. — Ter Haar vertritt schließlich den Stand-



punkt, daß die Entstehung des Planetensystems nur im Zusammenhang mit der Entstehung der Sonne selbst geklärt werden könne. In diesem Rahmen wiederum aber fehlt z. Z. noch jeder Anhaltspunkt zur Erklärung der langsamen Rotation der Sonne.

A. Unsöld.

**Kurth, Rudolf:** Die Homologie-Sätze der Theorie des Sternaufbaus. *Z. Astrophys.* 32, 11—18 (1953).

Verf. betrachtet die Grundgleichungen des Aufbaues eines Sternmodells mit konvektivem Kern und umgebender Hülle, in der Strahlungsgleichgewicht herrscht. Das Molekulargewicht ist konstant vorausgesetzt, für Energieerzeugung und Absorptionskoeffizient ist je ein Potenzprodukt von Dichte und Temperatur mit allgemeinen Exponenten angenommen, als Randbedingungen Druck und Temperatur im Mittelpunkt vorgegeben. Macht man die Gleichungen und Randbedingungen dimensionslos, so lassen sich Sternmodelle als homolog definieren, wenn die Lösungen desselben dimensionslosen Gleichungssystems mit den gleichen dimensionslosen Randbedingungen sind. Daraus lassen sich drei Homologierelationen herleiten: die Masse-Leuchtkraft-, die Masse-Radius- und eine Masse-Temperaturbeziehung. Zu jedem Wertepaar von Mittelpunktsdichte und Mittelpunktstemperatur gehört eindeutig eine Homologiekategorie. Die Überlegung wird auf ein sehr vereinfachtes Rotationsmodell und auf pulsierende Sterne ausgedehnt und je eine weitere Relation dafür hergeleitet. Der Vergleich mit der Erfahrung zeigt, daß in der Natur der Einteilung der Sternmodelle in Homologiekategorien keine analoge Einteilung der Sterne zu entsprechen scheint; weder die Hauptreihensterne noch die Cepheiden bilden eine einheitliche Homologiekategorie.

R. Kippenhahn.

**Davies, T. V.:** The forced flow of a rotating viscous liquid which is heated from below. *Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A* 246, 81—112 (1953).

Im Jahre 1951 untersuchte Fultz in Chicago die Strömungsverhältnisse in einem mit Wasser gefüllten, rotierenden Gefäß, das an seiner Unterseite erwärmt wurde. Es zeigte sich, daß die Strömung in gewisser Weise von der Umdrehungsgeschwindigkeit des Gefäßes abhing. War diese gering, so war die Strömung an der freien Oberfläche vorwiegend symmetrisch zur Drehachse, bei großer Rotationsgeschwindigkeit trat in bestimmter Richtung Wellenbewegung auf. Es wurde eine kritische Drehgeschwindigkeit festgestellt, bei der die eine Art der Strömung in die andere umschlug. Die Theorie dieser Versuche, die wegen der Ähnlichkeit der bei großer Drehgeschwindigkeit auftretenden Strömungen mit atmosphärischen Strömungen interessieren, wird vom Verf. für den Fall symmetrischer Strömungen diskutiert. Zunächst untersucht er die Verhältnisse bei einem nicht rotierenden Gefäß, dann den Fall der Rotation, unter Vernachlässigung aller nichtlinearen Terme (die sehr klein sind, wenn die Temperaturdifferenz zwischen Achse und Rand hinreichend klein ist), schließlich wird auch der Einfluß der nichtlinearen Terme diskutiert. Nach Einführung einiger vereinfachender Annahmen ergibt sich bei Vernachlässigung der nichtlinearen Glieder die Existenz einer (relativ zum rotierenden Gefäß) symmetrischen Strömung, die bei jedem Wert der Drehgeschwindigkeit auftritt. Anschließend an diese Ergebnisse werden die Lösungen diskutiert, die sich bei Berücksichtigung nichtlinearer Terme ergeben.

H. Nabl.

**Chandrasekhar, F. R. S.:** The onset of convection by thermal instability in spherical shells. *Philos. Mag., VII. Ser.* 44, 233—241 (1953).

Es wird untersucht, ob die Struktur der heutigen Erdoberfläche durch thermische Konvektion entstanden sein kann. Dazu wird ein gegen eine frühere Arbeit (dies. Zbl. 48, 239) abgewandeltes Modell betrachtet: Über einem von innen geheizten festen Kern befindet sich eine viskose Kugelschale. Es zeigt sich, daß die durch Konvektion deformierte Oberfläche durch um so höhere Kugelfunktionen dargestellt wird, je dünner die Schale ist. Wenn die Dicke der Schale etwa halb so groß ist wie der Radius der ganzen Kugel, so wird die Konvektion durch Kugelfunktionen der Ordnungen 3 und 4 beherrscht. Damit steht in guter Übereinstimmung die 1922 von Prey gegebene Entwicklung der Erdoberfläche nach Kugelfunktionen bis zur 17. Ordnung, bei der diese Glieder nächst dem ersten am größten sind.

W. Kertz.

**Mieghem, Jacques-M. van:** Comments on the vorticity equation. *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A* 37, 204—212 (1953).

Um die Verwirrung zu vermeiden, die bei den Versuchen herrscht, das Vorkommen großer Werte der absoluten Wirbelgröße (vorticity) (bis zum zweifachen Wert des Coriolis-Parameters und mehr) zu erklären, muß eine klare Unterscheidung zwischen individuellen und lokalen Änderungen der absoluten Wirbelgröße vor-



genommen werden. Unter Benutzung eines bewegten Systems krummliniger Koordinaten gelingt es, einen analytischen Ausdruck für die individuellen und lokalen Änderungen abzuleiten, der für Anwendungen in der synoptischen Meteorologie brauchbar erscheint. Die Gleichgewichtsbeziehungen der absoluten Wirbelgröße, die explizit die lokalen Änderungen der absoluten Wirbelgröße für das Einheitsvolumen in Gliedern des Wirbelflusses und der Wirbelproduktion geben, scheinen die passendste Form der Wirbelgleichung für synoptische Zwecke zu sein. *A. Defant.*

**Ibrahim, Z.:** Ionospheric current systems. *Proc. math. phys. Soc. Egypt* 4, 43—51 (1953).

Die auf Grund der „Dynamotheorie“ von Stewart-Schuster-Chapman aufgestellten, jedoch stark vereinfachten Differentialgleichungen für den elektrischen Strom in der Ionosphäre werden mit Hilfe der Relaxationsmethode von Southwell integriert. In diesem einfachen Fall läßt sich zeigen, daß die mit dieser Methode gewonnenen Resultate von den Ergebnissen der strengen Lösung um weniger als ein-einhalb Prozent abweichen. *H. Nabl.*

**Worsley, Beatrice H.:** On the second-order correction terms to values of gravity measured at sea. *Proc. Cambridge philos. Soc.* 48, 718—732 (1952).

Die Bewegung eines auf einer periodisch beschleunigten Unterlage schwingenden Pendels wurde mittels einer elektronischen Rechenmaschine studiert. Die Ergebnisse finden Anwendung beim Problem der Berechnung des Korrektionsgliedes zweiter Ordnung bei Schweremessungen auf See mittels des Vening-Meinesz-Drei-Pendel-Apparates. Dieses Korrektionsglied für eine horizontale Beschleunigung unter typischen Verhältnissen wird mehr als doppelt so groß wie es auf analytischem Wege von Browne gefunden wurde. Es ist für vertikale Beschleunigungen für einen weiten Frequenzbereich der Störbewegung gültig. *A. Defant.*

**Vening Meinesz, F. A.:** The second order corrections for pendulum observations at sea. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. B* 56, 218—227 (1953).

Verf. befaßt sich in dieser Arbeit mit der von B. H. Worsley gegebenen Untersuchung, die im vorstehendem Ref. besprochen wurde. Er gelangt in neuerlicher Prüfung des Problems zu einer neuen Formel für die Berücksichtigung des Effekts der Komponente der Störbewegung sowohl in der Richtung der Schwingungsebene des Pendels als auch senkrecht zu ihr. Die Formel hat einen Teil, der gut mit fast allen Werten für diese Korrektion, wie Worsley sie berechnet hat, übereinstimmt. Aber es gibt noch einen anderen Teil dieser Formel, der Berücksichtigung finden muß. Beide Teile dieser Formel stimmen zusammengefaßt vollständig mit der bisher benützten Formel von Browne überein. Die Zweifel, die Worsley ausgesprochen hat, sind deshalb unbegründet. In der Arbeit werden schließlich drei Bedingungen angeführt, deren Erfüllung bei Pendelbeobachtungen auf See ratsam erscheint. *A. Defant.*

**Weber, Max:** Theorie der Kombinationsseismographen. *Z. angew. Math. Phys.* 4, 57—81 (1953).

Nach einer Einführung und einer Erörterung der Aufgabe der Erschütterungsmessung befaßt sich Verf. mit dem äußeren Aufbau der elektronischen Kombinationsseismographen. Bei der analytischen Behandlung betrachtet er zunächst die Beschleunigung, mit der ein beliebiges Maßelement des Schwingers belegt wird. Sodann behandelt er den Schwinger selber in mehreren Spezialfällen. Die Eigenschaften der Seismometer werden ausführlich an Hand von Tabellen und Kurven erläutert. Hierauf kommt Verf. zu den elektronischen Verstärkern und erörtert ihre Aufgaben. Zum Schluß wird die Messung der Koordinaten, der Geschwindigkeiten und der Beschleunigungen mit Hilfe eines elektronischen Kombinationsseismographen behandelt. Eine Fehlerrechnung beschließt die Arbeit. *M. J. O. Strutt.*